TDE2 : Électrostatique

Savoirs

• Force électrostatique. Champ électrostatique et potentiel électrique. Lignes de champ et surfaces équipotentielles.
• Propriétés d'invariance et symétrie du champ électrique.
• Circulation conservative du champ électrostatique. Opérateur rotationnel. Théorème de Stokes.
• Flux du champ électrique. Opérateur divergence. Théorème d'Ostrogradsky. Théorème de Gauss, équation de Maxwell-Gauss.
• Condensateur plan infini. Capacité. Densité volumique d'énergie électrostatique.
• Noyau atomique modélisé par une boule uniformément chargée : énergie de constitution de la distribution.
• Analogies formelles entre champ électrostatique et champ gravitationnel.
• Dipôle électrostatique. Moment dipolaire $\overrightarrow{p}$. Potentiel et champ créés dans l'approximation dipolaire.
• Actions subies par un dipôle rigide placé dans un champ électrostatique d'origine extérieure : résultante, moment et énergie potentielle.
• Approche descriptive des interactions ion-molécule et molécule-molécule. Dipôle induit. Polarisabilité.

Savoir-faire

• Utiliser les relations entre $\overrightarrow{E}$ et V *Exos 2, 4*. Utiliser le théorème de superposition. *Exos 3.2 (thm de Gauss) et 7 (calcul direct).*
• Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ électrostatique ; repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme de E à l'évasement des tubes de champ loin des sources. Déduire les lignes équipotentielles d'une carte de champ électrostatique, et réciproquement. *Exos 1.1, 1.2, 1.3.*
• Utiliser les relations locales $\mathrm{div}(\overrightarrow{E}) = \rho/\varepsilon_0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0}$. *Exos 2.2, 2.3.*
• Exploiter les propriétés de symétrie des sources pour prévoir des propriétés du champ créé. *Exos 1.3, 3.1, 2.1, 3, 4, 5, 7.*
• Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss. *Exos 3.1, 2.1, 3, 4, 5.*
• Condensateur : Établir l'expression du champ créé. Déterminer la capacité du condensateur. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur. *Exos 4 et 8.*
• Noyau atomique : Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini. *Exos 5.*
• Utiliser les analogies entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour déterminer l'expression de champs gravitationnels. *Exos 3.3.*
• Démo de cours : calcul de l'expression de V et $\overrightarrow{E}$ d'un dipôle électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire. Décrire les conditions de l'approximation dipolaire. *Cf cours.*
• Comparer la décroissance avec la distance du champ et du potentiel dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ. *Cf cours.*
• Utiliser les expressions fournies de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ (*exos 8*), de la résultante $\overrightarrow{F}$ (*exo 9*) et du moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ (*exo 8*).
• Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle dans un champ d'origine extérieure. *Exos 8 et 9.*
• Expliquer qualitativement la solvatation des ions dans un solvant polaire. *Cf cours.*
• Exprimer la polarisabilité d'un atome en utilisant le modèle de Thomson. Associer la polarisabilité et le volume de l'atome en ordre de grandeur. *Exo 6.*

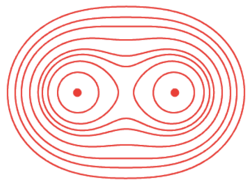
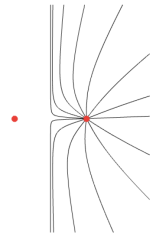
Interro de cours

1. Soit une charge ponctuelle q en O, centre d'un repère sphérique. Donner le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé à distance r et le potentiel. Tracer les lignes de champ et équipotentielles.
2. Donner l'unité du champ électrique. Citer quelques ODG.
3. Donner la relation entre le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ et le potentiel V. Que dire de la circulation sur $\mathcal{C}$ fermé et de la valeur du $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ dans ce cas ?
4. Que vaut la circulation du champ électrostatique entre deux points A et B ?

5. Donner le théorème de Gauss et l'équation de Maxwell-Gauss.
6. Donner le théorème de Gauss pour la gravitation.
7. Donner la capacité d'un condensateur plan en fonction de ε_0 et de ses mensurations.
8. Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique.
9. Soit un dipôle électrostatique constitué d'une charge $q > 0$ au point A et d'une charge $-q$ au point B. Exprimer son moment dipolaire $\overrightarrow{p}$.
10. Tracer l'allure des lignes de champ et des équipotentielles dans l'approximation dipolaire.
11. Qualitativement, qu'arrive-t-il à un dipôle rigide $\overrightarrow{p}$ dans un champ extérieur $\overrightarrow{E}$?

