TDMF3 : Équations dynamiques locales - Correction

1 Écoulements visqueux

1.1 Écoulement sur un plan incliné

1. ⋆ Écoulement incompressible donc $\mathrm{div}(\overrightarrow{v}) = 0$. Comme $\overrightarrow{v}$ est suivant $\overrightarrow{e_x}$, $\partial v/\partial x = 0$. Donc v ne dépend pas de x.
   ⋆ Écoulement stationnaire donc $\partial\overrightarrow{v}/\partial t = \overrightarrow{0}$. Puis on calcule $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Donc $\boxed{D\overrightarrow{v}/Dt = \overrightarrow{0}}$.
   ⋆ L'équation de Navier-Stokes appliquée à l'écoulement dans le référentiel terrestre donne donc : $\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) + \mu\overrightarrow{g} + \eta\Delta\overrightarrow{v}$. Soit deux équations $\boxed{0 = -\partial p/\partial x + \mu g \sin\alpha + \eta\partial^2 v/\partial z^2}$ et $\boxed{0 = -\partial p/\partial z + \mu g \cos\alpha}$
2. L'intégration de la deuxième relation donne $p(x,z) = \mu g \cos\alpha z + f(x)$. D'après la condition aux limites $p(x, z = 0) = p_0$. Donc $f(x) = p_0$. Alors $\boxed{p(z) = \mu g \cos\alpha z + p_0}$.
3. Pour un fluide visqueux, $\boxed{v(z = h) = 0}$. De plus, l'air exerce une force surfacique tangentielle négligeable sur l'eau au niveau de la surface libre : $\overrightarrow{dF}_{\text{air}\to\text{liquide}} = \overrightarrow{0}$. Or, cette force est proportionnelle à $\partial v/\partial z$. Donc $\boxed{\dfrac{\partial v}{\partial z}(z = 0) = 0}$.
4. Comme ni p, ni v ne dépendent de x, la première relation provenant de Navier-Stokes donne $\dfrac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{\mu}{\eta} g \sin\alpha$. En intégrant : $dv/dz = -\frac{\mu}{\eta} g \sin\alpha z + A$. D'après la condition aux limites en $z = 0$, $A = 0$. En intégrant de nouveau : $v(z) = -\frac{\mu}{\eta} g \sin\alpha z^2/2 + B$. D'après la conditions aux limites $v(z = h) = 0$, on obtient $\boxed{v(z) = \dfrac{\mu}{\eta} g \sin\alpha (h^2 - z^2)/2}$
5. Le débit volumique est $D_v = \int_{y=0}^{y=L}\int_{z=0}^{z=h} v(z) dy dz = L\frac{\mu}{\eta}\frac{g\sin\alpha}{2}\int_{z=0}^{z=h}(h^2 - z^2)dz \boxed{= L\dfrac{\mu}{\eta}\dfrac{g\sin\alpha}{3}h^3}$

   La vitesse moyenne est $< v >= \frac{1}{h}\int_{z=0}^{z=h} v(z) dz = \frac{D_v}{hL}\boxed{= \dfrac{\mu}{\eta}\dfrac{g\sin\alpha}{3}h^2}$
6. $\boxed{v = 0,2 \text{ m/s}}$.

1.2 Écoulement de Poiseuille plan

1.3 Écoulement de Poiseuille cylindrique

1. Écoulement incompressible donc $\partial v_z/\partial z = 0$. Donc v ne dépend que de r.
2. Stationnaire donc $\partial\overrightarrow{v}/\partial t = \overrightarrow{0}$. Et on calcule que l'accélération convective est aussi nulle.
3. L'équation de Navier-Stokes suivant $\overrightarrow{u_r}$ donne $\partial p/\partial r = 0$
4. L'équation de Navier-Stokes sur $\overrightarrow{u_z}$ donne $\partial p/\partial z = \eta\Delta v_z = \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$. Comme p ne dépend que de z, le membre de gauche ne dépend que de z. Comme v_z ne dépend que de r, le membre de droite ne dépend que de r. Ainsi, une fonction de seulement z est égale à une fonction de seulement r, elle est donc constante. $\boxed{dp/dz = C = \text{cte}}$. On a donc $p(z) = Cz + C'$ qui donne avec les conditions aux limites $p(0) = p_1$ et $p(L) = p_2$: $\boxed{p(z) = \dfrac{p_2 - p_1}{L} z + p_1}$.
5. Retour à l'équa diff sur v_z :

