

## E1 : Sources du champ électromagnétique

- Quelles sont les sources du champ électromagnétiques ? D'une part, une distribution de charges électriques produit un champ électrique (exemples : « électricité statique », condensateur, noyau d'un atome, etc). D'autre part, une distribution de courant électrique génère un champ magnétique<sup>1</sup> (exemples : électroaimant, spectromètre de masse, orbite électronique, etc). Nous verrons aussi chapitre *E4-Équations de Maxwell* que les champs électriques et magnétiques variables s'entretiennent l'un l'autre.



FIGURE 1 – Un chat recouvert de polystyrène par électricité statique.

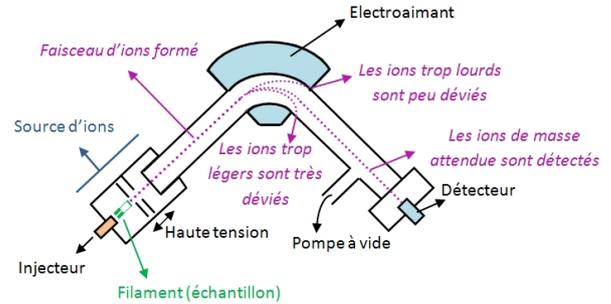


FIGURE 2 – Déviation d'ion par un électroaimant dans un spectromètre de masse.

- Articulation des chapitres d'électromagnétisme :
  - ★ *E1 - Sources du champ électromagnétique.*  
→ Description des charges et courants électriques.
  - ★ *E2 - Électrostatique.*  
→ Lien entre charges électriques fixes et champ électrostatique  $\vec{E}$ .
  - ★ *E2 - Magnétostatique.*  
→ Lien entre courants électriques permanents et champ magnétostatique  $\vec{B}$ .
  - ★ *E4 - Équations de Maxwell.*  
→ Lien entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en régime quelconque. Onde électromagnétique.
  - ★ Propagation des ondes électromagnétiques (entre autres) chapitres *PO1*, *PO2* et *PO3*.

## 1 La charge électrique

### 1.1 Exemples et ordre de grandeur

def : L'interaction entre un système et le champ électromagnétique fait intervenir la **charge électrique** (ou « charge ») du système, souvent notée  $q$  ou  $Q$ . Extensive. Analogie avec la masse  $m$  qui caractérise l'interaction avec le champ gravitationnel.

signe : Contrairement à la masse, la charge électrique peut être négative ou positive.

unité : Coulomb  $C = A \cdot s$ . Autre unité :  $1 A \cdot h = 3600 C$ .

ODG : ★ électron  $q_e = -e = -1,602 \cdot 10^{-19} C$ , proton  $q_p = +e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$ .

★ la charge d'un atome est ... nulle! En effet, il contient autant d'électrons que de protons. En conséquence, les systèmes macroscopiques sont quasiment neutres.

★ transfert lors d'électricité statique : quelques microcoulombs.

★ une plaque d'un condensateur de capacité  $C$  soumis à une tension  $U$  stocke la charge  $q = CU$ .

★ les piles classiques peuvent fournir de l'ordre de quelques kilocoulombs (soit quelques Ampère-heure).

extensivité : Soit un système mésoscopique de volume  $dV$  contenant  $dN_i$  charges de valeurs  $q_i$ , alors la charge totale est  $dq = \sum_i dN_i \cdot q_i$ .

1. En plus des courants, il y a aussi le *spin* des particules qui produit un champ magnétique.

## 1.2 Quantification de la charge

prop : La charge électrique est **quantifiée**. La plus petite valeur accessible<sup>2</sup> est la **charge élémentaire**  $e = 1,602.10^{-19}$  C. Elle est portée par les protons (+e) et électrons (-e). C'est une constante fondamentale de la physique<sup>3</sup>.

dualité onde-corpuscule : Les protons et électrons ne peuvent pas être considérés seulement comme des corpuscules. Ils sont décrits par leur fonction d'onde<sup>4</sup>.

ODG de longueur de fonction d'onde : Le diamètre de la fonction d'onde d'un proton est de l'ordre de celui du noyau :  $r_n \simeq 10^{-15}$  m. Celui d'un électron est de l'ordre de celui de l'atome  $a_0 \simeq 10^{-10}$  m.

## 1.3 Importance fondamentale à l'échelle macroscopique

★ La **cohésion de la matière** est due à la force électrostatique à l'origine de la liaison chimique et des liaisons intermoléculaires. Notamment toutes les forces du type *réaction du support* ou *raideur d'un matériau* sont d'origine électrostatique!

★ Toute **l'électronique et la production d'énergie électrique** repose sur les propriétés des charges électriques.

★ **L'interaction entre la matière et le rayonnement électromagnétique** repose sur les charges : absorption, émission, réfraction de lumière, radio, micro-ondes, etc.

## 2 Densité volumique de charge

### 2.1 Définition de la densité volumique de charge

def : **densité volumique de charges** :  $\rho = dq/dV$ . Unité  $C.m^{-3}$ . Analogie avec densité de particules  $n = dN/dV$  et masse volumique  $\mu = dm/dV$ .

prop<sup>5</sup> : Pour un système contenant un seul type de charges de valeur  $q$  à densité volumique  $n$  :  $\rho = n \cdot q$ . Pour un ensemble de charges  $q_i$  à densité  $n_i$ ,  $\rho = \sum_i n_i \cdot q_i$ .

