

## TDE2 : Électrostatique

### 1 Cartes de champ de systèmes réels

#### 1.1 Un système à déterminer

1. Le champ électrostatique ne boucle jamais (circulation nulle), donc ce ne peut pas être les lignes du schéma de gauche qui correspondent alors aux équipotentielles.
2. Les sources des champ sont les deux disques au centre des équipotentielles qui sont des charges électriques (les lignes de champ se dirigent vers ou depuis les charges). Elles sont de même signes car elles sont aux même potentiel électrique, et car les lignes de champ ne vont pas d'une charge à l'autre.
3. Les charges sont positives, donc  $V$  y est maximum. Donc  $\overrightarrow{\text{grad}}(V)$  est vers les charges (orthogonal aux équipotentielles). Les lignes de champ sont opposées à  $\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ , donc orientées en s'éloignant des charges.

#### 1.2 Possibilité d'un champ électrostatique

(a) : la circulation est nulle, donc c'est peut-être un champ électrostatique. Son flux à travers une surface fermée est nulle, il n'y a donc pas de charges dans cette zone (thm de Gauss). Cette figure correspond par exemple au champ entre les armatures d'un condensateur.

(b) : circulation non nulle. Donc ce n'est pas un champ électrostatique.

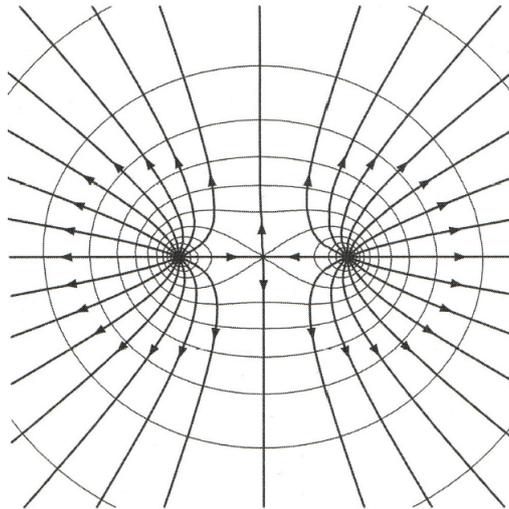
(c) : circulation nulle. Le champ décroît depuis le centre, il y a donc une charge positive au centre (mais difficile de savoir si elle est ponctuelle ou non).

(d) : circulation nulle. Flux non nul, il y a donc des charges dans la zone. plus précisément  $\text{div}(\overrightarrow{E}) = \partial E_x / \partial x < 0$ , donc  $\rho < 0$  dans cette zone.

(e) : ce n'est pas évident de voir si la circulation est nulle. Le flux a l'air conservé. Cela ressemble au champ au milieu de deux charges positives.

(f) : circulation nulle, flux non nul. La norme du champ augmente avec la distance au centre. Cela ressemble au champ à l'intérieur d'un cylindre chargé positivement.

#### 1.3 Symétrie du champ électrostatique



1. Tout plan contenant l'axe OM est plan de symétrie des charges. Donc  $\overrightarrow{E}(M)$  est bien suivant l'axe  $\pm e_z$ . Le champ s'éloigne de l'anneau d'après le schéma. Celui-ci est donc chargé positivement.
2. Le plan contenant O, M et P est plan de symétrie. Il porte donc  $\overrightarrow{E}(P)$ .
3. M' est le symétrique de M par rapport au plan du cerceau. Q est le symétrique de P par rapport au plan du cerceau. Q' est le symétrique de Q par rapport au plan porté par l'axe  $z$  et orthogonal la feuille.
4. On a déjà justifié que le champ en un point de l'axe était dirigé suivant l'axe. En O, le plan du cerceau est aussi plan de symétrie des charges. Donc le champ en O est nul. Cf schéma ci-dessus.

