TDMF2 : Actions mécaniques dans un fluide en mouvement - Correction

1 Jouer avec le nombre de Reynolds

1.1 Écoulements similaires

1. $\boxed{\mathrm{Re}_1 = \frac{\mu D v}{\eta} = \frac{10^3 \times 5.10^{-2} \times 0,2}{10^{-3}} = 10^4}$. Comme $\mathrm{Re} \gg 1$, l'écoulement est turbulent.
2. Comme $\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2$, $\boxed{v_2 = \frac{\mu_1 L_1 \eta_2}{\mu_2 L_2 \eta_1} v_1 = 0,7.10^{-2}\ \mathrm{m/s}}$.
   Le débit volumique s'écrit $D_V = D_m/\mu = vS$ où la section vaut $S = \pi r_2^2$. Donc :
   $\boxed{D_v = 0,7.10^{-2} \times \pi (15.10^{-2})^2 = 5.10^{-4}\ \mathrm{m^3.s^{-1}}}$

1.2 Traînée

1. Pour $\mathrm{Re} < 1$, $\log(C_x)$ est une fonction affine de $\log(\mathrm{Re})$ d'ordonnée à l'origine environ $\log(20)$ de pente -1 d'après le graphe. Donc $\boxed{\log C_x = \log 20 - \log \mathrm{Re}}$. Alors $C_x = 20.\frac{\eta}{\mu 2 r v}$. Puis :
$$\boxed{\vec{F} = -5\eta\pi r v \vec{u_z}} \tag{1}$$
   On retrouve la dépendance attendue. La différence de valeur numérique vient de l'imprécision de l'évaluation de l'ordonnée à l'origine.
2. Pour environ $100 < \mathrm{Re} < 10^5$, C_x est constant et vaut environ $\boxed{C_x \simeq 0,5}$.
3. PFD appliqué à la bille dans le référentiel terrestre. $m\vec{a} = \vec{\Pi} + m\vec{g} + \vec{F}$ avec la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\mu\frac{4}{3}\pi r^3 g\vec{u_z}$. En régime permanent où la vitesse est constante et vaut v_l, on a :
$$0 = (m - \mu\frac{4}{3}\pi r^3)g + F(v_l) \tag{2}$$
   ⋆ Sous l'hypothèse de Re élevé donc C_x constant ($100 < \mathrm{Re} < 10^5$) :
$$0 = (m - \mu\frac{4}{3}\pi r^3)g - \frac{C_x}{2}\mu\pi r^2 v_l^2 \tag{3}$$
   Puis $\boxed{v_l = \sqrt{\frac{2(m - \mu 4\pi r^3/3)g}{C_x \mu \pi r^2}}}$ Faire l'application numérique et vérifier l'hypothèse sur la valeur de Re.
   ⋆ Sous l'hypothèse de Re faible où on utilise la formule de Stokes ($\mathrm{Re} < 1$) :
$$0 = (m - \mu\frac{4}{3}\pi r^3)g - 6\eta\pi r v_l \tag{4}$$
   Puis $\boxed{v_l = \frac{2(m - \mu 4\pi r^3/3)g}{6\eta\pi r}}$ Faire l'application numérique et vérifier l'hypothèse sur la valeur de Re.

2 Exos de méca avec différents frottements

2.1 Chute d'une gouttelette : frottements linéaires

1. Le modèle de frottements linéaires en vitesse est valide si $\mathrm{Re} < 1$. Donc le diamètre d'une gouttelette doit vérifier :
$$r < \frac{\eta}{\rho_{\mathrm{air}}.v_l} = \frac{1,8.10^{-5}}{1,3 \times 1,2.10^{-3}} = 10^{-2}\ \mathrm{m} \tag{5}$$
   Or, une gouttelette est de diamètre bien inférieur au centimètre. Le modèle linéaire est donc approprié.

2. Rapport des normes : *[Ne surtout pas écrire de fraction ou d'inégalités de vecteurs.]*

$$\boxed{\frac{\|\overrightarrow{\Pi}\|}{\|\overrightarrow{P}\|} = \frac{\rho_{air} V g}{\rho_{eau} V g} = \frac{1,3}{1000} \ll 1}$$

3. *Vu la réponse de la question précédente, on négligera la poussée d'Archimède.* Appliquons le PFD à la goutte dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'axe (Oz) est pris selon la verticale descendante. On obtient $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$. Qui donne en projection sur (Oz) : $m\dot{v} = mg - 6\pi\eta r v$. D'où :

$$\boxed{\dot{v} + \frac{6\pi r\eta}{m} v = g}$$

4. Par analyse dimensionnelle, on pose $\boxed{\tau = m/(6\pi r\eta)}$. La vitesse limite est donnée en recherchant la solution particulière constante de l'ED. Pour $dv/dt = 0$ en $v = v_l$, on obtient $\boxed{v_l = mg/(6\pi r\eta)}$. On peut reformuler l'ED :

$$\boxed{\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_l}{\tau}}$$

5. L'énoncé nous donne la masse volumique mais pas la masse d'une goutte. On les relie par $m = \rho_{eau}.4\pi r^3/3$. Alors :

$$v_l = \frac{g\rho_{eau}.4\pi r^3/3}{6\pi r\eta} = \frac{2g\rho_{eau} r^2}{9\eta}$$

Donc :

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{9 v_l \eta}{2g\rho_{eau}}} = 3,1\ \mu\text{m}}$$

Ce qui paraît crédible pour une gouttelette de brouillard.