ODG : Dans le cuivre, la densité d'électrons de conduction est  $n = 8,5.10^{28}$   $m^{-3}$ . Dans les semi-conducteurs (Ge, Si, GaAs, etc),  $n$  est très variable : de  $10^5$   $m^{-3}$  à  $10^{25}$   $m^{-3}$  selon le dopage ou la température.

ODG : Déterminer l'ordre de grandeur de la densité volumique de charge d'un neutron, d'un proton, d'un électron, d'un atome, d'un fil électrique.

def : Pour des matériaux dont une dimension est très petite devant les autres (plaque très fine d'un condensateur par exemple), on utilisera plutôt la **densité surfacique de charges** :  $\sigma = dq/dS$ . Unité  $C.m^{-2}$ .

ODG : Déterminer l'ordre de grandeur de la densité surfacique de charge d'un condensateur de capacité  $C$ , surface  $S$ , distance  $e$  entre plaques, soumis à une tension  $U$ . On rappelle  $q = CU$ , et on donne  $C = \epsilon_0 S/e$  (cf démo chapitre  $E2$  : Électrostatique) et  $\epsilon_0 \simeq 8,85.10^{-12}$   $F.m^{-1}$ .

### 2.2 Lien entre charge totale et densité volumique de charge

def<sup>6</sup> : Comme  $\rho = dq/dV$ , la charge totale  $Q_{\text{int}}$  contenue dans un volume donné  $V$  est  $Q_{\text{int}} = \iiint_{M \in V} \rho(M) dV$ .

def : Dans un système de coordonnées, le **volume élémentaire**, noté  $dV$  ou  $d\tau$ , est le volume contenu dans une variation infinitésimale de chacune des coordonnées.

prop : Expression du volume élémentaire dans les trois systèmes de coordonnées :

$$\text{cartésiennes :} \quad dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\text{cylindriques :} \quad dV = dr \cdot r d\theta \cdot dz$$

$$\text{sphériques :} \quad dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\varphi$$

2. Les quarks possèdent des charges fractionnaires (par exemple  $e/3$ ) mais ne peuvent pas être isolés ni observables directement.

3. Depuis le 20 mai 2019, la charge élémentaire est exactement égale à  $1,602176634.10^{-19}$  C.

4. Cf dernier chapitre  $PO5$  : *Approche ondulatoire de la mécanique quantique*, et cours de chimie *Orbitales atomiques et moléculaires*.

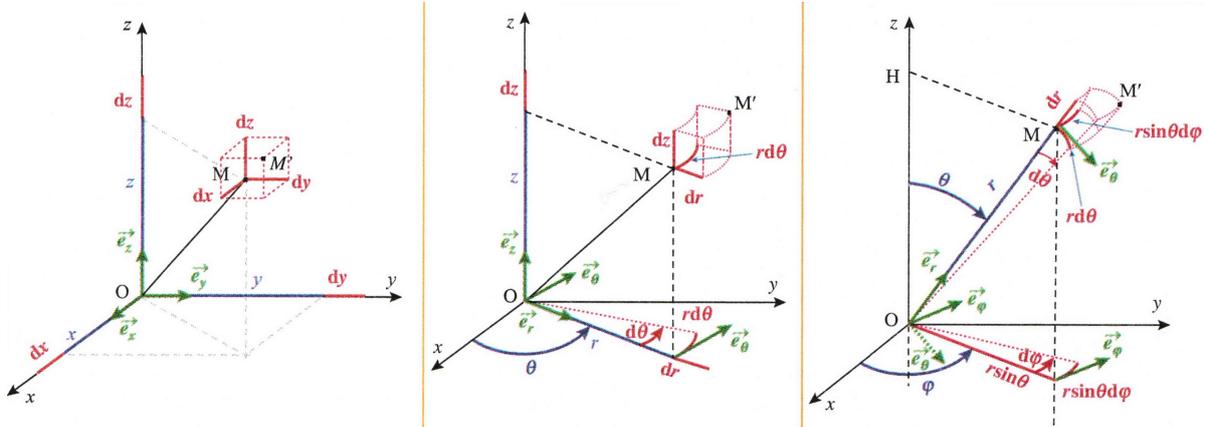
5. CE : Exprimer  $\rho$  en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge, de leur charge et de leur densité volumique.

6. CE : Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales.

prop : Le volume total vaut  $V = \iiint_{M \in V} dV$ .

exo : Pour un parallélépipède de longueurs  $a, b$  et  $c$ , démontrer que  $V = abc$ . Pour un cylindre de rayon  $R$  et hauteur  $h$ , démontrer que  $V = \pi R^2 h$ . Pour une boule de rayon  $R$ , démontrer que  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

exo : Soit une boule de rayon  $R$  de densité de charge  $\rho_0$  homogène. Calculer  $Q_{int}$  contenue dans une boule de rayon  $a < R$ , et dans une boule de rayon  $a > R$ . Même question pour une densité de charge non uniforme  $\rho(r) = \alpha r$ .