## 2 Plusieurs manières de calculer un champ

### 2.1 Par le théorème de Gauss

1. Soit un point  $M(x, y, z)$ . Prendre un cylindre d'axe  $Ox$ , de hauteur  $2x$  et de section  $S$  quelconque.
2. Prenons  $x > 0$ . Le flux vaudra toujours  $2E(x)S$ . Mais  $Q_{\text{int}} = \rho_0 \cdot 2xS$  si  $x < a$  et  $Q_{\text{int}} = \rho_0 \cdot 2aS$  si  $x > a$ . Alors :  
 $E(x) = \rho_0 a / \epsilon_0$  si  $x > a$ ,  $E(x) = \rho_0 x / \epsilon_0$  si  $-a < x < a$ ,  $E(x) = -\rho_0 a / \epsilon_0$  si  $x < -a$ .
3.  $\vec{E} = -\text{grad}(V)$ . Donc ici :  $E = -dV/dx$ , qui donne :

$$\begin{cases} V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}ax + A' & \text{pour } x < -a \\ V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}x^2/2 + B' & \text{pour } -a < x < a \\ V(x) = +\frac{\rho_0}{\epsilon_0}ax + C' & \text{pour } a < x \end{cases}$$

4.  $C' = A'$  par parité. Puis la continuité donne une autre constante. Mais il en reste forcément une car le potentiel électrique est défini à une constante près.

### 2.2 Par équation de Maxwell-Gauss

5.  $\text{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$ . Donc  $dE/dx = 0$  en dehors de  $[-a, a]$ , et  $dE/dx = \rho_0/\epsilon_0$  pour  $x \in [-a, a]$ .
- 6.

$$\begin{cases} E(x) = A & \text{pour } x < -a \\ E(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}x + B & \text{pour } -a < x < a \\ E(x) = C & \text{pour } a < x \end{cases}$$

7. Par symétrie,  $E(0) = 0$ , donc  $B = 0$ . Par continuité en  $a$  :  $A = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}a$ . Par parité,  $C = -A$ . On retrouve le même résultat qu'avec le théorème de Gauss. Donc le même potentiel ensuite.

### 2.3 Par équation de Poisson

10. Équation de Maxwell-Gauss  $\text{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$ , et  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ . Comme  $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = \Delta V$  (laplacien de  $V$ ), on obtient :  $\Delta V + \rho/\epsilon_0 = 0$ .
11. On intègre directement  $d^2V/dx^2 = -\rho/\epsilon_0$  pour obtenir  $V(x)$  :

$$\begin{cases} V(x) = Dx + F & \text{pour } x < -a \\ V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}x^2/2 + Gx + H & \text{pour } -a < x < a \\ V(x) = Kx + L & \text{pour } a < x \end{cases}$$

avec  $D, F, G, H, K$  et  $L$  constantes d'intégration.

12. On utilise ensuite la parité :  $D = -K, F = L, G = 0$ . Puis la continuité en  $\pm a$ . Il ne reste alors qu'une constante car le potentiel électrique est défini à une constante près.

### 3.3 Astre à géométrie sphérique

1.  $m_n = \frac{4}{3}\pi R_n^3 \rho_n$ . Et  $m = \frac{4}{3}\pi R_n^3 \rho_n + \frac{4}{3}\pi(R^3 - R_n^3)\rho_m$ .

2. Soit un point  $M$  quelconque. On invariance par rotation selon  $\theta$  et  $\varphi$  donc  $\vec{\mathcal{G}}(M)$  ne dépend que de  $r$ . Tous les plans passant par  $OM$  sont plans de symétrie de la distribution de masse. Donc  $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r)\vec{e}_r$ .
3. Le théorème de Gauss pour la gravitation est  $\oiint \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}$ . On choisit pour surface de Gauss la sphère de rayon  $r$  centrée sur  $O$ .

★ Si  $r < R_n$  :  $\mathcal{G}(r)4\pi r^2 = -4\pi G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_n$ . Donc  $\mathcal{G}(r < R_n) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_n r$ .

★ Si  $r > R$  :  $\mathcal{G}(r)4\pi r^2 = -4\pi G \cdot m$ . Donc  $\mathcal{G}(r > R) = -\frac{Gm}{r^2}$ . Champ équivalent à celui créé par une masse ponctuelle à distance  $r$ .

★ Si  $R_n < r < R$  :  $\mathcal{G}(r)4\pi r^2 = -4\pi G \cdot (m_n + \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_n^3)\rho_m)$ . Donc :

$$\mathcal{G}(R_n < r < R) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_n \frac{R_n^3}{r^2} - \frac{4}{3}\pi G \rho_m \left( r - \frac{R_n^3}{r^2} \right).$$

### 4 Condensateur plan et sphérique

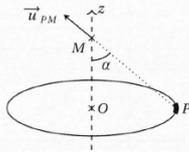
1. Cf cours  $C = \epsilon_0 S/e$ .

