

## TDE3 : Magnétostatique

### Savoirs

- Équations locales de la magnétostatique et formes intégrales : flux conservatif et théorème d'Ampère et Maxwell-Ampère statique.
- Propriétés de symétrie. Propriétés topographiques.
- Câble rectiligne infini, solénoïde long sans effet de bord. Inductance propre. Densité volumique d'énergie magnétique.
- Moment magnétique d'une boucle de courant plane. Rapport gyromagnétique de l'électron. Magnéton de Bohr.
- Actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure : résultante et moment. Énergie potentielle pour un dipôle rigide. Expérience de Stern et Gerlach.

### Savoir-faire

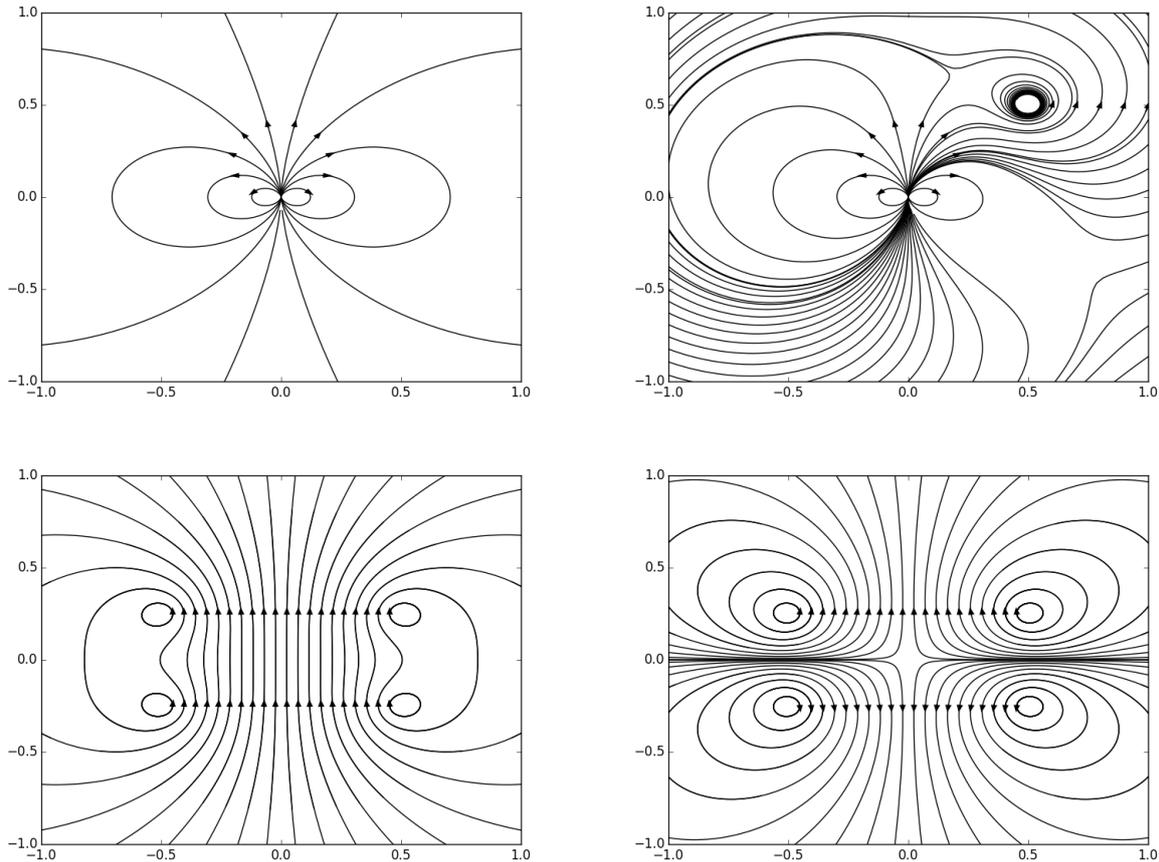
- Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre. *Exos 9.*
- Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère. Exploiter les propriétés de symétrie/invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé. *Exos 2, 3, 4, 5.*
- Utiliser une méthode de superposition. *Exos 1, 5, 6, 7, 8.*
- Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ magnétostatique. Repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe/sens. Associer l'évolution de  $\|\vec{B}\|$  à l'évasement des tubes de champ. *Exos 1.*
- Déterminer le champ créé par un câble rectiligne infini. Établir et citer l'expression du champ à l'intérieur d'un solénoïde long, la nullité du champ extérieur étant admise. Établir les expressions de l'inductance propre et de l'énergie d'une bobine modélisée par un solénoïde long. Associer cette énergie à une densité d'énergie volumique. *Cf cours et exo 2.*
- Relier le moment magnétique d'un atome d'hydrogène à son moment cinétique. *Cf cours.*
- Construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent. *Cf cours.*
- Pour un dipôle magnétique  $\vec{M}$ , utiliser des expressions fournies de l'énergie potentielle, de la résultante et du moment. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. Décrire l'expérience de Stern et Gerlach et expliquer ses enjeux. *Exo 9.*