1 Topographie du champ électrostatique

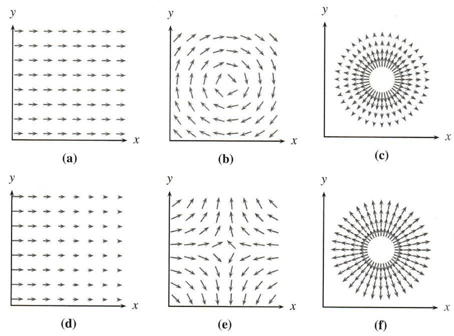
1.1 Un système à déterminer

Considérons une distribution de charges dont les lignes de champ et les surfaces équipotentielles sont partiellement indiquées sur les deux figures suivantes.

1. Repérer, en justifiant, quelles lignes correspondent aux lignes de champ et quelles lignes correspondent aux équipotentielles.
2. Repérer les sources des champ, préciser si elles sont de même signe ou de signe opposé.
3. On considère qu'au moins une des deux sources porte une charge positive. Indiquer le sens de $\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ sur la carte des équipotentielles. Orienter les lignes de champ sur la figure associée.

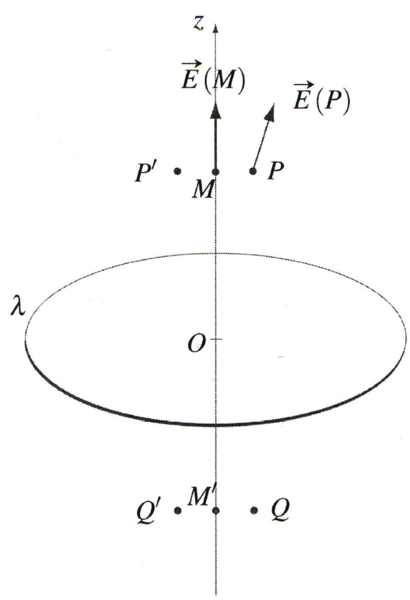
1.2 Possibilité d'un champ électrostatique



Les figures suivantes représentent, dans le plan (O, x, y), quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme : $\overrightarrow{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\overrightarrow{u}_x + E_y(x, y, z)\overrightarrow{u}_y$.

Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ électrostatique. Si oui, indiquer si des charges sont présentes dans la région représentée et préciser leur signe.

1.3 Symétrie du champ électrostatique



On considère un cerceau d'axe Oz portant la charge q uniformément répartie. On a déjà tracé le champ électrostatique en M et en P.

1. Justifier que la direction de $\overrightarrow{E}(M)$ est bien suivant $\pm\overrightarrow{e_z}$. À partir de la lecture de son sens sur le schéma, en déduire le signe de q.
2. Justifier à quel plan appartient $\overrightarrow{E}(P)$.
3. Représenter le champ en M', Q et Q'.
4. Que dire du champ en O ?
5. Dans un plan contenant Oz, tracer l'allure des lignes de champ, ainsi que quelques surfaces équipotentielles.

2 Plusieurs manières de calculer un champ et un potentiel

Considérons une distribution de charges à symétrie plane, infinie dans les directions (Oy) et (Oz) définie par la densité volumique de charges, avec $a > 0$:

$$\begin{cases} \rho(x) = 0 & \text{pour} \quad x < -a \\ \rho(x) = \rho_0 & \text{pour} \quad -a < x < a \\ \rho(x) = 0 & \text{pour} \quad a < x \end{cases}$$

question préliminaire : À l'aide des invariances et symétrie, déterminer que $\overrightarrow{E}(M) = E(x)\overrightarrow{e_x}$ avec $E(x)$ impaire, et que $V(M) = V(x)$ avec $V(x)$ paire.

2.1 Par le théorème de Gauss

1. Rappeler le théorème de Gauss. Quelle surface de Gauss choisir pour le système étudié ici ?
2. Déterminer $\overrightarrow{E}(M)$ dans tout l'espace à l'aide du théorème de Gauss.
3. Comment sont reliés le potentiel V et le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$? En déduire le potentiel $V(x)$ dans tout l'espace en fonction de constantes d'intégrations.
4. En utilisant la parité de $V(x)$ et sa continuité, déterminer $V(x)$ à une seule constante près.

2.2 Par équation de Maxwell-Gauss

5. Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss. Que devient-elle pour cette géométrie dans les trois domaines de x ?
6. En déduire l'expression de $\overrightarrow{E}(M)$ dans les trois domaines en fonction de constantes d'intégrations.
7. Déterminer les constantes d'intégrations en utilisant : la valeur du champ en $x = 0$ ainsi que la continuité du champ dans une répartition volumique de charge.
8. Comment sont reliés le potentiel V et le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$? En déduire le potentiel $V(x)$ dans tout l'espace en fonction de constantes d'intégrations.
9. En utilisant la parité de $V(x)$ et sa continuité, déterminer $V(x)$ à une seule constante près.

