TDMF4 : Bilans macroscopiques - Correction

1 Force sur une canalisation

a) Fluide parfait incompressible, donc d'après relation de Bernoulli sur la ligne de courant A_1A_2 : $\boxed{P_1 + \mu V_1^2/2 = P_2 + \mu V_2^2/2}$.

b) Écoulement stationnaire incompressible, donc conservation du débit massique donne $\boxed{\mu V_1 S_1 = \mu V_2 S_2}$.

c) Bilan de quantité de mouvement sur un système fermé Σ bien choisi pendant dt (**schéma indispensable**) :

$$\overrightarrow{p}(t+dt) - \overrightarrow{p}(t) = D_m.dt.\left(V_2(\cos\theta\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\overrightarrow{u_y})\right) - D_m.dt.V_1\overrightarrow{u_x} \quad (1)$$

Bilans des forces subies par Σ, avec $\overrightarrow{F}_{t\to f}$ la force du tuyau sur le fluide :

$$\overrightarrow{F}_{\text{tot}} = P_1S_1\overrightarrow{u_x} - P_2S_2(\cos\theta\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\overrightarrow{u_y}) + \overrightarrow{F}_{t\to f} \quad (2)$$

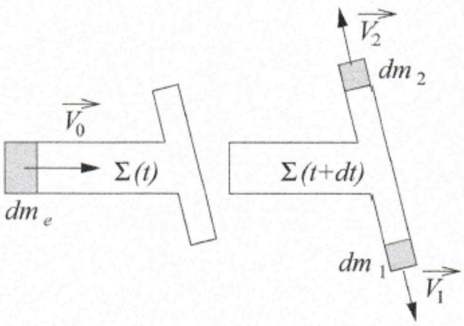
D'après le PFD appliqué à Σ dans le ref terrestre, $\overrightarrow{p}(t+dt) - \overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{F}_{\text{tot}}dt$. Donc, en utilisant $D_m = \mu S_1 V_1 = \mu S_2 V_2$:

$$\overrightarrow{F}_{t\to f} = \left[-(\mu V_1^2 + P_1)S_1 + (\mu V_2^2 + P_2)S_2\cos\theta\right]\overrightarrow{u_x} + \left[(P_2 + \mu V_2^2)S_2\sin\theta\right]\overrightarrow{u_y} \quad (3)$$

Je ne suis pas certain que cela se simplifie bien en utilisant la relation de Bernoulli...

2 Action d'un jet sur une plaque fixe

a) Choisissons une surface de contrôle qui englobe les trois branches du jet. Le système étudié est formé de l'eau $\Sigma(t)$ contenue dans cette surface et de la masse entrante dm_e à la date t, et de l'eau $\Sigma(t+dt)$ contenue dans cette surface et les deux masses sortantes dm_1 et dm_2 à la date $t+dt$.



La conservation de la masse donne

$$m_\Sigma(t+dt) + dm_1 + dm_2 = m_\Sigma(t) + dm_e$$

$$\text{soit } \mu V_0 e L dt = \mu V_1 e_1 L dt + \mu V_2 e_2 L dt$$

$$\text{donc } eV_0 = e_1V_1 + e_2V_2$$

La loi de Bernoulli entre un point à l'entrée et un point à l'une des deux sorties donne

$$\begin{cases} P_0 + \frac{1}{2}\mu V_0^2 + 0 = P_0 + \frac{1}{2}\mu V_1^2 + 0 \\ P_0 + \frac{1}{2}\mu V_0^2 + 0 = P_0 + \frac{1}{2}\mu V_2^2 + 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } V_0 = V_1 = V_2 \text{ donc } e = e_1 + e_2$$

Le fluide étant non visqueux, la force exercée par le fluide sur la plaque est perpendiculaire à celle-ci, donc dirigée selon $\vec{n}$. Les forces de pression de l'air sur la face de droite de la plaque sont elles-aussi selon $\vec{n}$. La plaque étant immobile, $\vec{F}$ est donc elle-aussi dans cette direction, soit

$$\vec{F} = -F\vec{n}$$

Considérons le système Σ' formé de la juxtaposition de la plaque et du système fluide Σ considéré ci-dessus. Les forces d'interaction entre la plaque et l'eau sont des forces intérieures et leur somme est donc nulle. L'intérêt de ce choix est que la somme des forces de pression de l'air est nulle car ce système baigne dans l'air à la pression uniforme P_0. La seule force extérieure est donc $\vec{F}$ puisqu'on néglige le poids. Appliquons maintenant la loi de la quantité de mouvement.

