# TDE1 : Sources du champ électromagnétique - Correction

## 1 Des distributions de charge différentes

### 1.1 Boule chargée (*)

Par définition, $Q = \iiint_{\text{boule}} \rho.dV$. Méthode 1, en intégrant sur des couronnes sphériques de rayon $r$, épaisseur $dr$ : $dV = 4\pi r^2 dr$ :

$$Q = \int_{r=0}^{r=R} \left(1 - \frac{r}{R^2}\right) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right]_0^R \boxed{= \frac{\pi}{3}\rho_0 R^3} \tag{1}$$

Méthode 2, avec volume élémentaire en sphérique $dV = \sin\theta r^2 dr d\theta d\varphi$. Alors

$$Q = \int_{r=0}^{r=R} \left(1 - \frac{r}{R^2}\right) r^2 dr \times \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\varphi \tag{2}$$

### 1.2 Bille radioactive (**)

a) Les particules les plus éloignées de la bille sont celles qui ont été émises à $t = 0$, elles ont donc parcouru $r_c(t) = v_0 t$. Pour $r > r_c(t)$, aucune particule n'est présente, donc $\rho(r,t) = 0$ et $\vec{j}(r,t) = \vec{0}$.

b) À la date $t$, $N \cdot t$ particules de charge $e$ ont été émises donc $Q(t) = -Nte$.

c) Entre les sphères de rayon $r$ et $r + dr$ se trouvent les particules émises entre $t$ et $t + dt$ avec

$$v_0 = \frac{r}{t} \text{ et } v_0 = \frac{r + dr}{t + dt}$$

donc $r = v_0 t$ et $dt = \frac{dr}{v_0}$. On y trouve donc $N \cdot dt = \frac{Ndr}{v_0}$ particules. Le volume compris entre les deux sphères est

$$\frac{4}{3}\pi(r + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \simeq 4\pi r^2 dr$$

en faisant un développement limité à l'ordre 1. La densité volumique de charges est donc

$$\rho(r,t) = \frac{\frac{Ndr}{v_0} \cdot e}{4\pi r^2 dr} = \frac{Ne}{4\pi r^2 v_0}$$

Pendant $dt$, les particules traversant la sphère de rayon $r$ sont celles situées à une distance inférieure ou égale à $v_0 dt$, ce sont donc celles situées entre les sphères de rayon $r - v_0 dt$ et $r$, soit un volume

$$d\tau = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r - v_0 dt)^3 \simeq 4\pi r^2 v_0 dt$$

soit une charge totale

$$dq = \rho(r,t) d\tau = Nedt$$

L'intensité du courant est donc

$$i = \frac{dq}{dt} = Ne$$

d'où $j(r,t) = \frac{i}{4\pi r^2} = \frac{Ne}{4\pi r^2}$.

d) La charge totale est la somme de la charge de la bille et de celle compris dans l'espace entre $r = R \simeq 0$ et $r = r_c$ :

$$Q(t) + \iiint \rho(r,t) d\tau = Q(t) + \int_{r=0}^{r_c} \frac{Ne}{4\pi r^2 v_0} \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= -Net + N_e \frac{r_c}{v_0} = 0$$

La charge totale est donc nulle, et donc constante car la bille est initialement neutre.

## 2 Des courants très différents

### 2.1 Désintégration radioactive (*)

1. La source émet $A$ électrons de charge $-e$ par seconde, donc $\boxed{I = \delta q/dt = -Ae}$.
2. L'intensité traversant chaque sphère de rayon $R$ est constante. Donc $I = j(R).4\pi R^2$. Donc $\boxed{j = \dfrac{I}{4\pi R^2}}$

### 2.2 Courant dans un fil (**)

1. Comme le cuivre donne un électron par atome, il suffit d'estimer la densité volumique d'atome de cuivre. La masse d'un atome de cuivre est donnée par $m_{at} = M_{Cu}/N_A$. D'autre part, $\mu = m_{at} dN/dV$.
   7 Donc $\boxed{n^* = dN/dV = \mu/m = \mu N_A/M_{Cu}}$.
2. On a $I = js$ avec $|j| = nev$. Donc $\boxed{v = \dfrac{I}{nes}}$.

