1 Problème-type

1.1 Onde acoustique progressive

1. Conservation de la masse : $\boxed{\mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) + \partial\rho/\partial t = 0}$. Linéarisation : $\boxed{\mu_0 \mathrm{div}\,(\vec{v}) + \partial\mu/\partial t = 0}$.
2. Équation d'Euler $\boxed{\rho\dfrac{\partial v}{\partial t} + \rho v.\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial x}}$. Linéarisation : $\boxed{\mu_0\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}}$.
3. $\boxed{\mu = \mu_0\chi_S p}$.
4. On obtient l'équation de d'Alembert : $\boxed{\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\mu_0\chi_S}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0}$. Donc $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}}}$.
5. $\boxed{\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\mu_0\chi_S}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0}$.
6. $\boxed{p(x,t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)}$. Superposition d'ondes progressives selon $\pm\vec{e_x}$.

1.2 Célérité dans le modèle du gaz parfait

7. Loi de Laplace d'un gaz parfait lors d'une transformation isentropique $\boxed{pV^\gamma = \mathrm{cte}}$. Puis, comme à T constante pour un gaz parfait $\rho = \mathrm{cte}/V$, $\boxed{P\rho^{-\gamma} = \mathrm{cte}}$.
8. Alors $\chi_S = \frac{1}{\gamma P}$ puis $c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$.
9. À $T = 20\,^\circ\mathrm{C}$:

$$c = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,314 \times (273 + 20)}{29.10^{-3}}} = 343 \text{ m.s}^{-1} \tag{1}$$

2 Jouer avec les décibels

1. Notons I_1 et $I_2 = 2I_1$ l'intensité sonore respectivement dans le cas de 1 et 2 pétards. De même, en dB, I_{dB1} et I_{dB2}. On a $I_{dB2} = 10\log(I_2/I_0) = 10\log(2I_1/I_0) = 10\log(2) + I_{dB1}$. Donc :

$$I_{dB1} = I_{dB2} - 10\log(2) = 90 - 3 \boxed{= 87 \text{ dB}} \tag{2}$$

2. L'intensité est proportionnelle à la surpression au carré. Donc tripler la surpression multiplie l'intensité par 9 : $I' = 9I$. Alors $I'_{dB} = 10\log(9) + I_{dB}$. Donc une augmentation de $\boxed{\Delta I_{dB} = 10\log(9) = 9,5}$.
3. Comme $v = \partial\xi/\partial t$, amplitude de vitesse et de déplacement sont reliées par $v_m = \omega\xi_m$. Donc $I = \mu_0 c(\omega\xi_m)^2/2$. Donc $\boxed{I_{dB} = 10\log(4\pi^2\mu_0 c f^2\xi_m^2/(2I_0))}$. En absence de données de l'énoncé, prendre pour l'air en conditions ambiantes $\mu_0 \simeq 1$ kg.m^{-3} et $c \simeq 340$ m.s^{-1}.

3 Ordres de grandeurs en acoustique

1. $I_{dB} = 10\log(I/I_0)$. Donc $I = I_0 \times 10^{I_{dB}/10}$. Puis $\boxed{p_m = \sqrt{2\mu_0 c 10^{I_{dB}/10}}}$. On trouve p_m négligeable devant la pression ambiante.
2. Euler linéarisé : $\mu_0\partial v/\partial t = -\partial p/\partial x$. On insère une OPPH réelle ou complexe pour obtenir $p_m = \pm\mu_0 c v_m$. On trouve une amplitude de vitesse très faible devant la vitesse du son.
3. $\xi_m = v_m/\omega$. On trouve une amplitude de déplacement faible devant la taille des systèmes acoustiques.

4 Valeurs des paramètres d'une onde sphérique

1. $< R >= 0,8$ W.m^{-2}.
2. $I_{dB} = 120$ dB, c'est bien un son très intense.

3. On a $\mathcal{P} = 4\pi r^2 < R >= 2\pi A^2/(\rho_0 c)$. Donc $p_{1m} = 1/D = \sqrt{\frac{\rho_0 c \mathcal{P}}{2\pi d^2}} = 27$ Pa. On trouve bien $p_{1m} \ll p_0$.
4. En intégrant Euler en OPPH complexe : $\rho_0 v_1 = \frac{A}{r\omega}(k - j/r)\exp(j(\omega t - kr))$. Donc $v_{1m} = \frac{A}{\rho_0 d\omega}\sqrt{k^2 + 1/d^2} = 0,06$ m.s^{-1} négligeable devant c.
5. On prend l'argument de l'expression complexe de vitesse : $\phi = \arctan(1/(kd) = 5.10^{-3}$.
6. $< e >= 2,4.10^{-3}$ Pa.

