E1 : Sources du champ électromagnétique - Correction

2.1 Définition de la densité volumique de charge

ODG : *Déterminer l'ordre de grandeur de la densité volumique de charge d'un neutron, d'un proton, d'un électron, d'un atome, d'un fil électrique.*

Pour un neutron, $\rho_n = 0$. Pour un proton de charge $q = +e$ répartie sur un domaine de l'ordre de $r_n \simeq 10^{-15}$ m, en ODG, $\rho_p = \frac{e}{r_n^3}$. Pour un électron de charge $q = -e$ répartie sur un domaine de l'ordre de $a_0 \simeq 10^{-10}$ m, en ODG, $\rho_e = -\frac{e}{a_0^3}$. Comme un atome ou un fil contient autant de charges positives que négatives, leurs densité de charge sont nulles.

ODG : *Déterminer l'ordre de grandeur de la densité surfacique de charge d'un condensateur de capacité C, surface S, distance e entre plaques, soumis à une tension U. On rappelle $q = CU$, et on donne $C = \varepsilon_0 S/e$ (cf démo chapitre E2 : Électrostatique) et $\varepsilon_0 \simeq 8,85.10^{-12}$ F.m^{-1}.*

$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{CU}{S} = \frac{\varepsilon_0 U}{S}$.

2.2 Lien entre charge totale et densité volumique de charge

exo : *Pour un parallélépipède de longueurs a, b et c, démontrer que $V = abc$.*

Vu la géométrie, on choisit un repère cartésien dont l'origine est placée à un coin. Alors :

$$V = \iiint_{M\in V} dV = \int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b}\int_{z=0}^{z=c} dxdydz = \underbrace{\int_{x=0}^{x=a} dx}_{=a} \cdot \underbrace{\int_{y=0}^{y=b} dy}_{=b} \cdot \underbrace{\int_{z=0}^{z=c} dz}_{=c} = abc$$

exo : *Pour un cylindre de rayon R et hauteur h, démontrer que $V = \pi R^2 h$.*

Vu la géométrie, on choisit un repère cylindrique dont l'axe z coïncide avec l'axe du cylindre et d'origine au centre d'une base. Alors :

$$V = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{z=0}^{z=h} dr\cdot rd\theta\cdot dz = \underbrace{\int_{r=0}^{r=R} rdr}_{=R^2/2} \cdot \underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_{z=0}^{z=h} dz}_{=h} = \pi R^2 h$$

exo : *Pour une boule de rayon R, démontrer que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.* Vu la géométrie, on choisit un repère sphérique d'origine au centre de la boule. Alors :

$$V = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr\cdot rd\theta\cdot r\sin(\theta)d\varphi = \underbrace{\int_{r=0}^{r=R} r^2dr}_{=R^3/3} \cdot \underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin(\theta)d\theta}_{=[-\cos(\theta)]_0^\pi=2} \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi}_{=2\pi}$$

exo : *Soit une boule de rayon R de densité de charge ρ_0 homogène. Calculer Q_{int} contenue dans une boule de rayon $a < R$, et dans une boule de rayon $a > R$.* ⋆ cas $a < R$: dans ce cas, ρ est homogène et vaut ρ_0.

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{M\in V}\rho(M)dV = \rho_0\int_{r=0}^{r=a}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dV = \rho_0\frac{4}{3}\pi a^3$$

⋆ cas $a > R$: dans ce cas, ρ est nul au delà de $r = R$ donc on peut se restreindre à l'intégrale sur la boule de rayon R.

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{M\in V}\rho(M)dV = \rho_0\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dV = \rho_0\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$

exo : *Même question pour une densité de charge non uniforme $\rho(r) = \alpha r$.*

⋆ cas $a < R$: dans ce cas, $\rho = \alpha r$.

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{M\in V}\rho(M)dV = \int_{r=0}^{r=a}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \alpha r\times dr\cdot rd\theta\cdot r\sin(\theta)d\varphi$$
$$= \alpha\underbrace{\int_{r=0}^{r=a} r^3dr}_{=a^4/4}\cdot\underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin(\theta)d\theta}_{=[-\cos(\theta)]_0^\pi=2}\cdot\underbrace{\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = \alpha a^4\pi$$

variante plus simple : pour intégrer une fonction ne dépendant que de r, on peut directement intégrer sur des calottes sphériques de volume $dV = 4\pi r^2 dr$:

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{M\in V}\rho(M)dV = \alpha\int_{r=0}^{r=a} r\times 4\pi r^2dr = \alpha a^4\pi$$

⋆ cas $a > R$: dans ce cas, ρ est nul au delà de $r = R$ donc on peut se restreindre à l'intégrale sur la boule de rayon R.

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{M\in V}\rho(M)dV = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \alpha r\times dr\cdot rd\theta\cdot r\sin(\theta)d\varphi$$
$$= \underbrace{\int_{r=0}^{r=R} r^3dr}_{=R^4/4}\cdot\underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin(\theta)d\theta}_{=[-\cos(\theta)]_0^\pi=2}\cdot\underbrace{\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = \alpha R^4\pi$$