TDPO2 : Dispersion et absorption des ondes

Savoirs

• Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif. Relation entre ODG de durée d'un paquet d'onde et largeur spectrale. Vitesse de phase et vitesse de groupe.
• Propagation linéaire unidimensionnelle cartésienne d'une OPPH. EDP linéaire, relation de dispersion, calcul de v_φ et v_g. Interprétation des parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$. Indice complexe d'un milieu.
• Cas particulier d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau, analogie avec la diffusion.
• Cas particulier d'une onde électromagnétique transverse unidimensionnelle dans un dans un plasma dilué : neutralité locale, conductivité électrique complexe (interprétation énergétique du caractère imaginaire pur), v_φ et v_g dans le domaine transparent, pulsation de coupure, onde stationnaire évanescente.

Savoir-faire

• Associer v_g à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes. Énoncer et exploiter la relation $\tau\Delta\nu \simeq 1$ en ODG. Distinguer v_φ et v_g. Les déterminer à partir de la relation de dispersion. → *Exos 1, 2, 4, 7.*

• Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles. Établir une relation de dispersion pour des ondes planes progressives harmoniques. → *Exos 1.3, 2, 4, 7.*

• Associer les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$ ou $\underline{n}$ aux phénomènes de dispersion et d'absorption. → *Tous les exos.*

• Propagation d'une onde électromagnétique unidimensionnelle dans un conducteur ohmique de conductivité réelle. Effet de peau. Repérer une analogie avec la diffusion. Estimer l'ODG de l'épaisseur de peau du cuivre à différentes fréquences. → *Exos 2, 3.*

• Propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique transverse et unidirectionnelle dans un plasma dilué. Justifier la neutralité électrique locale du plasma en présence d'une onde transverse. Établir l'expression de $\underline{\sigma}$ du plasma. Interpréter énergétiquement son caractère imaginaire pur.

Établir la relation de dispersion. Exprimer v_φ et v_g dans le domaine de transparence. Interpréter ω_p comme une pulsation de coupure. Citer les caractéristiques d'une onde stationnaire évanescente. Justifier que, dans le domaine réactif, une onde électromagnétique harmonique ne transporte aucune puissance en moyenne. → *Exo 4.*

Interro de cours

1. Donner la relation entre durée τ d'un paquet d'onde et largeur spectrale en fréquence $\Delta\nu$ ou en pulsation $\Delta\omega$.
2. Considérons un paquet d'onde peu étendu dans un milieu peu dispersif. Donner l'interprétation de v_φ et v_g. Laquelle des deux ne peut pas dépasser la célérité de la lumière dans le vide ?
3. Soit une OPPH selon $\pm\overrightarrow{u_x}$ avec $\underline{k}$ complexe. Donner l'expression de v_φ et v_g en fonction de ω et $\underline{k}$.
4. Que dire si $\mathrm{Re}(\underline{k}) = 0$? $\mathrm{Re}(\underline{k}) > 0$? $\mathrm{Re}(\underline{k}) < 0$? Et s'il dépend de ω ?
5. Que dire si $\mathrm{Im}(\underline{k}) \neq 0$? En déduire un lien avec la longueur typique d'atténuation (ou amplification) δ.
6. Soit $\underline{k}^2 = -j\dfrac{1}{\delta}$. Quelles sont les deux solutions possibles pour $\underline{k}$?
7. Soit $\underline{k}^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2$. Distinguer deux cas. Quelles sont alors dans chaque cas les deux solutions possibles ?
8. Que dire de l'énergie moyenne fournie par le champ au milieu si la conductivité est réelle positive ? Imaginaire pure ?

1 Exemples de dispersion et absorption d'ondes mécaniques

1.1 Un caillou dans un récipient

Voici l'image des ondes produites par une goutte d'eau tombant dans un récipient. La propagation est-elle dispersive ? Que dire de l'évolution de la vitesse de groupe avec la longueur d'onde ?