### Interro de cours

1. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.
2. Donner le théorème d'Ampère et l'équation de Maxwell-Ampère statique.
3. Que vaut le flux du champ magnétique à travers une surface fermée ? Avec quel champ d'un autre domaine de la physique peut-on effectuer une analogie ?
4. Comment  $\vec{B}$  est-il orienté par rapport à un plan de symétrie de la distribution de courant ?
5. Donner le champ dans un solénoïde infini de densité linéique de spire  $n$ .
6. Donner l'énergie volumique due au champ magnétique.
7. Définir le moment dipolaire magnétique  $\vec{M}$  d'une spire de courant à l'aide d'une formule et d'un schéma définissant les grandeurs utiles.
8. Qualitativement, qu'arrive-t-il à un dipôle magnétique rigide dans un champ magnétique ?
9. Décrire l'expérience de Stern et Gerlach et expliquer ses enjeux.

## 1 Spectres de champ magnétique

À l'aide de vos connaissances sur les cartes de champ magnétique, dire quels dispositifs sont à l'origine des cartes suivantes (fil ou dipôle magnétique). On précisera notamment la direction des moments magnétiques ou des courants. Ces figures ont été simulées à partir d'un script Python. Quel peut-être l'intérêt des deux dernières configurations dites respectivement *Helmholtz* et *anti-Helmoltz* ?



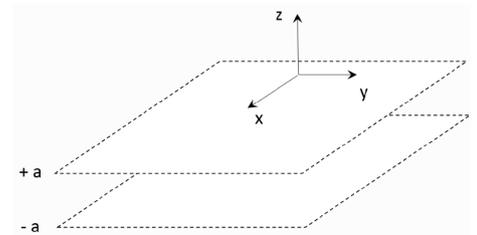
## 2 Solénoïde du CERN

Un solénoïde circulaire est constituée de  $N$  spires ( $N \gg 1$ ) de même rayon  $R$ , de même axe ( $Oz$ ), réparties régulièrement le long du cylindre de longueur  $\ell$  et de même intensité  $I$ . On définit  $n$  le nombre de spires par mètre. On étudie le modèle limite d'un solénoïde infini, c'est-à-dire qu'on néglige les effets de bord. On admet que le champ magnétostatique est nul à l'extérieur du solénoïde. *Données du solénoïde du CERN* : longueur = 13 m, diamètre = 6 m,  $I = 19500$  A,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup>,  $N = 2120$ .

1. Déterminer en tout point de l'espace le champ magnétostatique créé par le solénoïde infini en fonction de  $\mu_0$ ,  $n$  et  $I$ .
2. Calculer le champ magnétique produit par un solénoïde du LHC pour rechercher le boson de Higgs<sup>1</sup>. Pourquoi la température du solénoïde est-elle égale à  $-267^\circ\text{C}$  ?