6. • Solution particulière : v_l *[Déjà trouvée, par besoin de la redémontrer.]*
   • Solution générale homogène : $v_h = A\exp(-t/\tau)$ avec $A =$ cte.
   • Donc avec la CI $v(0) = 0$, la solution est :

$$\boxed{v(t) = v_l\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)}$$

7. On rappelle qu'on a orienté (Oz) vers le bas. Donc $v = dz/dt$. En intégrant : $z(t) = v_l.t + v_l\tau\exp(-t/\tau) + C$. Donc avec la CI $z(0) = 0$:

$$\boxed{z(t) = v_l.t + v_l\tau.\left(\exp(-t/\tau) - 1\right)}$$

2.2 Tir aquatique : frottements quadratiques

1. La vitesse d'une balle en sortie de fusil est de plusieurs centaines de m/s. Le diamètre d'une balle est de l'ordre du demi-centimètre. Pour un tir aussi bien dans l'eau ou l'air, on trouve un nombre de Reynolds grand devant 1, ce qui valide le modèle quadratique en vitesse.
2. Dans le réf. terrestre, le PFD appliqué à la balle donne : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$. En projetant sur un axe $\overrightarrow{e_x}$ le long de la vitesse ($\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_x}$) : $m\dot{v} = -\alpha v^2$. Donc, avec $\boxed{k = \alpha/m}$ de dimension L^{-1} :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + kv^2 = 0}$$

3. Il suffit alors de prendre l'inverse de k :

$$L = \frac{1}{k} = \frac{m}{\alpha} = \boxed{\frac{2m}{\rho S C_x}}$$

$\boxed{L_{\text{air}} = 512\text{ m}}$, cohérent avec la portée d'un fusil, et $\boxed{L_{\text{eau}} = 0,68\text{ m}}$, la portée dans l'eau est drastiquement réduite !

4. L'ED devient par séparation des variables : $dv/v^2 = -kdt$, donc en intégrant : $-1/v = -kt +$ cte. La CI $v(0) = v_0$ donne $1/v = 1/v_0 + kt$, donc $\boxed{v(t) = \dfrac{1}{1/v_0 + kt}}$
5. $v(t = t_{1/2}) = v_0/2$ donne $\boxed{t_{1/2} = 1/(kv_0) = L/v_0}$. Donc $\boxed{t_{\text{air}} = 1\text{ s}}$ et $\boxed{t_{\text{eau}} = 1,4\text{ ms}}$

3 Viscosimètre de Couette

1. $\boxed{\overrightarrow{dM} = r\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{F} = \eta r^2 \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v_\theta}{r}\right) dS\overrightarrow{u_z}}$
2. Action de la partie extérieure sur tranche en r : $\overrightarrow{M} = \iint \overrightarrow{dM} = \eta r^2 \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v_\theta}{r}\right) \overrightarrow{u_z} \iint dS = \eta r^2 \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v_\theta}{r}\right) \overrightarrow{u_z} 2\pi r H$.

   On trouve alors le $\Gamma(r)$ attendu.
3. D'après le théorème du moment cinétique à la couche de fluide d'épaisseur dr comprise entre r et $r + dr$: $dL/dt = \Gamma(r + dr) - \Gamma(r)$. Donc en régime stationnaire, $\Gamma(r + dr) = \Gamma(r) = \text{cte}$.
4. $\frac{\partial v_\theta / r}{\partial r} = \frac{\Gamma_0}{2\pi\eta H}\frac{1}{r^3}$, donc $v_\theta / r = -\frac{\Gamma_0}{4\pi\eta H}\frac{1}{r^2} + A$. $\boxed{v_\theta = -\dfrac{\Gamma_0}{4\pi\eta H}\dfrac{1}{r} + Ar}$
5. En utilisant la condition aux limites $v(r = R) = o$, : $v_\theta = \frac{\Gamma_o}{4\pi\eta H}(-\frac{1}{r} + \frac{r}{R^2})$

   En utilisant la condition aux limites $v(r = R + e) = (R + e)\omega_0$: $\Gamma_0 = 4\pi\eta H\omega_0 \frac{1}{1/R^2 - 1/(R+e)^2}$

   À remplacer dans la vitesse pour éliminer Γ_0.