1.2 Propagation atténuée du son

Un professeur s'adresse à une classe. Il émet une onde sonore (onde de surpression $p(x,t)$) que nous assimilerons à une onde plane se propageant dans la direction des x croissants à la fréquence $f = 2000$ Hz. La relation de dispersion des ondes sonores dans l'air (fluide de viscosité dynamique $\eta = 1,8.10^{-3}$ uSI et de masse volumique $\mu_0 = 1,3$ kg.m^{-3}) s'écrit : $\underline{k} = \frac{\omega}{c} + \epsilon \frac{i\eta\omega^2}{2\mu_0 c^3}$ où $c = 340$ m.s^{-1} est la célérité du son en l'absence de viscosité, i est l'unité imaginaire dont le carré vaut -1, et où $\epsilon = \pm 1$ est indéterminé.

1. Avec $p(x,t)$ sous la forme $\underline{p} = \underline{p_0} e^{i(\omega t - kx)}$, déterminer qualitativement le signe de ϵ.
2. Y a-t-il absorption de l'onde sonore ? Si oui, déterminer l'ordre de grandeur de la distance caractéristique d'absorption de l'onde. Les élèves pourront-ils *a priori* entendre le professeur du fond de la classe ?
3. Le phénomène de propagation est-il dispersif ?

1.3 Cornet acoustique

Un cornet acoustique permet aux personnes malentendantes d'amplifier l'intensité acoustique perçue au niveau de l'oreille. Il s'agit d'un tube de rayon variable. Nous supposerons ici que ce rayon est donné par $r(x) = r_0 \cdot \exp(-x/(2d))$. L'équation de propagation de la surpression p_1 de l'onde acoustique dans ce tuyau est : $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{d}\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$ où c est la célérité du son dans l'air.

1. Quelle est la différence avec une équation de d'Alembert ?
2. Déterminer la relation de dispersion.
3. Le nombre d'onde s'écrit $\underline{k} = k' + jk''$ (k' et k'' réels). Donner les expressions et les significations de k' et k''.
4. La propagation est-elle dispersive ou non ? Vérifier l'effet amplificateur du cornet.
5. (**) Démo de l'EDP de propagation. Effectuer un bilan de masse sur une tranche dx de fluide dans le cornet pour montrer que $\partial\mu_1/\partial t = -\mu_0 \partial v_1/\partial x + \mu_0 v_1/d$. En déduire l'équation de propagation.

1.4 Ondes à la surface de l'eau

La relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur h est donnée par : $\omega^2 = \left(g.k + \frac{\gamma k^3}{\mu}\right) \mathrm{th}(kh)$ où $g = 9,81$ m.s^{-2} est l'accélération de la pesanteur, $\gamma = 72.10^{-3}$ SI est la tension superficielle de l'interface air-eau et $\mu = 1,0$ kg.L^{-1} est la masse volumique de l'eau. On précise que $\mathrm{th}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} \simeq x$ pour $x \ll 1$. Et $\mathrm{th}(x) \simeq 1$ pour $x \gg 1$. Dans les cas suivants, déterminer si la propagation est dispersive et exprimer la vitesse de groupe de l'onde. On pensera dans une premier temps à négliger les termes adéquats dans la relation de dispersion pour chaque phénomène avant d'exprimer des vitesses.

1. Onde de marée : $\lambda = 1000$ km et $h = 5$ km.
2. Onde de houle : $\lambda = 5$ m et $h = 5$ km.
3. Onde de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe en eau profonde : $\lambda = 1$ cm et $h = 5$ km (c'est limite mais on va quand même négliger le terme de gravité qui est plus faible que celui de capillarité).
4. Onde de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe en eau peu profonde : $\lambda = 2$ cm et $h = 1$ mm. Calculer seulement la relation de dispersion et v_φ. Calculer v_g ici est plus calculatoire et il faut connaître la dérivée de th.

2 Exo-type : propagation dans un conducteur ohmique

On considère un conducteur ohmique de conductivité $\sigma = ne^2\tau/m$ réelle et positive, avec n la densité volumique d'électrons, m la masse d'un électron, e la charge élémentaire, et τ un temps caractéristique traduisant la dissipation dans le matériau. On donne la relation vectorielle : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) - \Delta\overrightarrow{E}$.