2.3 Par équation de Poisson

10. Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss ainsi que la relation entre le champ électrostatique et le potentiel. En déduire l'équation de Poisson $\Delta V + \rho/\varepsilon_0 = 0$.
11. En déduire l'expression de $V(x)$ dans les trois domaines en fonction de constantes d'intégrations.
12. En déduire l'expression du champ dans les trois domaines.

3 Applications du théorème de Gauss

3.1 Boule non uniforme

Déterminer le champ créé par une boule de rayon R de densité de charge $\rho(r) = \rho_0(1 - r^2/R^2)$.

3.2 Champ dans une cavité cylindrique

Considérons un cylindre infini d'axe Oz de densité volumique de charge ρ uniforme. On creuse dans ce cylindre une cavité cylindrique infinie vide, d'axe $O'z$ parallèle à Oz mais non confondus.

1. Version non guidée : Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité.
2. Version guidée :
   (a) À partir du théorème de superposition, décrire le système à l'aide de deux cylindres homogène de densités de charge opposées.
   (b) À l'aide du théorème de Gauss, exprimer le champ créé à l'intérieur d'un cylindre infini seul. Remarquer que $r\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe.
   (c) En déduire finalement que le champ dans la cavité vaut $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}$.

3.3 Astre à géométrie sphérique

Un astre de rayon extérieur R est constitué d'un noyau homogène de masse volumique ρ_n de rayon $R_n < R$ entouré d'un manteau homogène de masse volumique ρ_m dans la partie $R_n < r < R$. On note m la masse totale de l'astre, et m_n la masse du noyau.

1. Exprimer m_n et m en fonction de R_n, R, ρ_n et ρ_m.
2. À partir des symétries et invariances de la distribution de masses, déterminer que le champ gravitationnel vaut $\overrightarrow{G}(M) = G(r)\overrightarrow{e_r}$.
3. En déduire le champ dans tout l'espace à l'aide du théorème de Gauss pour la gravitation.
4. Tracer l'allure de $G(r)$.

4 Condensateur plan et sphérique

1. Calculer la capacité d'un condensateur plan dont les armatures de surface S sont séparées d'une distance e.
2. Calculer la capacité d'un condensateur sphérique de rayon intérieur R_1 chargé Q et de rayon extérieur R_2 chargé $-Q$. Que retrouve-t-on dans la limite où $e = R_2 - R_1$ devient très faible devant R_1 ?

5 Énergie de constitution d'un noyau atomique

On modélise le noyau comme une boule de rayon R chargée uniformément de densité volumique de charge ρ. On note la charge totale $Q = \rho.4\pi R^3/3$.

1. À l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique créé par la sphère. En déduire le potentiel électrique dans tout l'espace. Commenter l'expression du champ en dehors de la boule.
2. Définir l'énergie électrostatique de constitution d'un noyau atomique. Justifier son signe.
3. Par analyse dimensionnelle, déterminer l'énergie $\mathcal{E}$ nécessaire pour former un noyau de charge Q de rayon R. en déduire un ordre de grandeur.
4. Exprimer $\mathcal{E}$ par ajout progressif de charges provenant de l'infini.

6 Modèle de Thomson de la polarisabilité

Le modèle atomique de Thomson (dit aussi modèle de *plum pudding*) fut proposé par J.J. Thomson, qui découvrit l'électron en 1898. Il fut proposé en 1904 avant la découverte du noyau atomique. Dans ce modèle, l'atome est composé d'électrons (que J.J. Thomson continuait à appeler « corpuscules », bien que George Stoney eut proposé la dénomination d'électrons en 1894), plongés dans une « soupe » de charge positive pour équilibrer la charge négative des électrons. Les électrons (comme nous les connaissons aujourd'hui) étaient considérés comme dispersés au sein de l'atome. On applique ce modèle au cas de l'atome d'hydrogène en prenant un rayon $a = 25$ pm.

1. En précisant la méthode, déterminer l'expression de la force exercée par le noyau sur un électron se trouvant à une distance r du centre de l'atome.
2. Quelle est alors la position d'équilibre pour l'électron ?
3. Cet atome est placé dans une zone de champ extérieur $\overrightarrow{E_0} = E_0\overrightarrow{e_x}$. Déterminer la nouvelle position d'équilibre pour l'électron.
4. Montrer qu'on peut associer à l'atome un moment dipolaire induit $\overrightarrow{p_{\text{ind}}}$ qu'on exprimera en fonction de a.
5. En déduire la polarisabilité de l'atome α telle que $\overrightarrow{p_{\text{ind}}} = \alpha\varepsilon_0\overrightarrow{E_0}$. Relier cette polarisabilité au volume de l'atome.
6. Comment est modélisé l'électron désormais ?