## 3 Champ créé par une sonde à effet Hall

Une sonde à effet Hall sert à mesurer le champ magnétique extérieur... mais produit elle-même un champ car parcourue par un courant ! Dans quelle mesure ce champ est-il négligeable ? On cherche alors à calculer le champ créé par la plaque conductrice d'une sonde à effet Hall modélisée par une plaque infinie. Un courant de densité volumique  $\vec{j}$  circule entre deux plans infinis dans les directions  $x$  et  $y$ . On a  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_x$  uniforme si  $z \in [-a; a]$ . En dehors de cet intervalle  $\vec{j} = \vec{0}$ . Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'espace. AN du champ à l'extérieur d'un exemple de sonde Au :  $I_{\text{max}} = 200$  mA, épaisseur  $2a = 0,14$   $\mu\text{m}$ , largeur  $\ell = 12$  mm.



1. Cf vidéo de vulgarisation du LHC par Science Étonnante <https://youtu.be/mFilSnstW8U>.

## 4 Câble coaxial en régime permanent

On cherche à préciser les propriétés d'un câble coaxial en régime permanent, et notamment de préciser un de ses avantages par rapport à un fil simple. Le câble coaxial rectiligne de longueur  $H$  est composé :

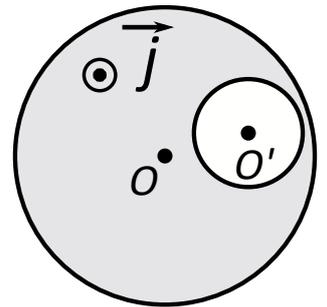
- d'une âme centrale cylindrique de rayon  $a$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$  uniformément répartie sur l'enveloppe cylindrique,
- d'un cylindre de rayon  $b$  parcouru par un courant en sens opposé, de même intensité  $I$ , uniformément répartie sur l'enveloppe cylindrique.

1. Dans la limite du modèle du câble infini, déterminer l'expression du champ créé en tout point  $r < a$ , en  $a < r < b$ , et en  $r > b$ . Remarquez un avantage d'un tel câble par rapport à un fil simple.
2. Déterminer l'expression de l'énergie emmagasinée par une longueur  $\ell$  de ce câble.
3. En déduire son inductance  $L$ , puis son inductance linéique  $\Lambda$ .

## 5 Superposition astucieuse

Soit un câble cylindrique infini ( $\mathcal{C}$ ) d'axe  $Oz$  et de rayon  $a$  parcouru par une densité de courant  $\vec{j} = j\vec{u}_z$  uniforme.

1. Déterminer le champ magnétostatique créé dans le câble pour  $r < a$ . Vérifier qu'il peut s'écrire  $\vec{B} = (1/2)\mu_0 \vec{j} \wedge \vec{OM}$ .
2. On creuse dans ( $\mathcal{C}$ ) une cavité cylindrique ( $\mathcal{C}'$ ) infinie d'axe  $O'z$  et de rayon  $a'$  avec  $O' \neq O$ . Déterminer le champ magnétostatique créé dans la cavité et vérifier qu'il est uniforme.



## 6 Magnétohydrostatique (\*\*)

Certains fluides sont conducteurs électriques<sup>2</sup> et subissent donc aussi les effets de la force de Laplace (résultante des forces de Lorentz microscopiques). Considérons un fluide au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est conducteur et incompressible de masse volumique  $\mu$ , situé entre les plans de cotes  $z = -a$  et  $z = +a$ . Il est parcouru par une densité de courant uniforme stationnaire  $\vec{j} = j\vec{u}_y$ . Le champ de pesanteur  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$  est uniforme. On peut montrer par le théorème d'Ampère que le champ magnétique dans le fluide est  $\vec{B} = \mu_0 j z \vec{u}_x$  (cf exo 3).

1. Déterminer la densité volumique de force de Laplace magnétique dans le fluide.
2. Déterminer le champ de pression dans le fluide à une constante additive près.

