TDPO1b : Propagation non dispersive : ondes acoustiques dans les fluides

Savoirs

• Mise en équations eulérienne des ondes acoustiques dans le cadre de l'approximation acoustique. Équation de d'Alembert pour la surpression. Influence de la température sur la célérité.
• Structure des ondes planes progressives harmoniques : caractère longitudinal, impédance acoustique.
• Densité volumique d'énergie acoustique, vecteur densité de courant énergétique. Intensité acoustique.
• Ondes acoustiques sphériques harmoniques.

Savoir-faire

• Classer les ondes acoustiques par domaines fréquentiels.

• Valider l'approximation acoustique en manipulant des ordres de grandeur.
→ *Exo 3 et 4.*

• Linéariser les équations et établir l'équation de propagation de la surpression dans une situation unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes. Utiliser l'opérateur laplacien pour généraliser l'équation d'onde. Exprimer la célérité des ondes acoustiques en fonction de la température pour un gaz parfait.
→ *Exos 1 (cartésien), 4 et 5 (sphérique).*

• Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques. Utiliser la notion d'impédance acoustique.
→ *À propos de l'impédance acoustique, cf chapitre PO3 sur la réflexion aux interfaces.*

• Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde. Utiliser la notion d'intensité acoustique en décibel et citer quelques ordres de grandeur.
→ *Exo 2, 3 et 4.*

• Utiliser une expression fournie de la surpression pour interpréter par un argument énergétique la décroissance en $1/r$ de l'amplitude.
→ *Exo 5.*

• Relier longueur, célérité et fréquence pour des ondes stationnaires pour un tuyau aux conditions aux limites symétriques ou non.
→ *Exo 6.*

Interro de cours

1. Donner les fréquences des différents domaines : infrasons, audible, ultrasons.
2. Donner l'ODG de la célérité dans l'air et dans l'eau.
3. Comment varie la célérité avec la température ? Avec la compressibilité du milieu ? Avec sa masse volumique ?
4. Donner les trois équations locales utiles. Donner leur forme linéarisée.
5. Donner l'équation d'onde pour la pression dans l'approximation acoustique, et sa relation de dispersion.
6. Donner la définition de l'impédance acoustique. Puis son expression (démo rapide) pour notre modèle.
7. Donner la définition de l'intensité acoustique et sa version en décibel.
8. Donner quelques ODG de niveaux sonores en dB.
9. Quelle est la dépendance en r, distance à la source, de l'intensité $I(r)$ d'une onde sphérique ?

1 Exo de cours

On considère une onde sonore se propageant horizontalement dans un fluide de masse volumique μ_0 et de pression P_0 à l'équilibre. Lors du passage de cette onde, le fluide supposé parfait subit une petite perturbation. La masse volumique est alors $\rho = \mu_0 + \mu(x,t)$, la pression $P = P_0 + p(x,t)$ et la vitesse $v(x,t)\overrightarrow{e_x}$.

1.1 Onde acoustique progressive

1. Écrire la relation de conservation de la masse puis la linéariser par rapport aux variables μ et v dans le cadre de l'approximation acoustique.
2. On ne prend en compte ni les effets de viscosité, ni ceux de pesanteur. Écrire l'équation d'Euler $\rho\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \rho\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho\overrightarrow{g}$ selon $\overrightarrow{e_x}$ et, toujours dans le cadre de l'approximation acoustique, la linéariser par rapport à la vitesse et la surpression.
3. En supposant que l'évolution du fluide est isentropique et en notant :
$$\chi_S = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$$
le coefficient de compressibilité correspondant, établir, avec les mêmes hypothèses que précédemment, une relation linéaire entre $p(x,t)$ et $\mu(x,t)$.
4. Des trois relations établies, obtenir l'équation aux dérivées partielles satisfaites par $p(x,t)$ et préciser l'expression de c la célérité des ondes sonores.
5. Donner, sans démonstration, l'équation de propagation satisfaite par la vitesse $v(x,t)$?
6. Donner, sans démonstration, la forme de la solution générale de l'équation sur p et l'interpréter.

1.2 Célérité dans le modèle du gaz parfait

On donne la célérité des ondes acoustiques dans les fluides : $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}}$. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M, de coefficient adiabatique $\gamma = C_p/C_V$ à température T.