$$\eta\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = C \quad (1)$$

$$\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = Cr \quad (2)$$

$$\eta r\frac{dv_z}{dr} = Cr^2/2 + C'' \quad (3)$$

$$\eta\frac{dv_z}{dr} = Cr/2 + C''/r \quad (4)$$

D'après l'énoncé, dv_z/dr est bornée. Or C''/r n'est borné sur $[0, R]$ que si $C'' = 0$. Donc $\eta\frac{dv_z}{dr} = Cr/2$. Puis $v_z(r) = \frac{r^2C}{4\eta} + C'''$.

D'après la CI $v_z(R) = 0$, on obtient finalement $\boxed{v_z(r) = \dfrac{p_2 - p_1}{4L\eta}(r^2 - R^2)}$.

6. $\boxed{D_V = \iint_S \vec{v}.\vec{dS} = \dfrac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8L\eta}}$.
7. Analogie entre loi d'Ohm $I = \frac{1}{R}.\Delta V$ et ici : $D_V = \frac{1}{R_h}\Delta p$ avec $\boxed{R_h = 4L\eta/R^4}$. Cf cours électromagnétisme : $R = \frac{L}{\sigma\pi R^2}$.
   L'analogie est complète concernant la longueur L : la résistance électrique et hydraulique sont toutes les deux proportionnelles à L. On peut prolonger l'analogie en comparant $R_h \propto \eta$ et $R \propto 1/\sigma$, la viscosité s'interprète comme une résistivité. En revanche, l'analogie ne fonctionne pas concernant le rayon. On a ici $R_h \propto 1/R^4$ alors que la résistance électrique $R \propto 1/R^2$.
8. AN.

1.4 Sans utiliser Navier-Stokes

1. Utiliser $\mathrm{div}\,(\vec{v}) = 0$.
2. $\boxed{\vec{F_p} = \pi r^2(p(z) - p(z + \ell))\vec{u_z}}$
3. $\boxed{\vec{F_t} = \eta\dfrac{dv_z}{dr}2\pi r\ell\vec{u_z}}$
4. PFD avec accélération nulle, intégration, puis utilisation de la CI $v_z(r = a) = 0$.

2 Écoulements parfaits

2.1 Jet d'eau en sortie de robinet

1. La masse volumique est constante en tout point de l'écoulement, l'écoulement est donc incompressible. On a donc conservation du débit volumique, de sorte que :
   $$\pi D_0^2 v_0 = \pi D^2(z)v(z)$$
   d'où l'on déduit :
   $$\boxed{v(z) = \left(\frac{D_0}{D(z)}\right)^2 v_0}$$
2. Les conditions pour appliquer la relation de Bernoulli sont ici respectées (stationnaire, incompressible, parfait, irrotationnel, homogène). En se plaçant sur une ligne de courant à la périphérie de l'écoulement entre deux points de côte 0 et z, on obtient :
   $$\frac{p_0}{\mu_{\text{eau}}} + 0 + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p(z)}{\mu_{\text{eau}}} - gz + \frac{v^2(z)}{2}$$
   On a de plus $p(z) = p_0 + \mu_{\text{air}}gz \sim p_0$ à la périphérie de l'écoulement, d'où :
   $$\boxed{v(z) = \sqrt{v_0^2 + gz}}$$
3. $$\boxed{D(z) = \sqrt{\frac{v_0}{v(z)}}D_0 = \frac{D_0}{\left(1 + \dfrac{2gz}{v_0}\right)^{1/4}}}$$

