TDM1 : Changement de référentiel - Correction

1 Aviron

On note $\mathcal{R}$ pour le réf terrestre, $\mathcal{R}'$ pour celui lié au courant. Avec $\overrightarrow{e_x}$ vers la droite, $\overrightarrow{v_\mathcal{R}}(\mathcal{R}') = u\overrightarrow{e_x}$.

1. ⋆ À l'aller, $\overrightarrow{v}^+ = \overrightarrow{v}_\mathcal{R}(M) = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \overrightarrow{v_e} = v\overrightarrow{e_x} + u\overrightarrow{e_x}$. $\boxed{\overrightarrow{v}^+ = (v+u)\overrightarrow{e_x}}$.

   ⋆ Au retour, $\overrightarrow{v}^- = \overrightarrow{v}_\mathcal{R}(M) = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \overrightarrow{v_e} = -v\overrightarrow{e_x} + u\overrightarrow{e_x}$. $\boxed{\overrightarrow{v}^- = (-v+u)\overrightarrow{e_x}}$.

2. Alors $T = T^+ + T^- = L/\|\overrightarrow{v}^+\| + L/\|\overrightarrow{v}^-\| = L/(v+u) + L/(v-u)$. Donc $\boxed{T = L.2v/(v^2-u^2)}$.

3. $\boxed{T' = 2L/v}$. Donc $\boxed{T'/T = 1 - u^2/v^2 < 1}$, le trajet sur le bord est plus lent à l'aller, plus rapide au retour mais est toujours plus rapide sur l'ensemble !

2 Vitesse de la pluie

$\overrightarrow{v}_{\text{sol}}(\text{pluie}) = \overrightarrow{v}_{\text{voiture}}(\text{pluie}) + \overrightarrow{v}_{\text{sol}}(\text{voiture})$. Alors, $\boxed{v = V/\tan\alpha = 29 \text{ km/h}}$

4 Manège

1. Cf cours.
2. Cf cours.
3. $\overrightarrow{a}_\mathcal{R} = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$.
   ⋆ $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'} = a_0\overrightarrow{u_r}$.
   ⋆ $\overrightarrow{a}_e = -\text{OM}.\omega^2\overrightarrow{u_r}$. Il faut donc exprimer OM(t).
   ⋆ $\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}$, il faut exprimer cette dernière.

   Comme $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'} = a_0\overrightarrow{u_r}$, on a $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'} = a_0.t.\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{\text{OM}} = a_0.t^2/2.\overrightarrow{u_r}$. Donc $\overrightarrow{a}_e = -a_0.t^2.\omega^2/2.\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{a_c} = 2\omega\overrightarrow{u_z} \wedge a_0.t.\overrightarrow{u_r} = 2\omega.a_0.t.\overrightarrow{u_\theta}$.
   Alors, $\overrightarrow{a}_\mathcal{R} = a_0(1 - \omega^2t^2/2)\overrightarrow{u_r} + 2\omega.a_0.t.\overrightarrow{u_\theta}$.

3 Tapis roulant

On note $\mathscr{R}$ le référentiel lié au sol et $\mathscr{R}_t$ celui lié au tapis. Le référentiel $\mathscr{R}_t$ est en translation par rapport à $\mathscr{R}$. La loi de composition des vitesses pour le joueur A donne :

$$\vec{V}(A)_{/\mathscr{R}} = \vec{V}(A)_{/\mathscr{R}_t} + \vec{V}_e = \vec{V}(A)_{/\mathscr{R}_t} + \vec{V}_t\,.$$

1. La vitesse $\vec{V}(A)_{/\mathscr{R}}$ est : $\vec{V}(A)_{/\mathscr{R}} = V_t\vec{u}_x + V\vec{u}_y$, la position du jouer A est donc :

$$\overrightarrow{A_0A}(t) = V_t t\,\vec{u}_x + Vt\,\vec{u}_y\,.$$

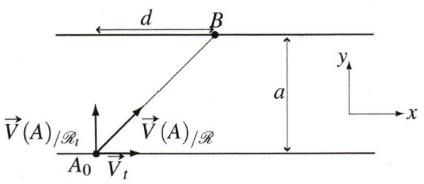


Figure 5.13

Quand la traversée est terminée, $a = Vt_1$ et $d = V_t t_1$ d'où : $d = a\dfrac{V_t}{V}$ et $t_1 = \dfrac{a}{V}$.