7. Rappeler la loi de Laplace qui relie p et V d'un gaz parfait lors d'une transformation isentropique. En déduire que $P\rho^{-\gamma} = \text{cte}$.
8. En déduire que $\chi_S = \frac{1}{\gamma P}$ pour un gaz parfait puis que $c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$.
9. AN à température ambiante dans l'air ($M = 29$ g/mol, $\gamma = 1,4$).

2 Jouer avec les décibels

1. Deux pétards explosent en même temps et produisent une intensité sonore de 90 dB. Quelle est l'intensité sonore si un seul explose ?
2. Si l'amplitude de surpression d'une onde sonore est triplée, de combien l'intensité sonore augmente-t-elle en dB ?
3. On donne le lien entre intensité sonore et amplitude v_m de vitesse $I = \mu_0 c(v_m)^2/2$ et le seuil minimal d'audition $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}. Quelle est l'intensité sonore en dB d'une onde se propageant dans l'air pour laquelle l'amplitude de déplacement du fluide est de $0,1$ mm à fréquence de 180 Hz ?

3 Ordres de grandeurs en acoustique

Considérons une source sonore d'intensité 60 dB de fréquence 1000 Hz dans l'air à $T_0 = 20\,^\circ$ C. Chaque application numérique devra être commentée. On donne le lien entre intensité sonore et amplitude p_m de pression $I = p_m^2/(2\mu_0 c)$ et le seuil minimal d'audition $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}. On donne pour l'air dans ces conditions $\mu_0 \simeq 1,2$ kg.m^{-3} et $c \simeq 340$ m.s^{-1}.

1. Rappeler le lien entre intensité sonore I_{dB} en dB, et intensité sonore I en W/m^2. Relier I_{dB} et p_m. Faire l'AN. Commenter.

2. Démontrer la relation entre les amplitudes p_m et v_m pour une onde plane progressive harmonique. En déduire une AN de v_m. Commenter.
3. Pour une onde plane progressive harmonique, relier simplement l'amplitude de déplacement ξ_m d'une particule de fluide à la pulsation ω et v_m. AN de ξ_m. Commenter.

4 Valeurs des paramètres d'une onde sphérique

Considérons une source sonore de petite dimension émettant une onde acoustique sphérique harmonique intense de fréquence $f = 1$ kHz et de puissance $\mathcal{P} = 1$ kW. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma = 1,4$, masse volumique au repos ρ_0 et compressibilité adiabatique $\chi_S = 1/(\gamma p_0)$. On donne l'expression de la surpression $p_1(r,t) = (A/r)\cos(\omega t - kr)$, le vecteur de Poynting moyen $< \overrightarrow{R} >= \frac{A^2}{2\rho_0 c r^2}\overrightarrow{u_r}$ et la densité volumique d'énergie $e = \rho_0 v_1^2/2 + \chi_S p_1^2/2$.

Donner l'expression littérale puis AN des grandeurs suivantes à distance $d = 10$ m de la source :

1. La puissance surfacique moyenne $< R >$.
2. L'intensité acoustique en décibel I_{dB}.
3. L'amplitude p_{1m} de surpression.
4. L'amplitude v_{1m} de vitesse (attention, ce n'est pas une OPPH).
5. Le déphasage ϕ entre surpression et vitesse.
6. La densité volumique d'énergie moyenne $< e >$.

5 Fréquences propres d'une sphère rigide

On cherche à étudier les modes propres de vibration à l'intérieur d'une sphère rigide de rayon R. La surpression s'écrit en notation complexe :

$$p(r,t) = \frac{A}{r}\exp(j(\omega t - kr)) + \frac{B}{r}\exp(j(\omega t + kr)) \tag{1}$$

Pour une fonction $f(r)$ ne dépendant que de la coordonnée sphérique r, on donne le gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r}$ et le laplacien $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}$.