7 Positions d'équilibre

Une charge $Q > 0$ est uniformément répartie sur un cercle de rayon a, d'axe (Oz) vertical ascendant et de centre O. On note λ la densité linéique de charge associée.

1. Montrer que le champ électrostatique est de la forme $\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,z)\overrightarrow{u_r} + E_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$. Que peut-on ajouter lorsque le point M se trouve sur l'axe (Oz) ?
2. Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en un point M de l'axe (Oz) et tracer le graphe de $E_z(z)$. On donne le graphe de la fonction $f : u \mapsto u/(u^2+1)^{3/2}$ (figure 12.16).

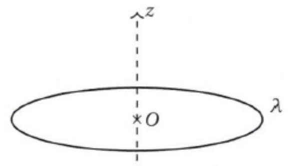


Figure 12.15. Cercle d'axe (Oz) uniformément chargé.

3. Une particule de masse m et de charge $q > 0$ est astreinte à se déplacer sur l'axe (Oz). Déterminer ses positions d'équilibre éventuelles. On posera :

$$k = mg\frac{4\pi\varepsilon_0 a^2}{qQ}.$$

4. La particule est écartée de sa position d'équilibre et abandonnée sans vitesse initiale. Déterminer la nature et les caractéristiques de son mouvement. Conclure sur la stabilité des positions d'équilibre.

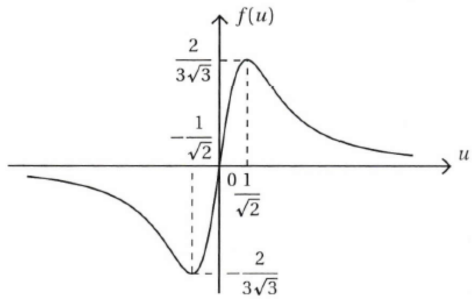


Figure 12.16. Graphe de la fonction $f : u \mapsto u/(u^2+1)^{3/2}$.

8 Dipôle dans un condensateur

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques très fines, de surface S, situées en $x = 0$ et en $x = e$. L'isolant entre les deux armatures a une permittivité ϵ_0. On néglige les effets de bord. Les densités surfaciques de charges portées par les deux armatures sont uniformes et opposées.
Pour un dipôle rigide $\overrightarrow{p}$ placé dans un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}$, l'énergie potentielle est $\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{p}.\overrightarrow{E}$ et le couple subi par ce dipôle est $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}$.

1. Déterminer le champ électrostatique à l'intérieur du condensateur en utilisant le champ créé par un plan infini.
2. On place à l'intérieur du condensateur un dipôle électrostatique de moment d'inertie J en un point O d'abscisse $x = e/2$. Il peut tourner autour de l'axe Oz mais pas se déplacer. Déterminer par deux méthodes les positions d'équilibre.
3. Étudier par deux méthodes la stabilité de l'équilibre.
4. Établir par deux méthodes l'équation différentielle en θ liée à la rotation du dipôle autour de l'axe Oz. Déterminer la période des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

9 Forces entre une charge et un dipôle

Un charge ponctuelle q est en O. Un dipôle $\overrightarrow{p}$ est en M à une distance r de O. La force subie par un dipôle $\overrightarrow{p}$ dans un champ extérieur $\overrightarrow{E}$ est $\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{E}$. En coordonnées cartésiennes, on donne $\left(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{\text{grad}}\right) = p_x\dfrac{\partial}{\partial x} + p_y\dfrac{\partial}{\partial y} + p_z\dfrac{\partial}{\partial z}$ à appliquer à chaque composante de $\overrightarrow{E}$ pour obtenir $\overrightarrow{F}$.

1. Si le dipôle est libre de tourner sur lui-même, comment s'oriente-t-il par rapport à la charge ?
2. On suppose désormais que le dipôle s'est orienté dans la position stable de la question précédente. Pour simplifier, on orientera l'axe Ox selon cette direction. Démontrer que la force subie par le dipôle dans le champ de la charge vaut $\overrightarrow{F}_{c\to d} = -\dfrac{2pq}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\overrightarrow{e_x}$. Commenter sa direction.
3. Le dipôle $\overrightarrow{p}$ placé en M créé en O le champ électrique :

$$\overrightarrow{E_d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\left(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{MO}\right)\overrightarrow{MO} - OM^2\overrightarrow{p}}{OM^5}$$

   En déduire l'expression de la force $\overrightarrow{F}_{d\to c}$ du dipôle sur la charge. Commenter sa direction.
4. Comparer ces deux forces et conclure.