1 Mesure de masse volumique par ondes stationnaires d'une corde

La célérité est $c = \sqrt{T_0/\mu_l}$. On déduit des deux expériences qu'on observe les modes $n = 2$ et $n = 4$ avec seule la tension qui change. Cas 1 : $T_1 = mg = \rho V g$, cas 2 : $T_2 = (\rho - \rho_e)V g$ en prenant en compte la poussée d'Archimède due à l'eau de masse volumique ρ_e. En utilisant le lien entre c et n, on obtient $T_1 = 4T_2$. Puis $\rho = (4/3)\rho_e = 1,3.10^3$ kg.m^{-3}.

2 Modèle microscopique du module de Young

1. Énergie de liaison $\mathcal{E} \simeq 1$ eV $\simeq 10^{-19}$ J. Distance entre atomes $a =\simeq 10^{-10}$ m. Donc $\boxed{k \simeq \mathcal{E}/a^2 = 10 \text{ N.m}^{-1}}$.
2. $\boxed{N_{\text{face}} = S/a^2}$
3. $\boxed{N_{\text{longueur}} = L/a}$
4. $\boxed{\Delta L = N_{\text{longueur}} \Delta x}$
5. $\boxed{F = N_{\text{face}} k \Delta x}$
6. $\boxed{E = (F/S)/(\Delta L/L) = k/a = 10^{11} \text{ Pa}}$

3 Vibration longitudinale d'un ressort : au delà de l'ARQS

1. Considérons la tranche de ressort de longueur dx, masse $dm = \mu dx$, soumis aux forces de rappel de chaque côté. Le PFD dans le référentiel terrestre appliqué au système donne $\mu dx \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x) + F(x+dx) = -K\dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x) + K\dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x+dx) = K\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx$ au premier ordre. Donc $\boxed{\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \dfrac{K}{\mu}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0}$ donc célérité $\boxed{c = \sqrt{K/\mu}}$
2. La condition aux limites en $x = 0$ est $x + \xi(x = 0, t) = 0$ car fixe en O donc $\boxed{\xi(x = 0, t) = 0}$. La condition en $x = L$ est $L + \xi(x = L, t) = X(t) + L$ donc $\boxed{\xi(x = L, t) = X(t)}$.
3. L'équation de d'Alembert devient dans l'ARQS $\partial^2\xi/\partial x^2 = 0$. Donc $\xi(x, t) = f(t).x + g(t)$ en intégrant deux fois par rapport à x. Puis en utilisant les conditions aux limites $\boxed{\xi(t) = X(t)x/L}$.
4. La force exercée par le ressort sur la masse est alors $\overrightarrow{F} = -K\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\overrightarrow{u_x} = -KX/L\overrightarrow{u_x}$ donc $\boxed{k = K/L}$.
5. En appliquant le PFD à la masse, on obtient une équation d'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_{arqs} = \sqrt{k/m} = \sqrt{K/(Lm)}$. L'ARQS est valide si la durée de propagation de l'onde τ sur la longueur du ressort est négligeable devant la période T des oscillations de la masse. $T \gg \tau$ donne $2\pi/\omega_{arqs} \gg L/c = L\sqrt{\mu/K}$. Donc $\boxed{m \gg \mu L}$.
6. En injectant la forme $\xi(x, t) = f(x)\cos(\omega t)$ dans l'équation de d'Alembert, on arrive à $d^2f/dx^2 + (\omega^2/c^2)f = 0$. Équation d'oscillateur harmonique de solution générale $f(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$. En utilisant la condition $\xi(x = 0, t) = 0$, on a $f(0) = 0$ donc $A = 0$. Alors $\boxed{f(x) = B\sin(\omega x/c)}$.
7. PFD $m\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x = L) = K\dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x = L)$. Donc $\omega^2 mB\sin(\omega L/c)\cos(\omega t) = (\omega/c)KB\cos(\omega L/c)\cos(\omega t)$. Ainsi, $\boxed{\tan\left(\dfrac{\omega L}{c}\right) = \dfrac{K}{m\omega c}}$.

   On trace $\tan\left(\dfrac{\omega L}{c}\right)$ en fonction de ω. On trace $\dfrac{K}{m\omega c}$ en fonction de ω. On remarque que ces deux courbes se croisent une infinité de fois.
8. Recherche dichotomique classique.
9. Le DL3 donne après réarrangement $\omega^2(1 + \omega^2L^2/(3c^2)) = K/(mL)$. On souhaite reconnaître une équation de type $\omega^2 = k/m^*$. À partir de là, deux méthodes possibles, une rapide du type « méthode des perturbations » rapide, et une autre méthode plus frontale mais très calculatoire.

⋆ méthode rapide : On a $\omega^2 = \frac{k}{m(1+\omega^2 L^2/(3c^2))}$. À l'ordre minimal, on obtient $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ qu'on injecte dans l'expression précédente. Alors $\omega^2 = \frac{k}{m(1+\frac{k}{m}L^2/(3c^2))}$. Donc comme si on avait remplacé m par $m^* = m(1+\mu L/(3m)) = m + \mu L/3$.