### 2.3 Invariance de la distribution de charge

def : Un système est dit **invariant** par rapport à une coordonnée si ses paramètres ne dépendent pas de cette coordonnée.

def : Si cette coordonnée est un angle, c'est une **invariance par rotation**. Si cette coordonnée est une longueur, c'est une **invariance par translation**.

exo : Déterminer les invariances de la distribution de charge dans le cas : d'une boule uniformément chargée, d'un cylindre infini uniformément chargé, d'un condensateur plan constitué de deux plaques infinies parallèles de densité surfacique  $\sigma$  et  $-\sigma$ .

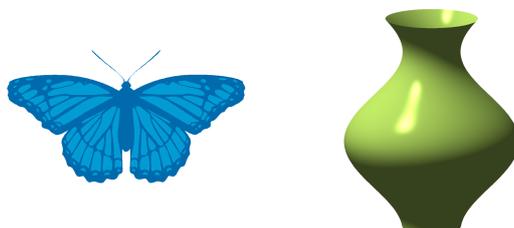
### 2.4 Symétrie de la distribution de charge

def : Deux points  $M$  et  $M'$  sont **symétriques par rapport à un plan P** si P est le plan médiateur du segment  $MM'$ .

def : Un plan P est un **plan de symétrie** d'un champ scalaire  $f$  (par exemple densité volumique de charge  $\rho$  ou température  $T$ ) si les valeurs de  $f$  sont identiques pour chaque paire de points symétriques  $M$  et  $M'$  soit :  $f(M) = f(M')$ .

def : Un plan P est un **plan d'antisymétrie** d'un champ scalaire  $f$  (par exemple densité volumique de charge  $\rho$  ou température  $T$ ) si les valeurs de  $f$  sont opposées pour chaque paire de points symétriques  $M$  et  $M'$  soit :  $f(M) = -f(M')$ .

exo : Déterminer les plans de symétrie du schéma de papillon et du vase suivants. Déterminer les plans de symétrie ou antisymétrie de la distribution de charge : d'une boule uniformément chargée, d'un cylindre infini de  $\rho$  uniforme, du condensateur plan constitué de deux plaques infinies parallèles de densité surfacique  $\sigma$  et  $-\sigma$ . Quels sont ceux passant par un point  $M$  quelconque ?



### 3 Densité volumique de courant

#### 3.1 Intensité électrique

def : Considérons une surface  $dS$  orientée. Si pendant  $dt$ , une charge  $\delta q$  traverse  $dS$  dans le sens de  $\vec{dS}$ , alors l'**intensité électrique**  $I$  est :  $I = \delta q / dt$ .

★ signe : Si des charges positives traversent  $S$  dans le sens de  $\vec{dS}$ , ou bien si des charges négatives traversent  $S$  dans le sens opposé à  $\vec{dS}$ , alors  $I > 0$ .

Si des charges positives traversent  $S$  dans le sens opposé à  $\vec{dS}$ , ou bien si des charges négatives traversent  $S$  dans le sens de  $\vec{dS}$ , alors  $I < 0$ .

★ charges en mouvement : Des charges immobiles ne contribuent pas au courant électrique (par exemple les protons ou les électrons de cœur d'un métal).

★ charges portant le courant : Dans métal : certains électrons de valence. Dans solution aqueuse : ions. Dans semi-conducteur : électrons et/ou trous (lacunes positives).

★ Unité SI : ampère A (homogène à C/s).

★ analogie :  $I = \delta q / dt$  est un débit de charge. Analogie avec débit de particule  $\phi_N = \delta N / dt$ , flux thermique  $\phi_Q = \delta Q / dt$ , débit de masse  $D_m = \delta m / dt$ .

★ ODG :

1 mA	Seuil de perception du corps humain
<b>1 mA - 1 A</b>	<b>Petits appareils courants</b>
10 mA	DEL commune
100 mA	Électrocution possible
1 A	Ampoule à incandescence
10 A	Radiateur 2000 W
100 A	Démarrateur automobile
1 kA	Moteur de locomotive
10 à 100 kA	Éclair

#### 3.2 Lien entre densité volumique de courant et intensité

def<sup>7</sup> : La **densité (volumique) de courant**  $\vec{j}$  est définie par  $I = \iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot \vec{dS}$ . Donc  $\|\vec{j}\|$  en A.m<sup>-2</sup> = C.s<sup>-1</sup>.m<sup>-2</sup>.

prop<sup>8</sup> : Soit un système homogène ne contenant qu'un seul type de charge de valeur  $q$ , de densité volumique  $n$ , se déplaçant à vitesse  $\vec{v}$ . Alors :  $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} = n \cdot q \cdot \vec{v}$ .