1. Montrer que la relation de propagation de $\overrightarrow{E}$ s'écrit : $\Delta\overrightarrow{E} = \mu_0\sigma\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$. Quelle est la différence avec la propagation dans le vide ?
2. On considère une OPPH de vecteur d'onde $\overrightarrow{\underline{k}}$. En déduire la relation de dispersion : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\sigma\omega$.
3. On donne $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m, et $\sigma = 6.10^7$ S/m pour le cuivre. En déduire qu'un terme de cette équation est négligeable devant l'autre pour des fréquences usuelles des signaux électriques. Et en déduire une simplification de la relation de dispersion.
4. En déduire que $\underline{k}$ est dans ce cas un nombre complexe.
5. On note $k_1 = \mathrm{Re}(\underline{k})$ et $k_2 = -\mathrm{Im}(\underline{k})$. Exprimer k_1 et k_2 en fonction de $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$. Quelle est sa dimension ?
6. Démontrer les expressions de v_φ et v_g. La propagation est-elle dispersive ?
7. Considérons une OPPH se propageant suivant $\overrightarrow{e_x}$ polarisée rectilignement. Alors, en notation complexe : $\overrightarrow{\underline{E}} = E_0 \cdot \overrightarrow{e_y} \cdot e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$. Exprimer le champ en notation réelle. En déduire si l'onde est atténuée.
8. Calculer la valeur de la longueur d'atténuation dans le cuivre à une fréquence électrique usuelle.
9. On revient à la relation de propagation. Que devient-elle en l'absence du terme négligé ? Faire l'analogie formelle avec une équation de diffusion.

3 Bilan Joule pour un courant non uniforme (**)

Considérons un conducteur ohmique de conductivité $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ occupant le demi-espace $z \geq 0$. Soumis à champ électrique extérieur sinusoïdal, un champ électrique non uniforme se développe dans le conducteur, avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$ l'épaisseur de peau : $\overrightarrow{E}(z,t) = E_0 \cdot e^{-z/\delta} \cdot \cos(\omega t - z/\delta) \cdot \overrightarrow{u_x}$ avec $\delta > 0$. On considère un portion de ce conducteur comprise entre 0 et a selon x et y, et infinie selon z.

1. Sans faire de calcul, donner la moyenne dans le temps de l'intensité dans le conducteur.
2. Calculer la moyenne temporelle de la puissance volumique dissipée par effet Joule et le vecteur de Poynting moyen. Ces deux grandeurs semblent-elles reliées ?
3. Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule.
4. Pourquoi dit-on que ce sont les infrarouges qui font chauffer une carrosserie de voiture exposée au Soleil ?

4 Exo-type : propagation dans un plasma

Considérons un plasma neutre peu dense, de densité volumique d'électrons n. On note m la masse d'un électron et e la charge élémentaire.

1. À l'aide d'un théorème de mécanique, montrer que la conductivité est imaginaire pure : $\underline{\sigma} = -j\frac{ne^2}{m\omega}$.
2. En déduire le déphasage entre $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$. Que dire de la puissance moyenne transmise par le champ aux charges ?
3. Déterminer l'équation de propagation de $\overrightarrow{E}$ dans le plasma et en déduire la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.
4. Cas $\omega > \omega_p$.
   (a) Montrer que $k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}$.
   (b) L'onde est-elle atténuée ?
   (c) Montrer que $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}}$ et en déduire si propagation est dispersive. Tracer $v_\varphi(\omega)$ et comparer à c.
   (d) À partir de la relation de dispersion, montre que $v_\varphi.v_g = c^2$ et en déduire v_g. Le tracer sur le même graphe.
   (e) Dans la limite des très hautes fréquences, montrer que l'onde se propage dans le plasma comme dans le vide.
5. Cas $\omega < \omega_p$.
   (a) Montrer que : $\underline{k}(\omega < \omega_p) = \pm j\sqrt{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}}$.
   (b) En déduire si l'onde se propage.
   (c) Exprimer le champ électrique en notation réelle et montrer qu'il s'exprime comme une onde stationnaire d'amplitude décroissant spatialement exponentiellement.
   (d) Calculer la moyenne du vecteur de Poynting. Commenter.