$$\vec{F} = \frac{\left[\vec{P}_{\Sigma'}(t+dt) + dm_1\vec{V}_1 + dm_2\vec{V}_2\right] - \left[\vec{P}_{\Sigma'}(t) + dm_e\vec{V}_0\right]}{dt}$$

$$\vec{F} = \mu V_0^2 e_1 L\vec{\tau} + \mu V_0^2 e_2 L(-\vec{\tau}) - \mu V_0^2 e L\vec{u}_x$$

En projetant sur l'axe $\vec{\tau}$, on obtient

$$\mu V_0^2 e_1 L - \mu V_0^2 e_2 L + \mu V_0^2 e L \sin\alpha = 0$$

$$\text{soit } e_1 - e_2 = e\sin\alpha$$

Le système se résout aisément :

$$\left.\begin{array}{l} e = e_1 + e_2 \\ e_1 - e_2 = e\sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{e}{2}(1+\sin\alpha) \\ e_2 = \frac{e}{2}(1-\sin\alpha) \end{cases}$$

b) En projetant la loi de la quantité de mouvement sur l'
$\vec{n}$:

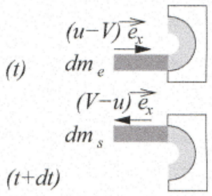
$$-F = -\mu V_0^2 e L\cos\alpha \text{ donc } \vec{F} = -\mu V_0^2 e L \cos\alpha\vec{n}$$

3 Auget mobile

a) Le référentiel adapté au problème est celui de l'auget, en translation à la vitesse $V\vec{u}_x$. Dans ce référentiel, on est en régime permanent. L'eau arrive, par composition des vitesses, à la vitesse relative $(u-V)\vec{u}_x$. Comme la section du jet de retour est la même que celle du jet incident, et comme l'eau est incompressible, la conservation du débit entraîne celle de la vitesse. Le jet de retour a donc une vitesse $-(u-V)\vec{u}_x$ dans le référentiel de l'auget, donc sa vitesse dans le référentiel terrestre est

$$-(u-V)\vec{u}_x + V\vec{u}_x = (2V-u)\vec{u}_x$$

b) On effectue un bilan de quantité de mmouvement sur le système ouvert formé de l'eau ($\Sigma(t)$) dans l'auget et de la masse entrante dm_e à la date t, de l'eau dans l'auget ($\Sigma(t+dt)$) et de la masse sortante dm_s à la date $t+dt$.



Comme on néglige les forces de pression de l'air, ce système est soumis à la force exercée par l'auget sur l'eau. La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{f}_{\text{aug}\to\text{eau}} = \frac{\left[\vec{P}_\Sigma(t+dt) + dm_s(V-u)\vec{u}_x\right] - \left[\vec{P}_\Sigma(t) + dm_e(u-V)\vec{u}_x\right]}{dt}$$

On est en régime permanent donc

$$\vec{P}_\Sigma(t+dt) = \vec{P}_\Sigma(t)$$

Les masses entrante et sortante sont égales :

$$dm_e = dm_s = \mu(u-V)s\,dt$$

On en déduit

$$\vec{f}_{\text{aug}\to\text{eau}} = -2\mu s(u-V)^2\vec{u}_x$$

et par principe d'action-réaction :

$$\vec{f}_{\text{eau}\to\text{aug}} = 2\mu s(u-V)^2\vec{u}_x$$

c) La puissance de la force du jet est exprimée dans le référentiel terrestre :

$$\mathscr{P} = \vec{f}_{\text{eau}\to\text{aug}}\cdot\vec{V} = 2\mu s(u-V)^2 V$$

d) La puissance cinétique incidente est celle du jet. Pendant dt, une masse $\mu u s dt$ d'eau est fournie à la vitesse u donc

$$\mathscr{P}_c = \frac{\frac{1}{2}\mu u s dt\cdot u^2}{dt} = \frac{1}{2}\mu s u^3$$