Dans le cas de différentes valeurs de charges  $q_i$  à densité volumique respective  $n_i$  et vitesse  $\vec{v}_i$  :  $\vec{j} = \sum_i n_i \cdot q_i \cdot \vec{v}_i$ .

analogie : Analogie forte avec  $\vec{j}_N = n \vec{v}$  cf chapitre T2-Diffusion de particules.

démo : Cf démo de  $\vec{j}_N = n \vec{v}$  chapitre T2-Diffusion de particules. Considérer une surface  $dS$ , et particules de charges  $q$  vitesse  $\vec{v}$  d'angle  $\theta$  avec  $\vec{dS}$ . La quantité de charge  $\delta q$  traversant  $dS$  pendant  $dt$  est dans le volume  $dV = dS \cdot v \cdot dt \cdot \cos \theta$ . Donc  $\delta q = \rho \cdot dV = \rho dS \cdot v \cdot dt \cdot \cos \theta$ . Donc  $I = \delta q / dt = \rho dS \cdot v \cos \theta = (\rho \vec{v}) \cdot \vec{dS}$ .

rq : On peut avoir  $\rho = 0$  et  $\vec{j} \neq \vec{0}$  ! Par exemple, un métal parcouru par un courant est neutre, donc  $\rho = 0$ . Mais comme seuls des électrons se déplacent (ions positifs fixes), alors  $\vec{j} \neq \vec{0}$  !

| ODG : Déterminer l'ordre de grandeur de  $j$  dans un fil. En déduire un ODG de  $\vec{v}$  moyen du courant.

def : Soit un contour fermé  $\mathcal{C}$  enlaçant une surface orientée  $S$ . Le **courant enlacé** par  $\mathcal{C}$  est simplement le courant traversant  $S$  :  $I_{\text{enlacé}} = \iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot \vec{dS}$ .

7. CE : Relier l'intensité du courant et le flux de  $\vec{j}$ .

8. CE : Exprimer  $\vec{j}$  en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge, de leur charge et de leur densité volumique.

ex 1 : Illustration de  $I_{\text{enlacé}}$  dans le cas de plusieurs fils parallèles.

ex 2 : Soit un cylindre de rayon  $R$  de densité de courant  $\vec{j}_0$  homogène. Calculer  $I_{\text{enlacé}}$  par un cercle de rayon  $a < R$ , et par un cercle de rayon  $a > R$ . Même question pour une densité de courant  $\vec{j}(r) = \beta r \vec{u}_z$ .

### 3.3 Invariance de la distribution de courant

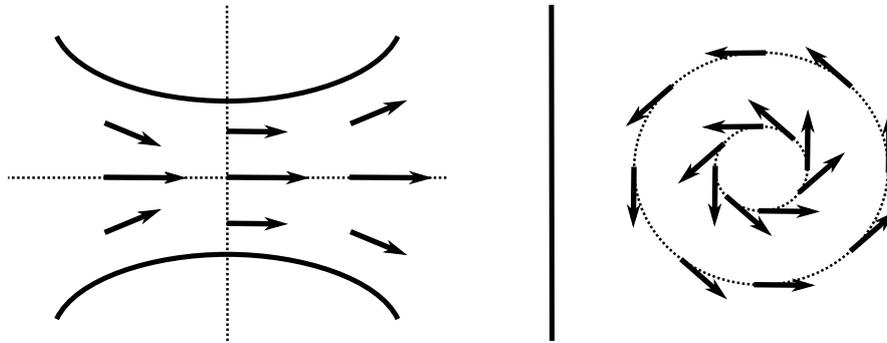
exo : Déterminer les invariances de la distribution de courant dans le cas : d'un fil infini parcouru par  $\vec{j}$  homogène, d'une plaque infinie parcourue par  $\vec{j}$  homogène.

### 3.4 Symétrie de la distribution de courant

def : Un plan  $P$  est un **plan de symétrie** d'un champ vectoriel  $\vec{v}$  (par exemple densité volumique de courant  $\vec{j}$  ou champ électrique  $\vec{E}$ ) si pour chaque paire de points symétriques  $M$  et  $M'$  alors  $\vec{v}(M)$  et  $\vec{v}(M')$  ont mêmes composantes tangentielles au plan mais composantes normales opposées (« symétrie miroir »)

prop : **En particulier, en tout point appartenant à un plan de symétrie  $P$  de  $\vec{v}$ , le champ  $\vec{v}$  est colinéaire à  $P$ .**

ex : Déterminer tous les plans de symétrie ou antisymétrie des champs suivants. Déterminer tous ceux qui passent par un point  $M$  quelconque.



def : Un plan  $P$  est un **plan d'antisymétrie** d'un champ vectoriel  $\vec{v}$  (par exemple densité volumique de courant  $\vec{j}$  ou champ électrique  $\vec{E}$ ) si pour chaque paire de points symétriques  $M$  et  $M'$  alors  $\vec{v}(M)$  et  $\vec{v}(M')$  ont mêmes composantes normales au plan mais composantes tangentielles opposées.

prop : **En particulier, en tout point appartenant à un plan d'antisymétrie  $P$  de  $\vec{v}$ , le champ  $\vec{v}$  est orthogonal à  $P$ .**

exo : Déterminer les plans de symétrie ou antisymétrie de la distribution de courant : d'un fil infini parcouru par  $\vec{j}$  homogène, d'une plaque infinie parcourue par  $\vec{j}$  homogène, d'une spire circulaire, d'une bobine finie, d'un solénoïde infini. Quels sont ceux passant par un point  $M$  quelconque ?