2. Sym et invariances donnent  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ .  $Q_{\text{int}} \neq 0$  seulement entre  $R_1$  et  $R_2$  où thm de Gauss donne  $E(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ . Tension  $U = V(R_1) - V(R_2) = \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (1/R_1 - 1/R_2)$ . Alors  $C = Q/U = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$ .

Pour  $e$  petit,  $R_1 \simeq R_2$  noté  $R$ . Alors  $C = 4\pi\epsilon_0 R^2/e = \epsilon_0 S/e$ , comme le condensateur plan.

### 7 Positions d'équilibre

1. > La distribution de charge est invariante par toute rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe (Oz). Ainsi  $\vec{E}$  ne dépend que des coordonnées  $r$  et  $z$ .  
 > Soit  $M$  un point quelconque de l'espace. Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie de la distri de charge. Ainsi  $\vec{E}(M)$  est contenu dans ce plan, soit  $\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{u}_r + E_z(r, z)\vec{u}_z$ .  
 > Sur l'axe (Oz),  $r$  est fixé ( $r = 0$ ) donc le champ ne dépend que de  $z$ . De plus, tout plan contenant est plan de symétrie /de la distribution de charge donc  $\vec{E}(M)$  est porté par l'intersection de ces p c'est-à-dire par  $\vec{u}_z$ . En définitive,  $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{u}_z$  en un point  $M$  de l'axe (Oz).  
 2. > La distribution n'est pas suffisamment symétrique pour permettre l'utilisation efficace du théo de Gauss. En revanche, il est possible de découper la distribution en segments de longueur infinités  $d\ell$  qui sont des charges quasi-punctuelles de charge  $\lambda d\ell$ .



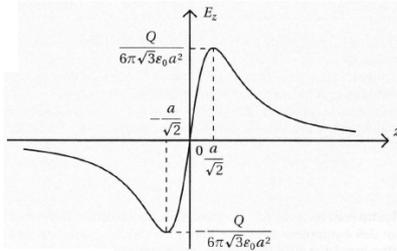
Ainsi en notant  $P$  le point courant sur le cercle (C), le champ s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \int_{(C)} \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} \quad \text{d'où} \quad E_z(z) = \vec{E}(M) \cdot \vec{u}_z = \int_{(C)} \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\alpha}{(z^2 + a^2)} = \int_{(C)} \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

En remarquant que  $\int_{(C)} \lambda d\ell = Q$ , il vient :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} f\left(\frac{z}{a}\right) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad f(u) = \frac{u}{(u^2 + 1)^{3/2}}$$

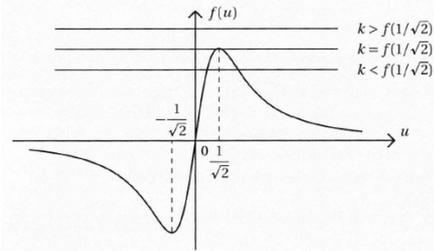
Le graphe de  $E_z(z)$  est donc homothétique de celui de  $f(u)$  :



3. > Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, la particule subit la force de Lorentz électrique  $\vec{E}(M)$  ainsi que son poids  $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ . À l'équilibre, la somme des forces est nulle et en projection sur  $\vec{u}_z$ , la condition s'écrit :

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} f(z_{\text{eq}}/a) = mg \quad \text{d'où} \quad f(z_{\text{eq}}/a) = \frac{mg 4\pi\epsilon_0 a^2}{qQ} = k.$$

La discussion de l'existence de positions d'équilibre revient donc à celle de points d'intersection entre le graphe de  $f$  et la droite horizontale d'équation  $y = k$ .



Ainsi, d'après le graphe de  $f$ ,

$k < f(1/\sqrt{2})$	$k = f(1/\sqrt{2})$	$k > f(1/\sqrt{2})$
deux positions d'équilibre	une unique position d'équilibre	aucune position d'équilibre

4. > Si  $k = f(1/\sqrt{2})$ , étudions la stabilité de l'unique position d'équilibre  $z_0 = a/\sqrt{2}$ . Que ce soit juste en dessous ou juste au-dessus de  $z_0$ , on a  $f(z/a) < k$  ce qui veut dire que la force de Lorentz est plus faible que le poids. Par conséquent, la particule écartée de sa position d'équilibre y revient si elle est écartée vers le haut, mais s'en éloigne indéfiniment si elle est écartée vers le bas.  
 > Si  $k < f(1/\sqrt{2})$ , notons  $z_1$  et  $z_2$  les positions d'équilibre, avec  $z_1 < z_2$ . Le raisonnement précédent montre que  $z_1$  est une position d'équilibre instable tandis que  $z_2$  est une position d'équilibre stable.