2.2 Clepsydre

1. Pour un écoulement incompressible, le débit volumique se conserve. Donc $|dz/dt|S(z) = v_O s$.
   L'écoulement n'est pas stationnaire car la hauteur d'eau $z(t)$ varie. Mais comme $S(z) \gg s$, elle varie très lentement, on considère alors l'écoulement comme « quasi-stationnaire ». On applique alors la relation de Bernoulli sur la ligne de courant entre l'interface et O : $(dz/dt)^2/2 + gz = v_O^2/2$. Comme $s \ll S$: $v_O = \sqrt{2gz}$.
   On injecte alors cette expression dans la conservation du débit : $\boxed{\dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{s}{S(z)}\sqrt{2gz}}$ qui peut s'intégrer par séparation des variables.
2. On va intégrer entre deux instants tels que $z(t_1) = z_1$ et $z(t_2) = z_2$.

$$\frac{S(z)}{\sqrt{z}}dz = -s\sqrt{2g}dt \qquad (5)$$

$$\text{avec } S(z) = S_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^n : \quad \frac{S_0}{z_0^n}z^{n-1/2}dz = -s\sqrt{2g}dt \qquad (6)$$

$$\frac{S_0}{z_0^n}\int_{z_1}^{z_2} z^{n-1/2}dz = -s\sqrt{2g}\int_{t_1}^{t_2} dt \qquad (7)$$

   ⋆ Si $n \neq -1/2$:

$$\frac{S_0}{z_0^n}\left[\frac{z^{n+1/2}}{n+1/2}\right]_{z_1}^{z_2} = -s\sqrt{2g}T \qquad (8)$$

   Donc $\boxed{T = \dfrac{S_0}{z_0^n s\sqrt{2g}(n+1/2)}(z_1^{n+1/2} - z_2^{n+1/2})}$.
   ⋆ Si $n = -1/2$:

$$\frac{S_0}{z_0^n}\left[\ln(z)\right]_{t_1}^{z_2} = -s\sqrt{2g}T \qquad (9)$$

   Donc $\boxed{T = \dfrac{S_0}{z_0^n s\sqrt{2g}}\ln(z_1/z_2)}$.
3. Pour $n = 1/2$, la durée T est proportionnelle à la variation de niveau : $\boxed{T = \dfrac{S_0}{z_0^n s\sqrt{2g}(n+1/2)}(z_1 - z_2)}$. Ainsi, une clepsydre de profil $S(z) \propto \sqrt{z}$ peut être munie de graduations régulières pour y lire des durées.

2.3 Oscillations dans un tube en U

Cf exo de cours.

2.4 Cyclone et écoulement tourbillonnaire

1. ⋆ Méthode 1 : par théorème de Stokes $\oint \vec{v}.\vec{d\ell} = \iint_S \vec{\mathrm{rot}}(\vec{v}).\vec{dS} = 2\iint_S \vec{\Omega}.\vec{dS}$. Cf exo de cours chapitre MF1.
   ⋆ méthode 2 : par intégration directe : $2\vec{\Omega} = \vec{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\vec{u_z}$.

$$\boxed{v(r<R) = \Omega r} \qquad \boxed{v(r>R) = \Omega R^2/r} \qquad (10)$$

2. L'équation de Navier-Stokes donne $-\mu v^2/r = -dp/dr$.
   ⋆ Si $r > R$: $dp/dr = \mu\Omega^2R^4/r^3$. Donc $p(r) = -2\mu\Omega^2R^4/r^2 + A$. Loin du tourbillon, p doit tendre vers p_0. Donc $\boxed{p(r>R) = p_0 - 2\mu\Omega^2R^4/r^2}$.
   ⋆ Si $r < R$: $dp/dr = \mu\Omega^2 r$. Donc $p(r) = \mu\Omega^2r^2/2 + B$. Puis condition aux limites en R pour trouver $B = p_0 - 5\mu\Omega^2R^2/2$. Donc $\boxed{p(r<R) = p_0 - 5\mu\Omega^2R^2/2 + \mu\Omega^2r^2/2}$.
   Globalement, on trouve $p < p_0$. Ce tourbillon correspond à une dépression.