TDE3 : Magnétostatique - Correction

1 Spectres de champ magnétique

⋆ Dipôle magnétique au milieu, dirigé vers le haut.

⋆ Idem, avec en plus en haut à droite un fil d'intensité dirigée vers le lecteur.

⋆ Deux spires orthogonales au schéma et d'intensité de même sens. Permet de produire un champ approximativement homogène au milieu.

⋆ Deux spires orthogonales au schéma et d'intensité de sens opposé. Permet de produire un champ très inhomogène au milieu.

2 Solénoïde du CERN

Cf cours $\overrightarrow{B} = \mu_0 n I \overrightarrow{e_z}$. $B = 4$ T. Aucun fil usuel ne peut supporter un tel courant sans fondre par effet Joule. On utilise alors des matériaux supraconducteurs (annulation de la résistance), qui ne possèdent cette propriété qu'à très basse température.

3 Champ créé par une sonde à effet Hall

Distribution de courant invariante selon x et y. $(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ plan de sym de $\overrightarrow{j}$, donc antisym de $\overrightarrow{B}$ donc $\overrightarrow{B} = B(z)\overrightarrow{e_y}$. Le plan $z = 0$ est plan de sym de $\overrightarrow{j}$, donc antisym de $\overrightarrow{B}$. Alors $B(-z) = -B(z)$ (donc $B(0) = 0$). Pour $z > 0$: contour d'Ampère rectangulaire selon y et z (pour enlacer du courant) avec une horizontale en $z = 0$ et une en z. Pour $z > a$: $B(z) = -\mu_0 j_0 a$. Pour $0 < z < a$: $B(z) = -\mu_0 j_0 z$. AN : $|B| = \mu_0 j_0 a = \mu_0 (I/2a\ell)a = \mu_0 I/2\ell = 1,05.10^{-5}$ T. De l'ordre du champ terrestre mais faible devant les champ créés par quelques ampères.

4 Câble coaxial en régime permanent

1. Pour $r < a$, pas de courant enlacé (le courant est sur la surface du cylindre) donc champ nul. Pour $a < r < b$, calcul similaire au fil infini : $\overrightarrow{B} = \mu_0 I/(2\pi r)\overrightarrow{e_\theta}$. Pour $r > b$, pas de courant enlacé (les courants des deux cylindres se compensent) donc champ nul. Ce câble ne provoque aucune perturbation électromagnétique de son environnement, contrairement à un câble unique qui rayonne du champ dans tout l'espace.
2. Il faut sommer toute l'énergie contenue dans la couronne cylindrique $a < r < b$. Comme l'énergie ne dépend que de r, on utilise le volume élémentaire $dV = \ell.2\pi r.dr$ d'une couronne cylindrique entre r et $r + dr$.

$$\mathcal{E} = \int_{r=a}^{r=b} u_m(r)dV = \int_{r=a}^{r=b} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2.2\mu_0}\ell.2\pi r.dr = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\int_{r=a}^{r=b}\frac{1}{r}dr = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (1)$$

3. Alors, comme $\mathcal{E} = LI^2/2$, $L = \frac{\mu_0 \ell \ln(b/a)}{2\pi}$ et $\Lambda = L/\ell = \frac{\mu_0 \ln(b/a)}{2\pi}$.

5 Superposition astucieuse

Cf TD E2.

6 Magnétohydrostatique (**)

1. Méthode 1 : Force de Laplace sur un élément de volume dV : $\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{j}dV \wedge \overrightarrow{B}$ (faire schéma pavé pour exprimer I en fonction de j). Donc densité volumique $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$. Méthode 2 : résultante de Lorentz : $\overrightarrow{dF} = \sum_i dN_i q_i \overrightarrow{v_i} \wedge \overrightarrow{B}$ avec la somme sur le type de porteur i en nombre dN_i dans dV. Puis $dN_i = n_i dV$, etc.
2. Statique des fluides $-\overrightarrow{\text{grad}}(p) - \mu\overrightarrow{g} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$. Projection sur x donne p indépendant de x et y. Donc $dp/dz = -\mu g - jB(z)$. Puis $\boxed{p(z) = -\mu g z - \mu_0 j^2 z^2/2 + \text{cte}}$