5 Exo de cave, version courte, méthode OPPH

1. Rappeler l'équation de diffusion que vérifie $T(x,t)$. En déduire l'équation sur la variable $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$.
2. Déterminer la relation de dispersion.
3. En déduire la valeur de $\underline{k}$ physiquement acceptable puis l'expression réelle de $T(x,t)$.
4. Proposer une analogie avec une autre situation physique.

Le sol terrestre occupe le demi-espace ($x > 0$) et l'atmosphère le demi-espace ($x < 0$). Le sol est supposé homogène de conductivité thermique $\lambda = 1,1$ W.m^{-1}.K^{-1}, de capacité thermique $c = 900$ J.kg^{-1}.K^{-1} et de masse volumique $\rho = 2,3.10^3$ kg.m^{-3}.

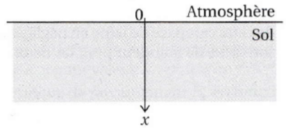


Figure 7.22. Orientation de l'axe (Ox).

Le champ de température à une profondeur x à l'instant t est noté $T(x,t)$. On suppose que la loi de température au niveau de la croûte terrestre, en $x = 0$, évolue suivant la loi :

$$T(0,t) = T_0 + A\cos(\omega t),$$

et qu'à grande profondeur, la température du sol est constante égale à T_0.

6 Exo de cave, version longue, sans avoir fait PO2

Vous pouvez vous entrainer à la question 3 peu habituelle, et aux explications du 6 et 7.

EXERCICE D Effet de cave (d'après oral Mines-Ponts)

Le sol terrestre occupe le demi-espace ($x > 0$) et l'atmosphère le demi-espace ($x < 0$). Le sol est supposé homogène de conductivité thermique $\lambda = 1,1$ W.m^{-1}.K^{-1}, de capacité thermique $c = 900$ J.kg^{-1}.K^{-1} et de masse volumique $\rho = 2,3.10^3$ kg.m^{-3}.

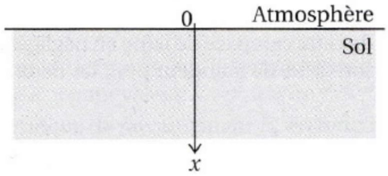


Figure 7.22. Orientation de l'axe (Ox).

Le champ de température à une profondeur x à l'instant t est noté $T(x,t)$. On suppose que la loi de température au niveau de la croûte terrestre, en $x = 0$, évolue suivant la loi :

$$T(0,t) = T_0 + A\cos(\omega t),$$

et qu'à grande profondeur, la température du sol est constante égale à T_0.

1. Donner la signification de T_0 et A dans l'expression de $T(0,t)$.
2. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x,t)$.

On cherche des solutions de la forme :

$$T(x,t) = T_0 + A\exp\left(-\frac{x}{d}\right)\cos(\omega t - \varphi(x)),$$

avec d une constante. L'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x,t)$ étant linéaire, on peut utiliser la forme complexe associée à $T(x,t)$:

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + A\exp\left(-\frac{x}{d}\right)e^{j(\omega t - \varphi(x))},$$

afin de simplifier les calculs.

3. Montrer que $\varphi(x)$ est solution des équations :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \frac{1}{d^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad -\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{d}\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho c \omega}{\lambda}.$$

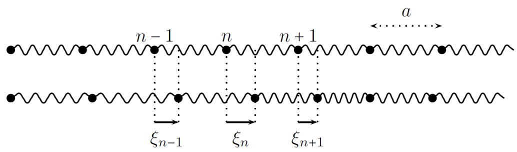
4. En déduire l'expression de $T(x,t)$. On introduira $\delta = \sqrt{2\lambda/\rho c \omega}$.
5. Comment évolue l'amplitude de l'oscillation de température avec la profondeur? Expliquer en quoi consiste l'effet de cave.

On s'intéresse à la variation de température dans une cave enterrée à une profondeur de $x_c = 2$ m.

6. La température journalière varie de 10 °C entre le jour et la nuit. Estimer l'amplitude de variation de la température dans la cave. Commenter.
7. La température annuelle est de 30 °C au 1$^{\text{er}}$ août (milieu de l'été) et de −10 °C au 1$^{\text{er}}$ février (milieu de l'hiver). Estimer l'amplitude de variation de la température dans la cave. Commenter.