Le rendement est donc

$$\rho = \frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_c} = \frac{2\mu s(u-V)^2 V}{\frac{1}{2}\mu s u^3}$$

$$\text{soit } \rho = 4\frac{(u-V)^2 V}{u^3}$$

À V fixé, ρ est une fonction de u dont la dérivée est

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} = \frac{4(u-V)V(3V-u)}{u^4}$$

Elle est maximale quand cette dérivée est nulle donc pour $u = 3V$ et $\rho_{max} = \frac{16}{27}$. À u fixé, ρ est une fonction de V dont la dérivée est

$$\frac{\partial\rho}{\partial V} = \frac{4(u-V)(u-3V)}{u^3}$$

Elle est maximale quand cette dérivée est nulle, donc là-aussi pour $u = 3V$ et $\rho_{max} = \frac{16}{27}$.

4 Éolienne

1. Pour cet écoulement incompressible, l'élargissement du tube de courant correspond à une diminution de la vitesse : $v_1 < v_0$.

2. On fait un bilan de quantité de mouvement sur tout le tube de courant :

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{\text{com}}(t) + \mu S_0 v_0 \mathrm{d}t\,\vec{v}_0\,,$$
$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}_{\text{com}}(t+\mathrm{d}t) + \mu S_1 v_1 \mathrm{d}t\,\vec{v}_1\,.$$

L'écoulement est stationnaire, donc : $\vec{P}_{\text{com}}(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}_{\text{com}}(t)$. La résultante des forces de pression est nulle (pression uniforme sur une surface fermée). D'où, sachant que $\mu S_0 v_0 = \mu S_1 v_1$ (conservation du débit) :

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \mu S_0 v_0(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\,.$$

3. On fait maintenant un bilan de quantité de mouvement sur le système compris entre les surfaces (A) et (B). On montre que $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ (même vitesse en A et B). D'où :

$$\vec{0} = \vec{F} + S_R(P_A - P_B)\vec{u}_x + \iint_{S_{\text{lat}}} P_0\vec{n}\,\mathrm{d}S\,.$$

On écrit la relation de Bernoulli entre la surface d'entrée et la surface (A), puis entre la surface (B) et la sortie :

$$P_0 + \frac{1}{2}\mu v_0^2 = P_A + \frac{1}{2}\mu v_R^2\,,$$
$$P_0 + \frac{1}{2}\mu v_1^2 = P_B + \frac{1}{2}\mu v_R^2\,.$$

On en déduit que $S_R(P_A - P_B) = S_R P_0 - S_R P_0 + \frac{1}{2} S_R \mu (v_0^2 - v_1^2)$. D'où :

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \vec{F} + S_R(P_A - P_B)\vec{u}_x + \iint_{S_{\text{lat}}} P_0 \vec{n} \mathrm{d}S, \\
&= \vec{F} + \frac{1}{2} S_R \mu (v_0^2 - v_1^2)\vec{u}_x + S_R P_0 \vec{u}_x - S_R P_0 \vec{u}_x + \iint_{S_{\text{lat}}} P_0 \vec{n} \mathrm{d}S, \\
&= \vec{F} + \frac{1}{2} S_R \mu (v_0^2 - v_1^2)\vec{u}_x + \oiint_S P_0 \vec{n} \mathrm{d}S, \\
&= \vec{F} + \frac{1}{2} S_R \mu (v_0^2 - v_1^2)\vec{u}_x .
\end{aligned}$$

On en déduit $\vec{F} = \frac{1}{2} S_R \mu (v_1^2 - v_0^2)\vec{u}_x$. Grâce aux deux expressions de $\vec{F}$ et en utilisant la conservation du débit, on montre :

$$v_R = \frac{v_0 + v_1}{2}.$$

4. On détermine la puissance grâce à un bilan d'énergie cinétique pour le système global :

$$E_c(t) = E_{c,\text{com}}(t) + \frac{1}{2}\mu S_0 v_0^3 \mathrm{d}t,$$
$$E_c(t+\mathrm{d}t) = E_{c,\text{com}}(t+\mathrm{d}t) + \frac{1}{2}\mu S_0 v_0 v_1^2 \mathrm{d}t.$$