1. Interpréter les deux termes de $p(r,t)$.
2. À partir de l'écriture de l'équation de d'Alembert tridimensionnelle pour p, en déduire que la fonction $(r \times p(r,t))$ vérifie une équation de d'Alembert unidimensionnelle en r. En déduire l'expression fournie de $p(r,t)$.
3. À partir de l'équation d'Euler linéarisée, démontrer que le champ de vitesse $v(r,t)$ est :
$$v(r,t) = \frac{1}{j\mu_0\omega r^2}\left(A(1+jkr)\exp(j(\omega t - kr)) + B(1-jkr)\exp(j(\omega t + kr))\right) \tag{2}$$
4. Condition aux limite en $r = 0$. Considérons le débit massique à travers une sphère de rayon r, l'exprimer en fonction de $v(r,t)$. Vers quelle valeur doit tendre le débit quand r tend vers 0 ? En déduire alors que $A = -B$. Simplifier les expressions de p et v et reconnaître des ondes stationnaires.
5. Condition aux limites en $r = R$. Que dire de la vitesse en $r = R$? En déduire l'équation vérifiée par les fréquences propres :
$$\tan(kR) = kR, \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \tag{3}$$
6. Pour $R = 5,0$ cm, déterminer une valeur numérique approchée de la plus basse fréquence propre (par exemple par dichotomie).

6 Note fondamentale d'un instrument à vent

Un instrument à vent peut être modélisé par un tuyau de longueur L vérifiant à ses extrémités une des deux conditions aux limites : tuyau ouvert ou fermé. On parle de jeu de conditions aux limites *pair* si les conditions aux deux extrémités sont de même nature, et *impair* sinon. On suppose $c = 340$ m.s^{-1}.

1. Déterminer les fréquences jouables par un instrument en fonction de la célérité c, la longueur L et la parité des conditions aux limites, en précisant le fondamental.
2. La flûte est modélisée par un tuyau ouvert à ses deux extrémités. Donner la longueur de l'instrument pour que son fondamental soit la note *mi* de fréquence 330 Hz.
3. L'anche d'une clarinette est assimilée à une extrémité fermée. À longueur égale, la clarinette joue-t-elle un fondamental plus ou moins aigu qu'une flûte ?
4. Considérons le plus long tuyau d'un orgue de longueur $10,6$ m qui émet un fondamental à 16 Hz. Déterminer la parité de ses conditions aux limites.

7 Propagation dans un tuyau déformable (**)

Un tube horizontal, de longueur infinie, cylindrique, d'axe Ox, contient un fluide de masse volumique μ_0 et de compressibilité χ_0.

Le tube est élastique de section variable : $S(x,t) = S_0 + S_1(x,t)$, où $|S_1(x,t)| \ll S_0$. On suppose que l'équation de comportement du tuyau permet de définir sa section comme fonction de la pression uniquement, sous la forme $S = S(P)$.

On néglige les effets de la pesanteur et de la viscosité. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

On définit la distensibilité du tube par : $D = \dfrac{1}{S}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}P}$.

1. Effectuer un bilan de matière pour le système ouvert contenu entre les plans d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. Linéariser cette équation et en déduire une relation entre $\dfrac{\partial p_1}{\partial t}(x,t)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)$ faisant intervenir le coefficient de compressibilité au repos χ_0 et la distensibilité D_0 au repos.

2. En déduire l'équation de propagation des ondes sonores dans le tube et montrer que leur célérité est donnée par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0(\chi_0 + D_0)}}.$$

3. Application : la masse volumique et la compressibilité du sang et de l'eau sont comparables. Dans les conditions de l'expérience, la célérité du son dans l'eau vaut $c_{\text{eau}} = 1,4 \times 10^3$ m.s^{-1}. On donne $D_{0m} = 1,0 \times 10^{-11}$ Pa^{-1} pour un tuyau métallique et $D_{0v} = 4,0 \times 10^{-5}$ Pa^{-1} pour un vaisseau sanguin.

Calculer c dans les deux cas. Commenter.

4. On place en $x = 0$ une pompe assurant un débit massique $D_m(t)$. En supposant qu'aucune onde ne provient de l'infini, déterminer l'expression de la vitesse $v(x,t)$ et de la surpression $p_1(x,t)$ du fluide sur le demi-axe $x > 0$ à l'aide de la fonction $D_m(t)$.

5. Le débit imposé par le cœur est de 4,5 L par minute. Quelle est l'ordre de grandeur de la surpression nécessaire pour assurer ce débit ? Le diamètre de l'aorte est de 10 mm environ. Que se passe-t-il si la distensibilité des vaisseaux sanguins diminue (avec l'âge en général) ?