5 Fréquences propres d'une sphère rigide

1. Le terme en $(\omega t - kr)$ concerne une onde sphérique divergente et $(\omega t + kr)$ une onde sphérique convergente. On remarque que $p \propto 1/r$. Comme l'intensité sonore est reliée à la pression par $I \propto p^2$, on obtient $I \propto 1/r^2$. Ainsi le flux énergétique à travers des sphères centrées sur la source se conserve : $\Phi = I(r) \times 4\pi r^2 = \text{cte}$.
2. Équation de d'Alembert tridimensionnelle pour p : $\partial^2 p/\partial t^2 - \frac{1}{\mu_0 \chi_S}\Delta p = 0$. Qui donne $\partial^2(rp)/\partial t^2 - \frac{1}{\mu_0\chi_S}\partial^2(rp)/\partial r^2 = 0$. C'est une équation de d'Alembert unidimensionnelle suivant x pour la fonction $(r \times p(r,t))$. Les solutions générales sont les ondes progressives qu'ont peut décomposer en OPPH : $(r \times p(r,t)) = A\exp(j(\omega t - kr)) + B\exp(j(\omega t + kr))$. On en en déduit l'expression fournie de $p(r,t)$.
3. Équation d'Euler linéarisée : $\mu_0 \partial\overrightarrow{v}/\partial t = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \dfrac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{e_r}$. On trouve :

$$v(r,t) = \frac{1}{j\mu_0\omega r^2}\left(A(1 + jkr)\exp(j(\omega t - kr)) + B(1 - jkr)\exp(j(\omega t + kr))\right) \tag{3}$$

   En prenant la partie réelle, on obtient des fonctions du type $f(r) \times \cos(\omega t)$ ou $f(r) \times \sin(\omega t)$, ce sont des ondes stationnaires.
4. Le débit massique à travers une sphère de rayon r est $D_m(r) = \mu_0 v(r,t) 4\pi r^2$. Il doit être nul en $r = 0$. Donc $A = -B$. Alors :

$$\boxed{p(r,t) = -\frac{2jA}{r}\cdot\exp(j\omega t)\cdot\sin(kr)} \tag{4}$$

$$\boxed{v(r,t) = \frac{2A}{j\mu_0\omega r^2}\cdot\exp(j\omega t)\cdot(-2j\sin(kr) + 2jkr\cos(kr))} \tag{5}$$

5. La sphère est rigide donc $v(r = R, t) = 0$. On en déduit $\boxed{\tan(kR) = kR}$.

6 Note fondamentale d'un instrument à vent

Un instrument à vent peut être modélisé par un tuyau de longueur L vérifiant à ses extrémités une des deux conditions aux limites : tuyau ouvert ou fermé. On parle de jeu de conditions aux limites *pair* si les conditions aux deux extrémités sont de même nature, et *impair* sinon. On suppose $c = 340$ m.s^{-1}.

1. Pair : $f_n = nc/(2L)$ donc fondamental $f_1 = c/2L$. Impair : $f_n = (2n+1)c/(4L)$, $f_0 = c/4L$.
2. Pair donc $L = c/2f = 51,5$ cm.
3. Impair donc fondamental de fréquence deux fois plus faible donc plus grave que la flûte.
4. $c/2L$ donne la bonne fréquence donc pair.

7 Propagation dans un tuyau déformable (**)

1. Considérons le système ouvert compris au repos entre les plans d'abscisses x et $x+\mathrm{d}x$.
- À l'instant t, il contient la masse $\mathrm{d}m(t) = (\mu S)(x,t)\mathrm{d}x$.
- À l'instant $t+\mathrm{d}t$, il contient la masse $\mathrm{d}m(t+\mathrm{d}t) = (\mu S)(x,t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}x$.
- Entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, il y entre la masse $\delta m_e = (\mu S v)(x,t)\mathrm{d}t$.
- Entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, il en sort la masse $\delta m_s = (\mu S v)(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}t$.

La conservation de la masse de ce système s'écrit :

$$\mathrm{d}m(t+\mathrm{d}t) = \mathrm{d}m(t) + \delta m_e - \delta m_s$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\mu S)}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \frac{\partial(\mu S v)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

au premier ordre en $\mathrm{d}t\mathrm{d}x$.

L'équation de conservation de la masse s'écrit donc : $\dfrac{\partial(\mu S)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\mu S v)}{\partial x} = 0$.