2. La vitesse $\vec{V}_{/\mathscr{R}}$ doit maintenant être perpendiculaire aux bords du tapis (figure 5.14).

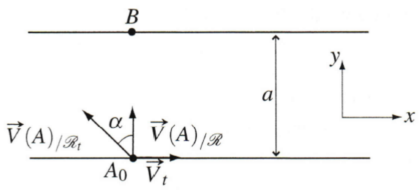


Figure 5.14

La vitesse de A par rapport au sol s'écrit maintenant : $\vec{V}(A)_{/\mathscr{R}} = (V_t - V\sin\alpha)\,\vec{u}_x + V\cos\alpha\,\vec{u}_y = V\cos\alpha\,\vec{u}_y$ d'où : $V_t = V\sin\alpha$ et $\overrightarrow{A_0A}(t) = V\cos\alpha\; t\,\vec{u}_y$.

Quand la traversée est terminée : $a = V\cos\alpha\; t_2$. Or $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{V^2}{V_t^2}}$, d'où $t_2 = \dfrac{a}{\sqrt{V^2-V_t^2}}$.

3. En reprenant la démarche de la question précédente, la vitesse $\vec{V}_{/\mathscr{R}}$ s'écrit :

$$\vec{V}_{/\mathscr{R}} = (V_t + V\cos\theta)\,\vec{u}_x + V\sin\theta\,\vec{u}_y$$

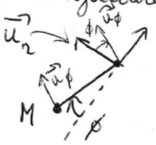
Le temps de traversée est $t_3 = a/V\sin\theta$, il est minimal pour $\theta = \pi/2$ ce qui revient au cas de la première question.

4 Trébuchet

1 - R_c est en rotat° par rapport à R_s à vitesse angulaire $\dot\theta$.

⚠ D'après l'orientat° de $\vec{u}_\theta$ sur la figure, θ est orienté positivement dans le sens horaire !

2 - M est en rotat° dans R_c à vitesse angulaire $\dot\phi$.



$\vec{v}_{R_c}(M) = b.\dot\phi.\vec{u}_\phi$

avec $\vec{u}_\phi = \cos\phi.\vec{u}_r + \sin\phi.\vec{u}_\theta$

$$\boxed{\vec{v}_{R_c}(M) = b.\dot\phi.\cos\phi.\vec{u}_r + b.\dot\phi.\sin\phi.\vec{u}_\theta}$$

3 - * $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$

$$\boxed{\vec{OM} = a.\vec{u}_r + b.(\sin\phi.\vec{u}_r - \cos\phi.\vec{u}_\theta)}$$

* Deux méthodes pour $\vec{v}_e(M)$, vitesse dans R_s du point coïncident de M, donc à ϕ constant.

• m1 : $\vec{v}_e(M) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R_s}$ à ϕ = cte

$= (a+b.\sin\phi).\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_{R_s} - b.\cos\phi\left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_{R_s}$

$$\boxed{\vec{v}_e(M) = (a+b.\sin\phi).\dot\theta.\vec{u}_\theta + b.\cos\phi.\dot\theta.\vec{u}_r}$$

• m2 : $\vec{v}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ car rotat° de R_c / R_s

$= (\dot\theta\,\vec{e}_z) \wedge \left((a+b\sin\phi)\,\vec{u}_r - b\cos\phi\,\vec{u}_\theta\right)$

$= \dots$ idem

4 - Composit° des vitesses : $\vec{v}_{R_s} = \vec{v}_{R_c} + \vec{v}_e$

$\vec{v}_{R_s} = [b.\cos\phi.(\dot\phi+\dot\theta)]\,\vec{u}_r + [a\dot\theta + b.\sin\phi.(\dot\phi+\dot\theta)].\vec{u}_\theta$

Pour le lâché en $\phi = \pi/2$:

$$\boxed{\vec{v}_{R_s} = [\underbrace{(a+b).\dot\theta}_{\text{terme dû à rotat° à distance } (a+b)} + \underbrace{b\dot\phi}_{\text{terme supplémentaire car corde } b \text{ non rigide}}].\vec{u}_\theta}$$