### 2.3 Foudre (**)

On note $\tau$ la durée de l'éclair, $D$ son diamètre, $E$ le champ électrique, et $I$ l'intensité.
Le nombre d'électrons allant du nuage vers le sol est $Q = I\tau$.
En supposant la loi d'Ohm locale valide : $\sigma = j/E = \frac{I}{\pi(D/2)^2 E}$
La puissance volumique dissipée est $P_V = \sigma E^2$. Le volume de l'éclair est $V = \pi(D/2)^2 L$. Avec $L \simeq 1$ km en ordre de grandeur. L'énergie totale dissipée est donc $\mathcal{E} = P_V.V.\tau$.

# 4 Résistance électrique radiale d'une portion de cylindre (**)

$\Delta V = 0$ donne $V(r) = A\ln(r) + B$. Avec conditions aux limites en $R_1$ et $R_2$ : $V(r) = V_1 + \frac{V_1 - V_2}{\ln(R_1/R_2)} \ln(r/R_1)$. Donc $E(r) = -\frac{V_1-V_2}{\ln(R_1/R_2)}\frac{1}{r}$. Puis calcul de $I = 2\pi r L j = 2\pi r L \sigma E$...

# 5 Bilan Joule pour un courant non uniforme (**)

La valeur moyenne dans le temps de la puissance volumique est

$$< \vec{j}\cdot\vec{E} > = < \gamma \vec{E}^2 >$$

$$= \gamma E_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} < \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) > = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

$$\mathscr{P}_{\text{Joule}} = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{+\infty} \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}}\, dx dy dz$$

$$\mathscr{P}_{\text{Joule}} = \frac{\gamma E_0^2}{2} [x]_0^a [y]_0^a \left[-\frac{\delta}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\gamma a^2 \delta E_0^2}{4}.$$

# 7 Généralisation de la conduction (***)

1. En présence d'un champ $\overrightarrow{E}$ et d'un champ $\overrightarrow{B}$, la force de Lorentz s'écrit $\overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$.
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron dans le référentiel du matériau donne :

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{f_d} + \overrightarrow{F} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v} - e\overrightarrow{E} - e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \tag{3}$$

En régime permanent, $d\overrightarrow{v}/dt = \overrightarrow{0}$. De plus, $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{j}}{-en^*}$. Donc :

$$\overrightarrow{0} = -\frac{m}{\tau}\frac{\overrightarrow{j}}{-en^*} - e\overrightarrow{E} - e\frac{\overrightarrow{j}}{-en^*} \wedge \overrightarrow{B} \tag{4}$$

Puis en isolant $\overrightarrow{E}$ :

$$\overrightarrow{E} = \frac{m}{n^* e^2 \tau}\overrightarrow{j} + \frac{1}{n^* e}\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B} \tag{5}$$

Qui s'écrit pour $\overrightarrow{B} = (0, 0, B)$ :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{m}{n^* e^2 \tau}\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} + \frac{1}{n^* e}\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \frac{m}{n^* e^2 \tau}\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} + \frac{1}{n^* e}\begin{pmatrix} j_y B \\ -j_x B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Qui se résume sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{m}{n^* e^2 \tau}\begin{pmatrix} 1 & e\tau B/m & 0 \\ -e\tau B/m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}}$$

Donc $\boxed{\sigma = \frac{m}{n^* e^2 \tau}}$ et $\boxed{\alpha = e\tau B/m}$.

2. Avec $\overrightarrow{j} = j_x\overrightarrow{e_x}$, la relation matricielle se simplifie :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{m}{n^* e^2 \tau}\begin{pmatrix} 1 & e\tau B/m & 0 \\ -e\tau B/m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La première ligne donne : $E_x = \frac{m}{n^* e^2 \tau} j_x = (1/\sigma) j_x$, donc la conductivité[1] longitudinale est $\boxed{\sigma_{//} = \frac{j_x}{E_x} = \sigma}$.

La deuxième ligne donne : $E_y = \frac{m}{n^* e^2 \tau}\frac{-e\tau B}{m} j_x$, donc le coefficient de Hall est $\boxed{R_H = -\frac{1}{n^* e}}$.

1. Cette définition de l'énoncé de la conductivité longitudinale $\sigma_{//}$ n'est pas forcément la plus utilisée.