Sachant que $\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$, que $S(x,t) = S_0 + S_1(x,t)$ et que v est lui-même petit, elle se linéarise en :

$$\mu_0\frac{\partial S_1}{\partial x}(x,t) + S_0\frac{\partial \mu_1}{\partial x}(x,t) + \mu_0 S_0\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = 0. \qquad (26.21)$$

L'équation d'évolution du fluide $\mu = \mu(P)$ permet d'écrire $\mu_1 = \mu_0\chi_0 p_1$ où χ_0 est la compressibilité au repos.

De même, on peut écrire $S(P) = S(P_0 + p_1) = S_0 + p_1\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}P}(P_0) = S_0 + p_1 S_0 D_0$ où D_0 est la distensibilité au repos. On en déduit : $S_1(x,t) = S_0 D_0 p_1(x,t)$. L'équation (26.21) s'écrit, après simplification par μ_0 :

$$(D_0+\chi_0)\frac{\partial p_1}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 0$$

2. En combinant l'équation ci-dessus avec l'équation d'Euler linéarisée, $\mu_0\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x}$, on trouve l'équation vérifiée par p_1 :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x,t) = \mu_0(D_0+\chi_0)\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x,t).$$

La vitesse v vérifie la même équation. La célérité des ondes sonores dans le tuyau est bien : $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0(D_0+\chi_0)}}$. Si le tuyau est parfaitement rigide ($D_0 = 0$), nous retrouvons les résultats du cours. Par ailleurs, une onde sonore peut se propager dans un tuyau même si on considère le fluide comme incompressible ($\chi_0 = 0$).

3. L'expression de la célérité de l'onde se transforme en :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0(D_0+\chi_0)}} = \frac{c_s}{\sqrt{1+c_s^2\mu_0 D_0}},$$

avec $c_s = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_0}}$. L'application numérique donne :
- pour le tube métallique, $c_m = 1{,}4\times10^3$ m.s^{-1} ;
- pour le vaisseau sanguin, $c_v = 5{,}0$ m.s^{-1}

Le tube métallique a une distensibilité très faible, sa section varie peu sous l'effet de l'onde sonore, la vitesse du son y est voisine de celle du son dans un tuyau rigide. En revanche, les parois du vaisseau sanguin sont très souples et l'élasticité du vaisseau modifie fortement la vitesse des ondes sonores.

4. Si aucune onde ne provient de l'infini, les ondes sont des ondes planes progressives dans le sens croissant de l'axe Ox donc $v(x,t)$ est de la forme : $v(x,t) = v\left(0, t-\dfrac{x}{c}\right)$. Or, au premier ordre, $D_m(t) = \mu_0 S_0 v(0,t)$ donc :

$$\begin{cases} v(x,t) = \dfrac{1}{\mu_0 S_0}D_m\left(t-\dfrac{x}{c}\right) & \text{pour } x < ct, \\ v(x,t) = 0 & \text{pour } x > ct. \end{cases}$$

La surpression se déduit de l'équation d'Euler linéarisée, qui s'intègre en :

$$p_1(x,t) = \frac{c}{S_0}D_m\left(t-\frac{x}{c}\right) + f(t).$$

La fonction $f(t)$ est choisie nulle car on ne s'intéresse qu'aux ondes (donc aux fonctions à la fois de x et de t) et parce que si $D_m = 0$ il n'y a pas d'onde sonore. Finalement :

$$\begin{cases} p_1(x,t) = \dfrac{c}{S_0}D_m\left(t-\dfrac{x}{c}\right) & \text{pour } x < ct, \\ p_1(x,t) = 0 & \text{pour } x > ct. \end{cases}$$

Donc $p_1 \sim \dfrac{c}{S_0}D_m = \dfrac{c\mu_0}{S_0}D_v$ où D_v est le débit volumique.

Avec $c = 5{,}0$ m.s^{-1}, $D_v = 4{,}5$ L.min^{-1} $= 7{,}5\times10^{-5}$ m^3.s^{-1} et $\mu_0 = 1{,}0\times10^3$ kg.m^{-3}, on trouve $p_1 \simeq 4{,}8\times10^3$ Pa, soit $\dfrac{p_1}{P_0} \simeq 0{,}05$. L'approximation $\dfrac{p_1}{P_0} \ll 1$ est tout juste valable.
Si la distensibilité des vaisseaux sanguins diminue, il faut une plus grande surpression pour assurer le même débit sanguin car c diminue. La tension artérielle augmente.