

## PO3 : Réflexion et transmission aux interfaces

### 1 Observations expérimentales

- Une onde acoustique n'est pas toujours bien transmise lors d'un changement de milieu.
  - ★ La tête sous l'eau à la piscine, on n'entend pas les sons provenant de l'air.
  - ★ Les murs et vitres atténuent les sons provenant de l'extérieur d'une pièce.
  - ★ On applique du gel sur la peau avant de faire une échographie.

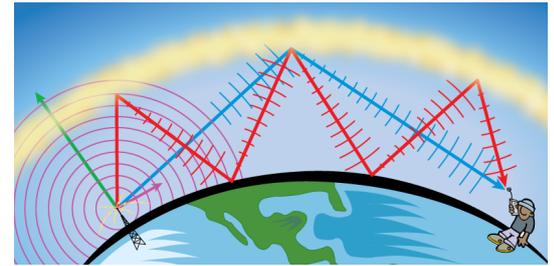


FIGURE 1 – Des milieux d'impédances acoustiques différentes apparaissent contrastés sur une échographie.



FIGURE 2 – Les miroirs présentent une fine couche de métal derrière une protection transparente.

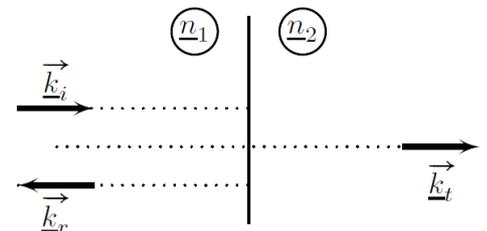
- Une onde électromagnétique n'est pas toujours complètement transmise lors d'un changement de milieu.
  - ★ Contrairement aux ondes radio FM, les ondes radio AM sont réfléchies par l'ionosphère, cf figure ci-contre.
  - ★ Un métal réfléchit très bien la lumière visible.
  - ★ Une plaque de métal réfléchit aussi très bien les signaux aux fréquences électriques usuelles. On capte donc moins bien le réseau téléphonique dans une cage d'ascenseur en métal.
  - ★ Un isolant électrique comme le verre réfléchit une partie de la lumière. Cet effet dépend de la polarisation incidente et de l'angle d'incidence.



### 2 Principe de l'étude de l'incidence d'une onde sur une interface

#### 2.1 Modèle d'interface plane infinie sous incidence normale

- On considèrera des ondes planes progressives harmoniques (OPPH) en incidence normale sur des interfaces planes infinies. On choisira souvent pour simplifier l'origine de l'axe de propagation au niveau de l'interface.
- Les deux milieux différents de part et d'autre de l'interface seront caractérisés par leur comportement vis-à-vis de la propagation des OPPH :
  - ★ pour les OPPH acoustiques dans les fluides on considèrera les **impédances acoustiques**  $Z_1$  et  $Z_2$ .
  - ★ pour les OPPH électromagnétiques, on considèrera les **indices complexes**  $n_1$  et  $n_2$ .



- Une onde **incidente** selon  $+\vec{u}_x$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_i = k_i \vec{u}_x = k_1 \vec{u}_x$  peut être alors :
  - ★ soit **réfléchi**e (reste dans le même milieu), de vecteur d'onde  $\vec{k}_r = -k_r \vec{u}_x = -k_1 \vec{u}_x$  de sens opposé.
  - ★ soit **transmise** (change de milieu), de vecteur d'onde  $\vec{k}_t = k_t \vec{u}_x = k_2 \vec{u}_x$  de même sens.