On en déduit : $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mu S_0 v_0 (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}\mu S_R v_R (v_1^2 - v_0^2)$. Le théorème de l'énergie cinétique donne $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{P}$. D'où :

$$\mathscr{P} = \frac{1}{4}\mu S_R (v_0 + v_1)(v_0^2 - v_1^2) = \frac{1}{4}\mu S_R v_0^3 (1+\alpha)(1-\alpha^2).$$

On calcule ensuite $\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{4}\mu S_R v_0^3 \left[1 - 2\alpha - 3\alpha^2\right]$. L'annulation de cette dérivée se produit pour $\alpha = 1/3$, ce qui donne : $\mathscr{P}_{\max} = \frac{8}{27}\mu S_R v_0^3$.

5. La formule établie plus haut donne $\mathscr{P}_{\max} = 700$ W pour la petite éolienne : ce résultat est correct. Par contre, pour la plus grande éolienne, la formule ci-dessus donne 2,125 MW. Le modèle étudié ne s'applique pas au cas de la grande éolienne.

5 Hydroglisseur

1. BDF : poids et pression de l'air. PFD à l'équilibre : $P_i S - P_a S - Mg = 0$ donc $\boxed{P_i = P_a + Mg/S}$, en négligeant le trou s devant S.
2. Conservation débit entre entrée et sortie : $V_e s = V_s 2\pi R h$. Bernoulli entre juste après le ventilateur et la sortie : $P_i + \mu V_e^2/2 = P_a + \mu V_s^2/2$ en négligeant la pesanteur. Alors $\frac{Mg}{S} + \frac{1}{2}\mu V_s^2 \frac{4\pi^2 R^2 h^2}{s^2} = \frac{1}{2}\mu V_s^2$. Etc. $\boxed{V_s = 4,27 \text{ m/s}}$ et $\boxed{V_e = 4,02 \text{ m/s}}$.
3. Comme la pesanteur est négligée et que la vitesse V_e est conservée, le bilan d'énergie cinétique donne $0 = P_a s V_e - P_i s V_e + \mathcal{P}$ en prenant en compte le travail des forces de pression. Donc $\boxed{\mathcal{P} = (P_i - P_a) s V_e = Mg V_e s/S = 4,1 \text{ kW}}$.

6 Propulsion d'une fusée

1. $\boxed{m(t) = m_0 - D_m t}$.
2. Bilan de quantité de mouvement de S^* dans le ref terrestre :

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) + D_m.dt.(\vec{u} + \vec{v}) - m(t)\vec{v}(t) = \frac{d(m\vec{v})}{dt}dt + D_m.dt.(\vec{u} + \vec{v}) \tag{4}$$

Égal d'après le PFD sur S^* dans le ref terrestre à $m(t)\vec{g}.dt$. Alors : $m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} + D_m\vec{u} = m(t)\vec{g}$. En projetant sur $\vec{e_z}$ ascendant : $\boxed{m(t)\frac{dv}{dt} = D_m u - m(t) g}$.

3. Le décollage est possible ($dv/dt > 0$) si $D_m u > m_0 g$. On obtient :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{D_m u}{m_0 - D_m t} - g \tag{5}$$

Qui s'intègre par séparation des variables :

$$\int_{v(0)=0}^{v(t)} dv = \int_{t=0}^{t} \frac{D_m u}{m_0 - D_m t'} dt' - \int_{t=0}^{t} g dt' \tag{6}$$

$$\boxed{v(t) = -u \ln\left(1 - \frac{D_m t}{m_0}\right) - gt} \tag{7}$$

4. Si on considère que le réacteur apporte une force $-D_m \overrightarrow{u}$, alors sa puissance est $\boxed{\mathcal{P} = D_m u v(t)}$.

7 Jet-pack ballistique

Voici la réponse en anglais : `https://what-if.xkcd.com/21/`.