TDM2 : Dynamique en référentiel non galiléen - Correction

1 Ascenseur

Dans le référentiel non galiléen lié à l'ascenseur d'accélération $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{u_z}$, une personne subit en plus de son poids $-mg\overrightarrow{u_z}$ la force d'inertie d'entrainement $-ma\overrightarrow{u_z}$. Elle subit donc un « poids apparent » $-m(g+a)\overrightarrow{u_z}$, donc comme si sa masse était $m_{\text{app}} = m(g+a)/g$

⋆ Au démarrage, on lit $a \simeq 0,8$ m.s^{-2}, donc :
$\boxed{m_{\text{app}} = m(9,81+0,8)/9,81 = 1,08 \times m}$.

⋆ Au freinage, on lit $a \simeq -1$ m.s^{-2}, donc :
$\boxed{m_{\text{app}} = m(9,81-1)/9,81 = 0,90 \times m}$.

2 À la fête foraine

Bilan des forces : Poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$. Force d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{F_{ie}} = mR\omega^2\overrightarrow{e_r}$. Réaction de la paroi $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$.

PFD sur la personne dans ref du manège, à l'équilibre : $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$. Projection sur $\overrightarrow{e_r}$: $R_N = mR\omega^2$. Sur $\overrightarrow{e_z}$: $mg = R_T$, puis pour une personne immobile $mg = R_T < \mu R_N = \mu m R\omega^2$. Donc $\boxed{\omega > \omega_{min} = \sqrt{g/(\mu R)}}$.

3 Ressort en rotation

L'axe Ox est lié au référentiel tournant $\mathcal{R}'$. Poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$ (le plan est horizontal). Force de rappel $\overrightarrow{T} = -k(x-l_0)\overrightarrow{e_x}$. Réaction support $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_y} + \overrightarrow{R_z}$ (pas de frottement donc orthogonale à la tige). $\overrightarrow{F_{ie}} = mx\omega^2\overrightarrow{e_x}$. $\overrightarrow{F_{ic}} = -2m\omega\dot{x}\overrightarrow{e_y}$.

1. PFD appliqué à masse m dans $\mathcal{R}'$ non galiléen : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}}$.
   Projection sur $\overrightarrow{e_x}$: $m\omega^2 x - k(x-l_0) = m\ddot{x}$.
   Projection sur $\overrightarrow{e_y}$: $R_y + 2m\omega\dot{x} = 0$.
   Projection sur $\overrightarrow{e_z}$: $R_z - mg = 0$.
   Donc équa diff $\boxed{\ddot{x} + (k/m - \omega^2)x = kl_0/m}$
2. Si $k/m > \omega^2$, oscillateur harmonique, le mouvement est oscillant (solution en cosinus et sinus ; système stable). Si $k/m < \omega^2$, la masse s'éloigne exponentiellement (solution en exponentielle réelle ; système instable). Si $k/m = \omega^2$, le mouvement est uniformément accéléré (système instable).
   Rq : Dans les deux derniers cas, l'équation différentielle du mouvement et l'analyse du mouvement restent valables tant qu'on se situe dans la zone de linéarité du ressort. Mais si l'allongement devient trop important, la tension du ressort ne reste pas proportionnelle à celui-ci, et on peut même aboutir à la rupture du ressort.
3. Premièrement, il faut $k/m > \omega^2$ pour un mouvement borné. Mais cela ne suffit pas pour que la masse soit immobile dans $\mathcal{R}'$, il faut bien choisir les CI pour annuler les oscillations.
   Posons $\omega_0^2 = (k/m - \omega^2)$. Alors solution générale $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + l_0 k/(m\omega_0^2)$.
   Utilisation des CI : $x(0) = x_0$ donne $A = x_0 - l_0 k/(m\omega_0^2)$, et $\dot{x}(0) = 0$ donne $B = 0$.
   Oscillations nulles si $A = 0$, donc si $\boxed{x_0 = l_0 k/(m\omega_0^2)}$.
4. $\overrightarrow{R} = R_y\overrightarrow{e_y} + R_z\overrightarrow{e_z} = -2m\omega\dot{x}\overrightarrow{e_y} + mg\overrightarrow{e_z}$ de norme $\boxed{R = m\sqrt{(2\omega\dot{x})^2 + g^2}}$

4 Tige en rotation

Attention, comme l'anneau peut passer à travers C, la distance r peut changer de signe, et donc utiliser un repère tournant cartésien et non pas la base cylindrique.

1. Poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$. Réaction support $\overrightarrow{R}$ (pas de frottement donc orthogonale à la tige). $\overrightarrow{F_{ie}} = mr\omega^2\overrightarrow{e_x}$. $\overrightarrow{F_{ic}} = 2m\omega\dot{x}\overrightarrow{e_y}$.

2. PFD sur l'anneau dans le ref de la tige projeté sur l'axe : $m\ddot{r} = -mg\sin\theta + mr\omega^2$.
   Donc equa diff $\boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = -g\sin\theta = -g\sin(\omega t)}$.
   Solution homogène $r_h(t) = A\cosh(\omega t) + B\sinh(\omega t)$.
   Solution particulière sous la forme $C\sin(\omega t)$ à reporter dans l'équa diff qui donne $C = g/(2\omega^2)$
   Donc solution $r(t) = A\cosh(\omega t) + B\sinh(\omega t) + g/(2\omega^2).\sin(\omega t)$
   Avec les CI : $r_0 = A$ et $B = v_0/\omega - g/(2\omega^2)$. Donc $\boxed{r(t) = r_0\cosh(\omega t) + (v_0/\omega - g/(2\omega^2))\sinh(\omega t) + g/(2\omega^2).\sin(\omega t)}$
3. L'opposé de la réaction du support qu'on peut exprimer à l'aide des autres projections du PFD.
4. Le mouvement soit oscillatoire si les A et B devant cosh et sinh s'annulent. Donc si $\boxed{r_0 = 0}$ et $\boxed{v_0 = g/(2\omega)}$.

5 Gravité artificielle dans l'espace

1. Ils marchent à l'intérieur du tore, sur la surface extérieure (schéma).
2. ODG de R d'après les images, on choisit w pour avoir $|a_e| = g$.
3. La force de Coriolis dépend du sens de course : vers la bas du coureur (alourdi) ou vers le haut (allège).

6 Déviation vers l'est

1. La force d'inertie d'entrainement due à la rotation du ref terrestre est inclue dans le poids.
2. Vers l'Est.
3. PFD sur l'objet dans ref terrestre en négligeant Coriolis. Donc $\ddot{z} = -g$ qui donne $\dot{z} = -gt$ puis $\boxed{z(t) = -gt^2/2 + h}$ avec les CI $z(0) = h$ et $\dot{z}(0) = 0$. La durée de chute est donnée par $z(\tau) = 0$, d'où $\boxed{\tau = \sqrt{2h/g}}$.
4. $\overrightarrow{F_{ic}} = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\lambda \\ \omega\sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} \boxed{= -2m\omega\cos\lambda.\dot{z}\overrightarrow{e_x}}$
5. $\ddot{x} = 2\omega\cos\lambda.gt$. Donc $\boxed{x(t) = \omega\cos\lambda g t^3/3}$ avec les CI nulles sur x et $\dot{x}$.
6. Le décalage vers l'Est vaut $x(\tau) = \omega\cos\lambda g(2h/g)^{3/2}/3 = 3$ cm.

7 Pesanteur

Cf cours.

8 Sismographe

1. Bilan des forces subies par M dans $\mathcal{R}'$ non galiléen lié à la boîte : $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$, frottements $\overrightarrow{f_d} = -h\frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$, rappel du ressort $\overrightarrow{F} = k(H - z - l_0)\overrightarrow{u_z}$, force d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{F}_{ie} = -m\frac{d^2Z}{dt^2}\overrightarrow{u_z}$. Alors le PFD sur M dans $\mathcal{R}'$ donne :
$$\boxed{\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dz(t)}{dt} + \frac{k}{m}z(t) = -\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}(H - l_0) - g}$$
   rq : on aurait très bien pu aussi trouver cette équation en se plaçant dans le référentiel terrestre galiléen.
2. On trouve $z_{eq} = H - l_0 - mg/k$. L'équa diff devient :
$$-\omega^2\underline{z'} + \frac{h}{m}j\omega\underline{z'} + \frac{k}{m}z'(t) = \omega^2\underline{Z}$$
   Donc $\boxed{\underline{H} = \frac{\omega^2}{\frac{k}{m} + j\omega\frac{h}{m} - \omega^2}}$
3. Il suffit d'injecter les expressions.
4. $|\underline{H}|$ tend vers 0 quand ω tend vers 0. Et tend vers 1 quand ω tend vers $+\infty$. Il s'agit donc d'un filtrage passe-haut.
   Dans la limite des hautes fréquences, $z(t)$ donne directement l'amplitude des ondes sismiques $Z(t)$.