## 2.2 Ondes résultantes

Considérons une OPPH (scalaire pour simplifier) incidente se propageant selon  $\vec{u}_x$ , et l'interface en  $x = 0$ . Les expressions des ondes incidente, réfléchie et transmise sont :

$$\begin{cases} \text{onde incidente :} & \underline{s}_i(x, t) = \underline{S}_{i0} \cdot e^{j(\omega t - k_1 x)} & \forall x < 0 \\ \text{onde réfléchie :} & \underline{s}_r(x, t) = \underline{S}_{r0} \cdot e^{j(\omega t + k_1 x)} & \forall x < 0 \\ \text{onde transmise :} & \underline{s}_t(x, t) = \underline{S}_{t0} \cdot e^{j(\omega t - k_2 x)} & \forall x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ainsi, l'onde résultante dans chaque milieu s'écrit :

$$\begin{cases} \text{milieu 1 :} & \underline{s}_1(x, t) = \underline{s}_i(x, t) + \underline{s}_r(x, t) & \forall x < 0 \\ \text{milieu 2 :} & \underline{s}_2(x, t) = \underline{s}_t(x, t) & \forall x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

## 2.3 Coefficients de réflexion et transmission

**def :** Les **coefficients de réflexion et transmission en amplitude** sont définis à partir de l'amplitude de l'onde au niveau de l'interface :

$$\underline{r} = \frac{\text{amplitude réfléchie}}{\text{amplitude incidente}} = \frac{\underline{S}_{r0}}{\underline{S}_{i0}} = \frac{\underline{s}_r(0, t)}{\underline{s}_i(0, t)}, \quad \underline{t} = \frac{\text{amplitude transmise}}{\text{amplitude incidente}} = \frac{\underline{S}_{t0}}{\underline{S}_{i0}} = \frac{\underline{s}_t(0, t)}{\underline{s}_i(0, t)} \quad (3)$$

**def :** Les **coefficients de réflexion et transmission en puissance** sont définis à partir de la puissance surfacique moyenne (moyenne des projections du vecteur de Poynting sur la direction de propagation), donc l'intensité acoustique ou lumineuse :

$$R = \frac{\text{intensité réfléchie}}{\text{intensité incidente}} = \frac{I_r}{I_i}, \quad T = \frac{\text{intensité transmise}}{\text{intensité incidente}} = \frac{I_t}{I_i} \quad (4)$$

**prop :** On vérifiera que la **conservation de l'énergie** assure toujours :  $R + T = 1$ .

## 3 Onde acoustique à l'interface entre deux fluides

### 3.1 Position du problème

- Les deux milieux ont éventuellement des masses volumiques au repos différentes :  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , mais même pression  $p_0$  au repos. On notera  $p_1 = p_i + p_r$  la surpression dans le milieu 1, et  $p_2 = p_t$  la surpression dans le milieu 2. De même,  $v_1 = v_i + v_r$  et  $v_2 = v_t$ .
- Les deux fluides ne se mélangent pas et l'interface reste fixe<sup>1</sup> en  $x = 0$ .
- On décrit les ondes de surpression et vitesse par des OPPH, avec  $k_1 = \omega/c_1 = \omega\sqrt{\mu_1\chi S_1}$  et  $k_2 = \omega/c_2 = \omega\sqrt{\mu_2\chi S_2}$  :

$$\begin{cases} \text{onde incidente :} & \underline{p}_i(x, t) = \underline{p}_{i0} \cdot e^{j(\omega t - k_1 x)} & \text{et} & \underline{v}_i(x, t) = \underline{v}_{i0} \cdot e^{j(\omega t - k_1 x)} & \forall x < 0 \\ \text{onde réfléchie :} & \underline{p}_r(x, t) = \underline{p}_{r0} \cdot e^{j(\omega t + k_1 x)} & \text{et} & \underline{v}_r(x, t) = \underline{v}_{r0} \cdot e^{j(\omega t + k_1 x)} & \forall x < 0 \\ \text{onde transmise :} & \underline{p}_t(x, t) = \underline{p}_{t0} \cdot e^{j(\omega t - k_2 x)} & \text{et} & \underline{v}_t(x, t) = \underline{v}_{t0} \cdot e^{j(\omega t - k_2 x)} & \forall x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

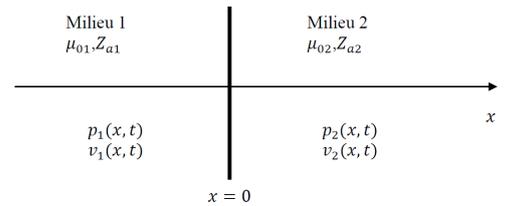
- La propagation d'une OPPH acoustique est caractérisée par son impédance acoustique  $Z$ . Dans l'approximation acoustique (cf chapitre *PO1b*), on montre que l'impédance acoustique est réelle et son signe dépend de la direction de propagation  $\pm \vec{u}_x$  :

$$\underline{Z} = \pm \frac{p_1}{v_1} \quad \left( = \pm \mu_0 c = \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi S}} \right) \quad (6)$$