## 4 Conservation de la charge

prop : La charge totale d'un système fermée est constante.

### 4.1 Bilan 1D cartésien

prop<sup>9</sup> : équation de conservation de la charge (1D cartésien sans source)

$$\boxed{\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

9. CE : Établir l'équation traduisant la conservation de la charge dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Citer et utiliser une généralisation (admise) en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence, son expression étant fournie.

démo 1D cartésien : Cf nombreuses démos chapitres T2-Diffusion de particules (conservation des particules), T3-Diffusion thermique (conservation de l'énergie), MF1-Description d'un fluide en mouvement (conservation de la masse).

Soit une tranche  $\Sigma$  de section  $S$  comprise entre  $x$  et  $x + dx$  d'un système unidimensionnel. Donc de volume  $dV = S.dx$ . Alors pendant  $dt$  :

★ Variation de charge de  $\Sigma$  pendant  $dt$  :  $dq = \rho(t+dt).dV - \rho(t).dV = \partial\rho/\partial t.dt.dV$ .

★ Charge entrant en  $x$  dans  $\Sigma$  pendant  $dt$  :  $\delta q_x = j(x).S.dt$

★ Charge sortant en  $x + dx$  de  $\Sigma$  pendant  $dt$  :  $\delta q_{x+dx} = j(x+dx).S.dt$

★ Bilan de charge dans  $\Sigma$  pendant  $dt$  :  $dq = \delta q_x - \delta q_{x+dx}$ . Donc  $\partial\rho/\partial t.dt.S.dx = (j(x) - j(x+dx)).S.dt = -\partial j/\partial x.dx.S.dt$ .

démo 1D sphérique ou cylindrique : Adapter dans le calcul du flux la section  $S$  qui n'est pas la même en  $r$  et en  $r + dr$ .

## 4.2 Bilan dans le cas général

prop : **équation de conservation de la charge**

$$\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

## 4.3 Rappel : théorème de Green-Ostrogradsky

notation : Une surface est « fermée » si elle délimite un contour  $V$ . On note alors  $I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ .

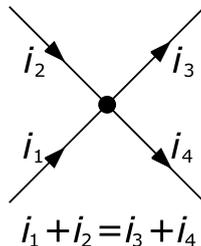
prop : Pour un champ de vecteur  $\vec{j}$  **théorème de (Green)-Ostrogradsky** :

$$\underbrace{\oint_{M \in S} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}}_{I = \text{flux sortant}} = \underbrace{\iiint_{M \in V} \operatorname{div}(\vec{j}(M, t)) \cdot dV}_{-dQ_{\text{int}}/dt}$$

## 4.4 Conséquence en régime permanent : loi des nœuds

prop : **Loi des nœuds**. En régime permanent, le flux sortant de  $\vec{j}$  est nul :

$$\underbrace{\oint_{M \in S} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}}_{\text{flux sortant}} = 0$$



rq : Analogie avec les champs  $\vec{j}_N$ ,  $\vec{j}_Q$ , et  $\vec{j}_m = \mu \vec{v}$  conservatifs aussi en régime stationnaire. Et avec  $\vec{v}$  en écoulement incompressible.

démo : Pour un régime stationnaire :  $\partial\rho/\partial t = 0$ . Alors d'après la conservation de la charge :  $\operatorname{div}(\vec{j}) = 0$ . Puis, par le théorème de Green-Ostrogradsky, le flux sortant est nul :  $I_{\text{sortant}} = \oint_{M \in S} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S} = 0$ . « Ce qui entre = ce qui sort. »

rq : La démonstration de la loi des nœuds est effectuée en régime permanent. Nous verrons chapitre E4 qu'elle reste approximativement valide dans le cas de l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS).

10. CE : Exploiter le caractère conservatif du vecteur  $\vec{j}$  en régime stationnaire. Relier cette propriété à la loi des nœuds de l'électrocinétique.

## 5 Rappel PCSI : force subie par une particule chargée

### 5.1 Force de Lorentz (NL, Nobel 1902)

def : Dans un référentiel donné, la **force de Lorentz**  $\vec{F}$  exercée sur une charge ponctuelle  $q$  de vitesse  $\vec{v}$  par le champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

prop : **Seule la partie électrique de la force de Lorentz travaille**, et peut faire varier la norme de la vitesse, d'après le théorème de la puissance cinétique. La partie magnétique ne travaille pas et donc ne modifie par la norme de  $\vec{v}$ , mais elle peut changer sa direction !

Unité du **champ électrique**  $E$  : **volt par mètre**  $\text{V.m}^{-1}$ ,

★ équivalent à l'unité SI :  $\text{kg.m.s}^{-3}.\text{A}^{-1}$ .

Unité du **champ magnétique**  $B$  : **tesla**  $\text{T}$ ,

★ équivalent à l'unité SI :  $\text{kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}$ , ainsi qu'à  $\text{V.s.m}^{-2}$ .

### 5.2 Potentiel électrique

def : Soit une charge  $q$  au **potentiel électrique**  $V$ , son **énergie potentielle électrique** est  $\mathcal{E}_p = q.V$  (+cte).