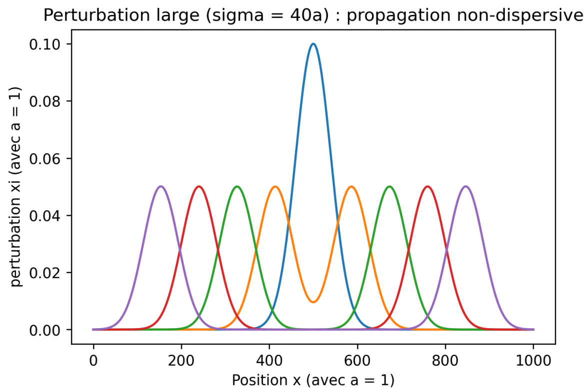
7 Propagation d'une onde discrète (**)

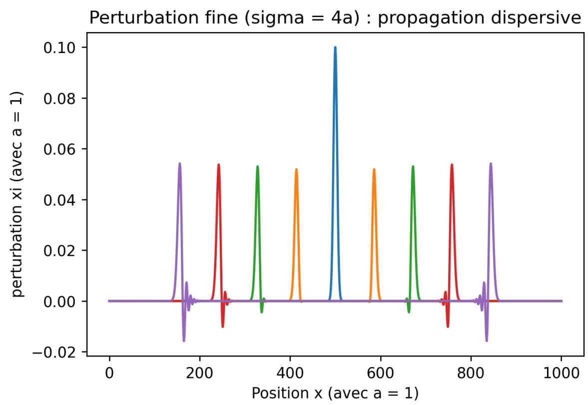
Le principe est de modéliser un solide comme une chaine infinie de masses identiques m reliées par des ressorts identiques de longueur à vide a et raideur k. On note $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $x_n(t)$ la position de la n-ième masse, et $\xi_n(t) = x_n(t) - x_{n,eq}$ son déplacement à t par rapport à sa position au repos. À l'équilibre, $x_{n,eq} = na$.



Dans le cours PO1a, on a montré que le déplacement de la masse m vérifiait l'équation : $m\frac{d^2\xi_n(t)}{dt^2} = k\left(\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t) - 2\xi_n(t)\right)$.

1. On cherche une solution OPPH en notation complexe $\xi_n(t) = a \cdot e^{j(\omega t - kx_{n,eq})}$. Montrer que la relation de dispersion est $\omega^2 = \alpha \sin^2(\beta k)$ où on exprimera α et β en fonction de ω_0 et a. En déduire qu'il existe une pulsation de coupure ω_c telle que l'onde ne peut pas se propager pour $\omega > \omega_c$.
2. Comparer la valeur de deux ondes telles que $k_2 - k_1 = p\pi/\beta$ avec p entier. En déduire qu'il suffit d'étudier le domaine $k \in [-\pi/2\beta, +\pi/2\beta]$.
3. Tracer le graphe de ω en fonction de k dans l'intervalle $[0, \pi/2\beta]$. Graphiquement, comment estimer v_ϕ et v_g ? Laquelle est plus grande que l'autre dans ce cas ?
4. Limite basse fréquence. Simplifier la relation de dispersion pour en déduire v_φ et v_g. Commenter.
5. Limite de pulsation de coupure. Donner la valeur de v_φ et v_g pour $\omega \to \omega_c$. Commenter.
6. Tracer qualitativement l'allure de v_φ et v_g en fonction de ω sur l'intervalle $[0, \omega_c]$.
7. Résultat de la simulation, cf cours PO1a. Une résolution numérique type méthode d'Euler a été effectuée dans le cadre d'une excitation initiale au centre du système. Les figures suivantes sont les résultats pour une perturbation très large devant a et une autre plus fine.





(a) Dans quelle situation la dispersion est plus visible ? Expliquer.

(b) On observe que des oscillations de plus courte quasi-longueur d'onde apparaissent à l'arrière du paquet d'onde alors que l'avant est plus étalé. Interpréter à partir des résultats d'une question précédente.