En particulier :

$$\underline{p}_i = Z_1 v_i, \quad \underline{p}_r = -Z_1 v_r, \quad \underline{p}_t = Z_2 v_t \quad (7)$$

1. En toute rigueur, l'onde acoustique décale l'interface d'une amplitude  $\xi_0 = v_0/\omega$ . Mais ce décalage est faible devant la longueur d'onde des ondes acoustiques typiques.



### 3.2 Conditions aux limites

Comme l'interface n'a pas d'épaisseur matérielle, les pressions<sup>2</sup> de chaque côté doivent être identiques :  $p_1(0, t) = p_2(0, t)$ . De même, si les fluides ne se mélangent pas, les vitesses de chaque côté doivent être identiques :  $v_1(0, t) = v_2(0, t)$ .

conditions aux limites à l'interface : les **surpressions et vitesses sont continues à l'interface** :

$$\begin{cases} p_1(0, t) = p_2(0, t), & \text{soit : } \boxed{p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}} \\ v_1(0, t) = v_2(0, t), & \text{soit : } \boxed{v_{i0} + v_{r0} = v_{t0}} \end{cases} \quad (8)$$

### 3.3 Nécessité d'une onde réfléchie

Supposons l'absence d'onde réfléchie à l'interface. Alors les conditions aux limites donneraient :  $\begin{cases} p_{i0} = p_{t0} \\ v_{i0} = v_{t0} \end{cases}$ .

En utilisant les impédances :  $\begin{cases} Z_1 v_{i0} = Z_2 v_{t0} \\ v_{i0} = v_{t0} \end{cases}$ . Système qui n'a de solution non nulle que si  $Z_1 = Z_2$ .

prop : La seule possibilité pour que l'onde réfléchie soit absente est que  $Z_1 = Z_2$ . **Donc dans le cas général, il existera une onde réfléchie.**

### 3.4 Coefficients de réflexion et transmission de l'amplitude

• coefficients pour la surpression<sup>3</sup> :

$$\boxed{r_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_{r0}}{p_{i0}}, \quad t_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_{t0}}{p_{i0}}} \quad r_p \stackrel{\text{prop}}{=} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad t_p \stackrel{\text{prop}}{=} \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (9)$$

démo de cours : Démontrer les coefficients de réflexion et transmission pour la surpression, en se basant sur les conditions aux limites à l'interface, sur la définition de l'impédance  $Z = \pm p/v$  selon si l'OPPH se propage selon  $\pm \vec{u}_x$ , et sur la définition de  $r_p$  et  $t_p$ .

- Commencer par montrer que les conditions aux limites donnent :  $\begin{cases} p_{i0} + p_{r0} = p_{t0} \\ \frac{p_{i0}}{Z_1} - \frac{p_{r0}}{Z_1} = \frac{p_{t0}}{Z_2} \end{cases}$
- En déduire alors les expressions de  $r_p$  et  $t_p$  en fonction des impédances  $Z_1$  et  $Z_2$ .

• coefficients pour la vitesse :

$$\boxed{r_v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_{r0}}{v_{i0}}, \quad t_v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_{t0}}{v_{i0}}} \quad r_v \stackrel{\text{prop}}{=} \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -r_p, \quad t_v \stackrel{\text{prop}}{=} \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2} t_p \quad (10)$$

démo de cours : Démontrer les coefficients de réflexion et transmission pour la vitesse, en se basant sur les conditions aux limites à l'interface, sur la définition de l'impédance  $Z = \pm p/v$  selon si l'OPPH se propage selon  $\pm \vec{u}_x$ , et sur la définition de  $r_v$  et  $t_v$ .