⋆ méthode calculatoire : J'imagine qu'il y a plus efficace vu le nombre d'étapes et de DL... mais voici une résolution. Le DL3 donne l'équation $X + X/3 - Y = 0$ avec $X = \omega^2 L^2/c^2 > 0$ et $Y = \mu L/m \ll 1$. La seule solution positive est $X = \frac{-1+\sqrt{1+4Y/3}}{2/3}$. Un DL2 en Y donne $X = Y - Y^2/3$. En utilisant les expressions de X et Y et celles de c et K, on obtient $\omega^2 = \frac{K}{mL} - \frac{1}{3}\frac{\mu K}{m^2}$. Alors $m^* = \frac{k}{\omega^2} = \frac{1}{1/m-(1/3)\mu L/m^2} = \frac{m}{1-\mu L/(3m)} = m + \mu L/3$ par un dernier DL.

4 Mesure de module de Young d'un acier

Onde stationnaire aux conditions symétriques : $f_n = nc/(2L)$. En traçant f_n en fonction de n, pente $p = 3647,7$ Hz, donc célérité $c = 5118$ m.s^{-1}. Donc module de Young $E = c^2\rho = 207,4$ GPa.

5 Équation de d'Alembert dans un câble coaxial

1. La loi des nœuds s'écrit :

$$i(x,t) - i(x+\mathrm{d}x,t) = j(x,t) = \Gamma\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial v}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t).$$

Avec un développement de Taylor d'ordre 1 :

$$-\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = \Gamma\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial v}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t).$$

Pour évaluer le membre de droite à l'ordre 1 en dx, on peut évaluer le terme $\partial v/\partial t\,(x+\mathrm{d}x,t)$ à l'ordre zéro car il est en facteur de l'infiniment petit dx. Ainsi :

$$-\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = \Gamma\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial v}{\partial t}(x,t).$$

Puis en divisant par dx :

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma\,\frac{\partial v}{\partial t}}. \qquad (1)$$

De même la loi des mailles s'écrit :

$$v(x,t) - v(x+\mathrm{d}x,t) = \Lambda\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial i}{\partial t} = -\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Et en simplifiant par dx, nous obtenons la deuxième équation cherchée :

$$\boxed{-\frac{\partial v}{\partial x} = \Lambda\,\frac{\partial i}{\partial t}}. \qquad (2)$$

2. En dérivant (1) par rapport à t et (2) par rapport à x et en utilisant le théorème de Schwarz, nous éliminons le courant i :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t} = -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial x} = -\,\Gamma\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

D'où l'équation de propagation de v :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}}.$$

De même, en dérivant (1) par rapport à x et (2) par rapport à t, nous éliminons v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x} = -\,\Lambda\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}.$$

D'où l'équation de propagation de i :

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}}.$$

3. Considérons une onde progressive harmonique se propageant selon $+\,\overrightarrow{u_x}$ de la forme :

$$v(x,t) = V_M\cos(\omega t - kx - \varphi) \quad \text{et} \quad i(x,t) = I_M\cos(\omega t - kx - \psi).$$

Introduisons les ondes complexes associées en posant $\underline{V}_M = V_M\exp(-\,j\varphi)$ et $\underline{I}_M = I_M\exp(-\,j\psi)$:

$$\underline{v}(x,t) = \underline{V}_M\exp(j\omega t - jkx) \quad \text{et} \quad \underline{i}(x,t) = \underline{I}_M\exp(j\omega t - jkx).$$

En notation complexe, les dérivations par rapport à x et t se transforment en de simples multiplications et les équations (1) et (2) se transcrivent en :

$$-\,jk\,\underline{i} = -\,\Gamma\,j\omega\,\underline{v} \quad (1) \quad \text{et} \quad -\,jk\,\underline{v} = -\,\Lambda\,j\omega\,\underline{i} \quad (2) \quad \text{soit} \quad \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{k}{\Gamma\,\omega} = \frac{\Lambda\,\omega}{k}.$$

Nous obtenons ainsi la relation de dispersion attendue pour des solutions d'une équation de d'Alembert :

$$k^2 = \Gamma\,\Lambda\,\omega^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{k = \frac{\omega}{c}}.$$

Nous obtenons en outre une relation entre le courant et la tension :

$$\frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \quad \text{soit} \quad \underline{v} = Z_c\,\underline{i} \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}.$$

En repassant aux parties réelles et en remarquant que Z_c est réelle, nous obtenons la relation attendue entre le courant et la tension qui fait apparaître une constante Z_c caractéristique de la ligne et homogène à une impédance qu'on appelle naturellement *impédance caractéristique de la ligne* :

$$\boxed{v(x,t) = Z_c\, i(x,t)} \quad \text{avec} \quad \boxed{Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}.$$

Pour une onde régressive, c'est-à-dire se propageant selon $-\overrightarrow{u_x}$, il suffit de changer k en $-k$ dans les calculs et il vient :

$$\boxed{v(x,t) = -Z_c\, i(x,t)} \quad \text{avec} \quad \boxed{Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}.$$

6 Ondes stationnaires dans un câble coaxial

1. En utilisant une des deux relations $u \leftrightarrow i$, on trouve $i(x,t)$ en $\sin(kx)$ si $u(x,t)$ en $\cos(kx)$. Donc l'un est d'amplitude minimale quand l'autre est d'amplitude maximale.
2. Circuit ouvert donc $i = 0$ donc nœud de courant (et donc ventre de tension).
3. Court-circuit donc $u = 0$ donc nœud de tension (et donc ventre de courant).
4. Utiliser $f_n = nc/(2L)$.