Unité du potentiel électrique :  $\text{J/C} = \text{volt V}$ .

rq : on relie ainsi une variation d'énergie potentielle  $\Delta\mathcal{E}_p$  d'une charge  $q$  sous une **différence de potentiel** (d.d.p.)

$U = \Delta V$  par :  $\Delta\mathcal{E}_p = q\Delta V = qU$ .

rq : Un électron ( $q < 0$ ) se dirige vers les basses  $\mathcal{E}_p$  et donc vers les plus grands potentiels (donc vers la borne + d'une alim!).

rq : Définition de l'électronvolt eV : énergie acquise par un électron sous une d.d.p. de 1 V :  $1 \text{ eV} = (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \times (1 \text{ V}) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

### 5.3 Exos-type

exo-type 1 : Soit une charge  $q$  de masse  $m$  dans un un champ électrostatique uniforme  $\vec{E} = E_0\vec{e}_x$ , et de position initiale  $\vec{OM}_0$  et vitesse initiale  $\vec{v}_0$  d'angle  $\alpha$  avec  $\vec{E}$ . Démontrer que  $\vec{OM}(t) = \frac{q}{m}\vec{E}t^2/2 + \vec{v}_0t + \vec{OM}_0$ .

exo-type 2 : Considérons un électron de vitesse initiale négligeable. Exprimer la vitesse  $v$  qu'il peut acquérir à l'aide d'une tension  $U$ . AN avec  $U = 50 \text{ V}$  puis  $5 \text{ kV}$ . Commentaires.

exo-type 3 : Dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur-vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique, déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire ( $R = mv_0/(|q|B)$ ). En déduire la pulsation de rotation ( $\omega = |q|B/m$ ).

### 5.4 Applications du mouvement des charges dans un champ électrique

Un champ électrique permet d'accélérer des électrons et de manipuler leur trajectoire.

• Écrans cathodiques des vieux téléviseurs et oscilloscopes : des électrodes de potentiel contrôlé permettent d'envoyer un électron sur le pixel choisi.

• Microscopie électronique : diriger des électrons à l'aide de « lentilles électriques ».

• Accélérateurs de particule (LHC, etc) : des électrodes permettent d'augmenter la vitesse des particules chargées.

Par ailleurs, des électrons accélérés émettent potentiellement des rayons X utilisables dans différents domaines :

• Médical : des électrons accélérés par  $\vec{E}$  peuvent émettre des rayons X, utiles pour le radiodiagnostic, la radiothérapie.

• Industriel : les rayons X peuvent stériliser des aliments, scanner des bagages.

Finalement, l'application principale du mouvement des charges dans un champ électrique est tout simplement :

• Électronique : conduction du courant électrique par les électrons, ions, trous, etc (cf suite du chapitre).

## 5.5 Applications du mouvement des charges dans un champ magnétique

Le champ magnétique permet de dévier la trajectoire des charges :

- Accélérateurs de particule : permet des accélérateurs circulaires.
- Analyse de molécule : un spectromètre de masse trie des ions selon le rayon de leur trajectoire sous champ magnétique, donc selon  $q/m$ .
- Déviations du vent solaire (plasma d'ions et électrons) par le champ magnétique terrestre vers les pôles (d'où les aurores polaires).
- Effet Hall : permet une mesure du champ magnétique (cf suite du chapitre).
- Forces de Laplace : permet la conversion électro-mécanique (haut-parleurs, moteurs électriques, production d'électricité, etc), (cf *cours PCSI : Induction et Forces de Laplace*).

## 6 Conduction électrique

### 6.1 Loi d'Ohm locale

Les charges électriques libres d'un milieu soumis à un champ électrique  $\vec{E}$  sont mises en mouvement. Expérimentalement, dans un conducteur électrique, on observe que la densité de courant  $\vec{j}$  est proportionnelle à  $\vec{E}$  dans la plupart des situations.

loi phénoménologique : Dans un conducteur électrique, la **loi d'Ohm locale** s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

où  $\sigma > 0$  est la **conductivité électrique** du matériau. Souvent notée  $\gamma$ .

Unité :  $A \cdot V^{-1} \cdot m^{-1} = \Omega^{-1} \cdot m^{-1} = S \cdot m^{-1}$  avec  $S = \Omega^{-1}$ .

def : Un matériau dans lequel la loi d'Ohm locale est validée est dit « **conducteur ohmique** ». C'est le cas des métaux pour des signaux électriques usuels.

rq : Nous verrons chapitre *PO2-Dispersion et absorption des ondes* que la conductivité  $\sigma$  n'est pas toujours un réel positif mais peut être un nombre complexe dans le cas de la propagation d'une onde progressive dans un plasma!

def : **Résistivité**  $r = 1/\sigma$  d'unité  $\Omega \cdot m$ .

Matériau	cuivre	graphite, dans un feuillet	graphite, entre deux feuillets	eau de mer	eau potable	bois
$\sigma$ (S/m)	$6 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^2$	5	$10^{-3}$	$10^{-15}$

rq : Peu de grandeurs physiques varient sur autant d'ordres de grandeur d'un matériau à un autre!