### 8 Dipôle dans un condensateur

1. Cf cours :  $\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0)\vec{e}_x$ .

2. Schéma à faire. On note  $\theta = (\vec{E}, \vec{p})$ .

★ équilibre en  $\mathcal{E}_p$  extremum, donc en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ .

★ équilibre en  $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ , donc en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ .

3. ★ équilibre stable en  $\theta = 0$  (car  $\mathcal{E}_p$  min) et instable en  $\theta = \pi$  (car  $\mathcal{E}_p$  max).

★ Faire schéma où on écarte légèrement  $\vec{p}$  d'un angle d'équilibre. Alors si  $\theta = 0$ ,  $\vec{\Gamma}$  le renvoie vers l'équilibre, donc équilibre stable. Mais si  $\theta = \pi$ ,  $\vec{\Gamma}$  l'écarte encore plus de l'équilibre, donc équilibre instable.

4. ★ Méthode énergétique :

L'énergie potentielle est  $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$ . L'énergie cinétique est  $\mathcal{E}_c = J\dot{\theta}^2/2$ .

Alors, le théorème de la puissance mécanique appliqué au dipôle dans le référentiel terrestre donne, en l'absence de frottements :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + pE\dot{\theta}\sin\theta \quad (1)$$

L'équation du mouvement est donc  $\ddot{\theta} + \frac{pE}{J}\sin\theta = 0$ . On reconnaît l'équation du pendule simple!

Dans le cas de petites oscillations ( $|\theta| \ll 1$ ), celle-ci devient :  $\ddot{\theta} + \frac{pE}{J}\theta = 0$ . On reconnaît un oscillateur

harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{pE/J}$ . Donc la période des petites oscillations est  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{pE}}$ .

★ Méthode par les moments :

Le couple s'écrit  $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = -pE\sin\theta\vec{e}_z$ .

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour de  $\vec{e}_z$  s'écrit  $\vec{L}_o = J\dot{\theta}\vec{e}_z$ . Alors, le théorème du moment cinétique appliqué au dipôle dans le référentiel terrestre donne, en l'absence de frottements :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\Gamma}, \quad \text{soit} \quad J\ddot{\theta} = pE\sin\theta \quad (2)$$

On retrouve alors la même équation que par la méthode précédente.

## 9 Forces entre une charge et un dipôle

- $\vec{p}$  s'oriente dans le sens de  $\vec{E}$ .
- Dans ce cas,  $\vec{p} = p\vec{e}_x$ . Donc ici, l'opérateur vectoriel se simplifie :  $(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) = p\frac{\partial}{\partial x}$ .

Le champ créé en  $x$  par la charge  $q$  en O est  $\vec{E}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\vec{e}_x$ . Alors :

$$\vec{F}_{c \rightarrow d} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}_c = p\frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{e}_x = -\frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 x^3} \vec{e}_x \quad (3)$$

Si  $q > 0$ , on sait que  $p > 0$  pour l'orientation stable. La force calculée est donc attractive car dirigée vers la charge. Si  $q < 0$ , on sait que  $p < 0$  pour l'orientation stable. La force calculée est donc aussi attractive.

- On note  $\vec{p} = p\vec{e}_x$  et  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$ . Alors, le dipôle  $\vec{p}$  placé en M créé en O le champ électrique :

$$\vec{E}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \overrightarrow{MO})\overrightarrow{MO} - OM^2\vec{p}}{OM^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p\vec{e}_x}{x^3}$$

Donc  $\vec{F}_{d \rightarrow c} = q\vec{E}_d = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 x^3} \vec{e}_x$ . La charge est toujours attirée par le dipôle pour l'orientation stable.

- On trouve  $\vec{F}_{c \rightarrow d} = -\vec{F}_{d \rightarrow c}$ , en cohérence avec le principe des actions réciproques (dit aussi action-réaction ou 3e loi de Newton).