7 Courant de convection (***)

Découper le disque en bandes d'épaisseur dr entre r et $r+dr$ (surface $dS = 2\pi r dr$), de charge $dq = \sigma 2\pi r dr$. Cette bande tournante produit donc un courant $dI = dq/T = dq\omega/(2\pi) = \sigma\omega r dr$. Assimilable à une spire qui produit sur l'axe : $d\overrightarrow{B}(z) = \frac{\mu_0 dI}{2}\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\overrightarrow{u_z}$. Donc champ total :

$$B(z) = \int_{r=0}^{r=R} dB = \int_{r=0}^{r=R} \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr \tag{2}$$

En posant $\alpha_{\max} = \arctan(R/z)$:

$$\begin{aligned}
B(z) &= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha_{\max}} z\sin^3\alpha\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\int_{\cos\alpha=1}^{\cos\alpha=\cos\alpha_{\max}}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}(-d(\cos\alpha)) \\
&= \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\int_1^{\cos\alpha_{\max}}\left(1-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)d(\cos\alpha) = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\int_1^{\cos\alpha_{\max}}\left(1-1/u^2\right)du \\
&= \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\left(\cos(\alpha_{\max}) + \frac{1}{\cos(\alpha_{\max})} - 2\right) = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} + \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z} - 2\right)
\end{aligned}$$

8 Production d'un champ uniforme (***)

Utiliser la formule d'une spire mais avec à la place de z : $(z+d/2)$ et $(z-d/2)$. On utilisera $r^2+(z+d/2)^2 = r^2+d^2/4+zd+z^2 = (r^2+d^2/4)(1+zd/(r^2+d^2/4)+z^2/(r^2+d^2/4)$. Puis DL2 après puissance $(-3/2)$: $(r^2+d^2/4)^{-3/2}(1-(3/2)(zd/(r^2+d^2/4)+z^2/(r^2+d^2/4)+(-3/2)(-5/2)(1/2)z^2/(r^2+d^2/4))$. On aboutit au résultat.

9 Mesure dynamique du champ magnétique terrestre

1. Couple $\boxed{\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B_T}}$. Les angles d'équilibres sont $\boxed{\theta_{\text{eq}} = 0}$ (stable) et $\boxed{\theta_{\text{eq}} = \pi}$ (instable).
2. La direction de la boussole va osciller autour de sa position d'équilibre stable $\theta_{\text{eq}} = 0$.
3. Le couple $\overrightarrow{\Gamma}$ projeté sur $\overrightarrow{e_z}$ donne $\left(\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B_T}\right).\overrightarrow{e_z} = -\mathcal{M}B_T\sin\theta$.

   Donc d'après le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à $\overrightarrow{e_z}$ appliqué à la boussole dans le référentiel terrestre, $J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B_T\sin\theta$. Donc : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}B_T}{J}\sin\theta = 0}$ qui est une équation différentielle similaire au cas du pendule. Elle est non-linéaire et on ne sait pas la résoudre analytiquement.
4. Pour de petites oscillations ($\sin\theta \simeq \theta$) : $\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}B_T}{J}\theta = 0$, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{M}B_T}{J}}$. Donc $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B_T}}}$. Il faut donc connaître J et $\mathcal{M}$ pour déduire B_T d'une mesure de T_0, ce qui n'est pas forcément facile.
5. (a) Pour produire un champ réglable approximativement homogène, on peut placer la boussole au centre d'une longue bobine (voire entre deux bobines plates en configuration de Helmholtz). Alors changer le signe du courant suffit à changer le sens de $\overrightarrow{B_0}$.

   (b) *[Pour obtenir des oscillations toujours autour de l'angle $\theta_{eq} = 0$, il faut avoir $B_0 < B_T$, sinon on tournerait autour de $\theta_{eq} = \pi$ pour $\overrightarrow{B_0}$ et $\overrightarrow{B_T}$ opposés.]*

   Il suffit de reprendre l'expression de T_0 en remplaçant B_T par $B_T \pm B_0$:

   $$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B_T+B_0)}} \quad \text{et} \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B_T-B_0)}}$$

   Alors $T'^2/T^2 = (B_0+B_T)/(B_T-B_0)$ qui donne :

   $$\boxed{B_T = B_0\frac{T'^2+T^2}{T'^2-T^2}}$$