### 6.2 Modèle phénoménologique de la conduction

L'objectif est de relier la conductivité<sup>11</sup>  $\sigma$  aux caractéristiques du conducteur ohmique.

Modèle de Drüde : Étude du mouvement d'un électron (charge  $q = -e$ , masse  $m$ ) dans un fil soumis à un champ électrostatique homogène  $\vec{E} = E\vec{e}_x$ . L'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau cristallin est modélisée par une force de frottement fluide linéaire en vitesse : force phénoménologique  $\vec{F}_f = -\alpha \cdot \vec{v}$ .

exo de cours : En appliquant le PFD à l'électron, montrer que l'équation du mouvement est  $d\vec{v}/dt + \frac{1}{\tau} \cdot \vec{v} = -e\vec{E}/m$ . En déduire la vitesse de l'électron en régime permanent  $\vec{v}_\infty = -e\tau\vec{E}/m$ . Puis en déduire la loi d'Ohm locale avec la conductivité  $\sigma_0$  en régime permanent :

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (1)$$

interprétation : Le courant est d'autant plus fort que  $n$  grand (beaucoup de charges),  $\tau$  grand (force de dissipation faible), et  $m$  petite (plus facile à déplacer).

11. CE : Établir l'expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique, l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau étant décrite par une force de frottement fluide linéaire.

### 6.3 Influence de la fréquence

Gamme de validité de la loi d'Ohm locale : Pour les signaux électriques usuels dans les métaux, le régime transitoire est de durée négligeable. **Ainsi, la loi d'Ohm s'applique bien aux signaux électriques usuels.**<sup>12</sup>

exo de cours : Considérons le cuivre de conductivité  $\sigma \simeq 10^8$  S/m et de densité d'électrons  $n = 10^{29}$  m<sup>-3</sup>. Pour un électron,  $m = 9.10^{-31}$  kg. À partir de la formule de conductivité du modèle de Drüde, en déduire l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire  $\tau \simeq 10^{-14}$  s. En déduire que cette durée est négligeable pour les circuits électriques usuels.

prop : En régime sinusoïdal permanent, il faut prendre en compte la partie imaginaire de la conductivité  $\underline{\sigma}$  si la fréquence n'est pas négligeable devant  $1/\tau = 10^{14}$  Hz (par exemple fréquence dans le visible, cf chapitre PO2) :

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau} \quad (2)$$

### 6.4 Résistance d'un conducteur filiforme

prop : Soit un conducteur ohmique filiforme de conductivité  $\sigma$ , longueur  $L$  dans le sens du courant  $I$ , section  $S$ . Il est soumis à une différence de potentiel  $U = V_1 - V_2$ . Alors sa résistance électrique<sup>13</sup>  $R$  est :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{L}{\sigma \cdot S} \quad (3)$$

démo : On admet ici (cf chapitre suivant) le lien entre champ électrique statique et potentiel électrique  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$  et on suppose  $\vec{E}$  uniforme selon  $\vec{u}_x$  selon l'axe du cylindre. En utilisant la loi d'Ohm locale, en déduire  $R$ .

rq : Analogie avec résistance thermique  $R_{th} = L/(\lambda \cdot S)$

exo dans une autre géométrie : Considérons une gaine cylindrique métallique solide de longueur  $L$ , rayon intérieur  $R_1$  et rayon extérieur  $R_2$ , de conductivité électrique  $\sigma$ . Elle est soumise à un potentiel  $V_1$  sur la face intérieure, et  $V_2$  à l'extérieur, le courant va donc circuler radialement et non le long de l'axe du cylindre. On admet qu'ici  $\Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$  et  $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r$  (cf chapitre suivant). Démontrer que la résistance électrique encore définie de manière générale par  $R = \frac{V_1 - V_2}{I}$  vaut ici  $R = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\sigma L}$ .

### 6.5 Effet thermique : loi de Joule locale

prop : **Loi de Joule locale.** Pour un conducteur ohmique :

$$P_V = \sigma E^2 = j^2 / \sigma > 0$$

14

où  $P_V$  est aussi bien :

- ★ la puissance volumique transmise par le champ aux charges mobiles,
- ★ la puissance volumique transmise par les charges mobiles au réseau cristallin fixe.

rq : C'est un cas particulier de la formule générale  $\mathcal{P}_V = \vec{j} \cdot \vec{E}$ , cf chapitre E4.

démo : Montrer que la puissance transmise par le champ à une particule est  $P_{E \rightarrow q} = e^2 \tau E^2 / m = \sigma E^2 / n > 0$ . En déduire la puissance transmise par le champ à volume  $dV$  :  $dP = \sigma E^2 \cdot dV$ .

exo : En déduire que la puissance dissipée totale vaut  $P_J = U^2 / R = RI^2$ .

