TDMF1 : Description d'un écoulement - Correction

1 Caractéristiques d'un écoulement

1. Étude graphique.
   (a) Projetées dans un plan (xy), les lignes de champ sont des cercles. L'allure d'une ligne de champ complète est une spirale d'axe $\overrightarrow{u_z}$.
   (b) L'écoulement est probablement incompressible car on peut trouver des surfaces fermées telles que le flux sortant est nul (par exemple un cylindre d'axe Oz de hauteur H).
   L'écoulement n'est pas irrotationnel car on peut trouver une courbe fermée de circulation non nulle (par exemple cercle centré sur O dans le plan xy).
   Une particule de fluide effectue la composition d'une translation uniforme suivant $\overrightarrow{u_z}$, et d'une rotation uniforme autour de $\overrightarrow{u_z}$. L'accélération est alors du type $\overrightarrow{a} = -r\omega^2\overrightarrow{u_r}$.
   (c) Considérons une particule de charge q dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ homogène stationnaire suivant $\overrightarrow{u_z}$. Alors, si la vitesse initiale est de composante v_0 suivant $\overrightarrow{u_z}$, et non nulle dans le plan xy, le mouvement de la particule est une spirale de même type.
2. Étude analytique.
   (a) L'écoulement est stationnaire car le champ $\overrightarrow{v}$ est indépendant du temps.
   L'écoulement est incompressible car $\text{div}(\overrightarrow{v}) = 0$.
   L'écoulement n'est pas irrotationnel car $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{v}) = 2\Omega\overrightarrow{u_z} \neq \overrightarrow{0}$.
   (b) On a $\partial\overrightarrow{v}/\partial t = \overrightarrow{0}$ et $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = -\Omega^2 x\overrightarrow{u_x} - \Omega^2 y\overrightarrow{u_y} = -r\Omega^2\overrightarrow{u_r}$.

2 Conservation du débit

1. Comme le débit massique vaut $D_m = \mu.v.S$. Alors $\boxed{v = \dfrac{D_m}{\mu S}}$.
2. Comme l'écoulement est incompressible, $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Donc...

3 Écoulement perturbé par un mur

1. Pour un écoulement irrotationnel, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$ donc dirigé vers l'augmentation de ϕ. Ainsi, le courant est vers la droite du schéma.
2. Au point A : $v_A \simeq \Delta\phi/\Delta x = \frac{-1-(-1{,}25)}{-0{,}95-(-1{,}20)}) \boxed{= 1 \text{ m/s}}$
3. On peut appliquer la même méthode qu'en A. Mais faisons autrement en utilisant le caractère incompressible. Soit un tube de courant de contour d'entrée autour de B et de sortie autour de C. Alors, l'écoulement incompressible implique $v_B S_B = v_C S_C$. Donc $\boxed{v_B/v_C = S_C/S_B \simeq 1/2}$.

4 Description d'un écoulement de Poiseuille

1. (a) $\text{div}\overrightarrow{v} = 0$ donc l'écoulement est incompressible.
   (b) Considérons un tube de courant appuyé sur un rectangle dans un plan (yz), alors le flux sortant est nul. L'écoulement est donc incompressible.
2. (a) $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{v} = v_0(a-2z)/a^2\overrightarrow{u_y} \neq \overrightarrow{0}$ en dehors du plan de symétrie donc l'écoulement n'est pas irrotationnel.
   (b) Considérons un contour rectangulaire dans un plan (xz), alors la circulation n'est pas nulle si le rectangle n'est pas centré sur le plan de symétrie. L'écoulement n'est donc pas irrotationnel.
3. (a) $\partial\overrightarrow{v}/\partial t = \overrightarrow{0}$ donc écoulement stationnaire.
   $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Attendu car dans cet écoulement, une particule de fluide se dirige toujours vers des zones de même masse volumique.
   (b) Faire le calcul...
4.

$$D_V = \int_{y=0}^{y=L}\int_{z=0}^{z=a} v(M).dydz = L.\frac{v_0}{a^2}\int_{z=0}^{z=a} z(a-z)dz = v_0 La/6 \qquad (1)$$

5 Tuyau poreux

1. Écoulement incompressible donc flux entrant en R = flux sortant en $r > R$. Donc $v_0.2\pi R dz = v(r).2\pi r.dz$. Donc $\boxed{v(r) = v_0 R/r}$.
2. On cherche ϕ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$. Donc $v_0 R/r = \partial\phi/\partial r$. Donc $\boxed{\phi(r) = v_0 R \ln(r) + \text{cte}}$.
3. Lignes de courant selon $\overrightarrow{u_r}$ et équipotentielles surface de cylindre.

6 Modèle de houle

1. L'écoulement n'est pas stationnaire car $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$ dépend de t.
2. $\boxed{\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r}, t) = k\phi_0 e^{kz}(-\sin(kx - \omega t)\overrightarrow{u_x} + \cos(kx - \omega t)\overrightarrow{u_z})}$.
3. On trouve $\text{div}(\overrightarrow{v}) = 0$ donc l'écoulement est incompressible.
4. On trouve $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ donc l'écoulement est irrotationnel. Ce qui est cohérent avec l'existence d'un potentiel ϕ dont dérive $\overrightarrow{v}$.

7 Écoulement autour d'un pilier

1. Le fluide ne rentre pas dans le pilier donc $\boxed{v_r(r = a) = 0}$. De plus, par symétrie, $v_\theta(\theta = 0 \,\text{ou}\, \pi) = 0$.
2. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)$.
3. $\boxed{v_r = \partial\varphi/\partial r = v_0 \cos\theta \left(1 - a^2/r^2\right)}$. On trouve bien $v_r(r = a) = 0$.

   $\boxed{v_\theta = (1/r)\partial\varphi/\partial\theta = -v_0 \sin\theta \left(1 + a^2/r^2\right)}$. On trouve bien que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ en $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.
4. Cf réponse précédente.
5. v_r est inchangé car le terme supplémentaire est indépendant de r. En revanche, $\boxed{v_\theta = -v_0 \sin\theta \left(1 + a^2/r^2\right) + \dfrac{\Gamma}{2\pi r}}$.