## 7 Courant de convection (\*\*\*)

Comment produire un champ magnétique sans générateur de courant ni aimant mais avec une plaque chargée ? Dans le référentiel terrestre, on considère un disque de rayon  $R$  et d'axe ( $Oz$ ) portant une charge surfacique  $\sigma$  uniformément répartie. Il est mis en rotation uniforme autour de son axe à  $\omega$ . Calculer le champ magnétique en tout point de l'axe ( $Oz$ ). On donne le champ sur son axe créé par une spire de rayon  $r$  parcourue par  $I$  :  $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$ . On note  $\alpha$  le demi-angle sous lequel on voit la spire depuis la coordonnée  $z$  sur l'axe (donc  $\tan \alpha = r/z$  qui donne à  $z$  fixé  $dr = z d\alpha / \cos^2 \alpha$ ).

2. Par exemple l'eau de mer (et autres électrolytes), l'ionosphère (plasma), les métaux liquides (noyau externe de la Terre).

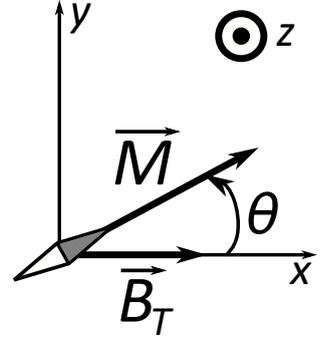
## 8 Production d'un champ uniforme (\*\*\*)

Deux bobines plates identiques (rayon  $R$ , axe  $(Oz)$ ,  $N$  spires, intensité  $I$ ) sont placées en  $z = \pm d/2$ . On donne le champ sur son axe créé par une seule spire de rayon  $r$  parcourue par  $I$  :  $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$ .

Configuration Helmholtz. Démontrer que le champ magnétique au voisinage de  $O$  à l'ordre 2 en  $z$  est  $\vec{B} = \frac{N\mu_0 I R^2}{(R^2+d^2/4)^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{z^2(d^2-R^2)}{(R^2+d^2/4)^2}\right) \vec{u}_z$ . Comment choisir  $d$  pour obtenir  $\vec{B}$  le plus uniforme possible autour de  $O$ ?

## 9 Mesure dynamique du champ magnétique terrestre

Considérons une boussole de moment magnétique  $\vec{M}$  libre de tourner sans frottements autour de l'axe vertical ascendant  $\Delta$  dirigé par  $\vec{e}_z$ . L'axe  $\vec{e}_x$  est orienté selon la composante horizontale du champ magnétique terrestre  $\vec{B}_T = B_T \vec{e}_x$  à mesurer. Le moment d'inertie de la boussole par rapport à  $\Delta$  est noté  $J$ . On note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{B}_T$  et  $\vec{M}$ . On libère initialement la boussole sans vitesse initiale depuis un angle  $\theta_0$  non nul.



1. Donner l'ordre de grandeur attendu de  $B_T$ .
2. On donne l'expression du couple  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_T$ . Donner sans justification les positions d'équilibres possible pour  $\theta_{\text{eq}}$  et préciser leur stabilité.
3. Sans faire de calcul, en déduire qualitativement la nature du mouvement de la boussole.
4. À l'aide du théorème de mécanique adapté, déterminer une équation différentielle sur  $\theta(t)$ . Quel autre système physique simple vérifie une équation similaire? Sait-on la résoudre analytiquement?
5. Sans la résoudre, simplifier cette équation pour en déduire par analyse dimensionnelle la période  $T_0$  des petites oscillations. En déduire quelles données sont nécessaires si on veut déduire  $B_T$  d'une mesure de cette période  $T_0$ .

On modifie maintenant l'expérience en ajoutant un champ magnétique  $\vec{B}_0$  supplémentaire de norme  $B_0$  connue et qu'on peut orienter selon  $+\vec{e}_x$  ou  $-\vec{e}_x$ . On mesure une période  $T$  pour de petites oscillations quand  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$  et une période  $T'$  quand  $\vec{B}_0 = -B_0 \vec{e}_x$ .

6. (a) Expérimentalement, comment produire un champ magnétique  $\vec{B}_0$  approximativement homogène dont on peut contrôler facilement le sens?
- (b) Exprimer alors  $B_T$  en fonction uniquement de  $B_0$ ,  $T$  et  $T'$ . Pourquoi cette variante de l'expérience est-elle plus pratique?