## 7 Approche descriptive de l'effet Hall

### 7.1 Effet Hall

12. CE : Discuter de l'influence de la fréquence sur la conductivité électrique.

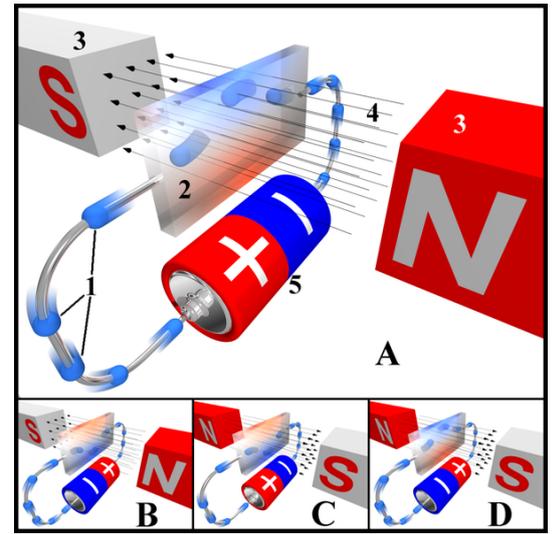
13. CE : Établir l'expression de la résistance d'une portion de conducteur filiforme.

14. CE : Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.

• observations expérimentales : Considérons un conducteur ohmique parcouru par une intensité  $I \neq 0$ . On observe qu'il apparaît une tension transverse  $V_H$  si le système est soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$  orthogonal au sens du courant. De plus, on a  $V_H \propto B$ .

Le signe de  $V_H$  dépend du signe de  $I$  et du sens de  $\vec{B}$ .

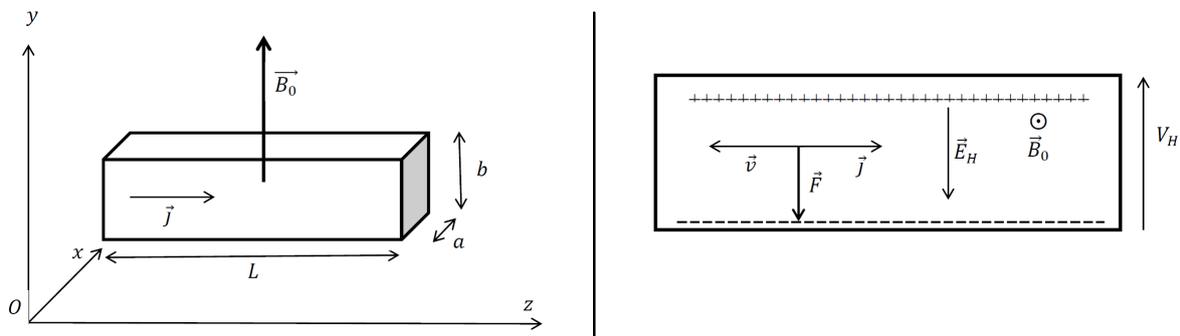
• application : Sonde à effet Hall : mesure de  $\vec{B}_0$  (valeur et sens) par mesure de  $V_H$ .



### 7.2 Interprétation

La partie magnétique de la force de Lorentz dévie les charges mobiles d'un côté du conducteur, ce qui crée une tension transverse<sup>15</sup>. Cf vidéo [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/77/Hall\\_Sensor.webm](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/77/Hall_Sensor.webm).

Considérons un matériau contenant un seul type de charge  $q$  de densité volumique  $n$  décrit par les schémas suivants :



\* La densité de courant  $\vec{j} = nq\vec{v}$ . Si les charges sont des électrons, alors  $\vec{j} = -ne\vec{v}$  donc  $\vec{v}$  opposé à  $\vec{j}$ . Si les charges sont des trous de charge  $q > 0$ , alors  $\vec{v}$  est dans le sens de  $\vec{j}$ .

exo de cours : Déterminer sans calcul de quel côté sont accumulés les électrons de conduction. Même question pour un trou de charge  $q > 0$ . Déterminer que la force de Lorentz magnétique subie par une charge est  $\vec{F}_B = -qvB\vec{e}_x$ .

\* Ainsi, apparition d'une différence de potentiel transverse  $V_H$  (ici  $> 0$ ) et d'un champ  $\vec{E}_H$

### 7.3 Expression de la tension de Hall $V_H$

exo de cours : En régime permanent, on suppose que les charges mobiles ont une trajectoire rectiligne uniforme et donc que la résultante des forces subies est nulle. On note  $\vec{E}_H$  le champ électrique produit par la déviation des charges. On admet  $\vec{E}_H = -\text{grad}(V) = -V_H/a.\vec{e}_x$ . En déduire que la tension de Hall est :

$$V_H = -vB_0a = -\frac{IB}{nqb} \tag{4}$$

prop : \*  $V_H$  est bien proportionnel à  $I$  et  $B$ .

\* À  $I$  donnée,  $V_H$  est d'autant plus grande que  $b$  petit. C'est pourquoi les sondes à effet Hall contiennent une plaque conductrice de faible épaisseur.

\* À  $I$  donnée,  $V_H$  est d'autant plus grande que  $n$  petit. C'est pourquoi les sondes à effet Hall contiennent une plaque semiconductrice plutôt que métallique. La densité de charge mobile est en effet plus faible dans les semiconducteurs que dans les métaux.

15. CE : Interpréter qualitativement l'effet Hall dans une géométrie parallélépipédique.