- Commencer par montrer que les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} Z_1 v_{i0} - Z_1 v_{r0} = Z_2 v_{t0} \\ v_{i0} + v_{r0} = v_{t0} \end{cases} \quad (11)$$

- En déduire alors les expressions de  $r_v$  et  $t_v$  en fonction des impédances  $Z_1$  et  $Z_2$ .

prop : Dans le cadre de ce modèle, on trouve que les coefficients  $r$  et  $t$  sont réels.

rq : Qu'en déduire sur le déphasage entre les ondes incidente, réfléchie et transmise ?

2. CE : Expliciter des conditions aux limites de  $p$  et  $v$  à une interface.

3. CE : Établir les expressions des coefficients  $r$ ,  $t$ ,  $R$ ,  $T$  pour une onde acoustique en incidence normale sur une interface plane.

### 3.5 Coefficients de réflexion et transmission de l'énergie

coefficients pour l'énergie :

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_r}{I_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\| \langle \vec{\Pi}_r \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \|}, \quad T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_t}{I_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\| \langle \vec{\Pi}_t \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \|}, \quad R \stackrel{\text{prop}}{=} \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = r_v^2 = r_p^2, \quad T \stackrel{\text{prop}}{=} \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = t_v t_p \quad (12)$$

démo de cours : Démontrer les coefficients de réflexion et transmission pour l'énergie, en se basant sur les conditions aux limites à l'interface et sur la définition de l'impédance  $Z = \pm p/v$  selon si l'OPPH se propage selon  $\pm \vec{u}_x$ .

1. On donne  $\vec{\Pi} = p \times \vec{v}$ . Commencer par démontrer les expressions de l'intensité acoustique de chaque OPPH :

$$\begin{cases} I_i = \frac{\langle p_i^2 \rangle}{Z_1} = Z_1 \langle v_i^2 \rangle \\ I_r = \frac{\langle p_r^2 \rangle}{Z_1} = Z_1 \langle v_r^2 \rangle \\ I_t = \frac{\langle p_t^2 \rangle}{Z_2} = Z_2 \langle v_t^2 \rangle \end{cases} \quad (13)$$

2. En déduire les expressions de  $R = I_r/I_i$  et  $T = I_t/I_i$  en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ .

3. Remarquer que  $R + T = 1$ .

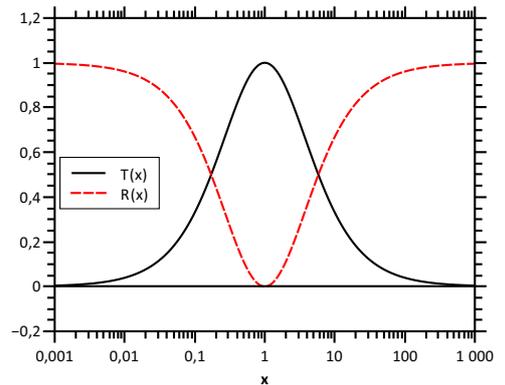
4. AN : on donne  $Z_{\text{air}} = 4,4 \cdot 10^2 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  et  $Z_{\text{eau}} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ . Expliquer pourquoi on n'entend quasiment pas les bruits extérieurs quand on est sous l'eau.

### 3.6 Adaptation d'impédance

En posant  $x = Z_2/Z_1$ , on obtient :

$$R(x) = \left( \frac{x - 1}{1 + x} \right)^2, \quad T(x) = \frac{4x}{(1 + x)^2} \quad (14)$$

prop : La transmission de l'onde est maximum pour  $Z_1 = Z_2$ , on parle d'**adaptation d'impédance**<sup>4</sup>. Dans ce cas, l'onde est totalement transmise :  $T = 1$  et  $R = 0$ . L'onde est quasi totalement réfléchi si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont très différents.



exo : On donne les impédances acoustiques de l'air  $Z_{\text{air}} = 4,4 \cdot 10^2 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ , de la peau  $Z_{\text{peau}} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ , des os  $Z_{\text{os}} = 7,6 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ . Calculer les coefficients de réflexion aux différentes interfaces lors d'une échographie. À quoi peut servir le gel inséré entre la sonde et la peau ? Comment choisir son impédance ?

4. CE : Associer l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.

### 3.7 Autres conditions aux limites

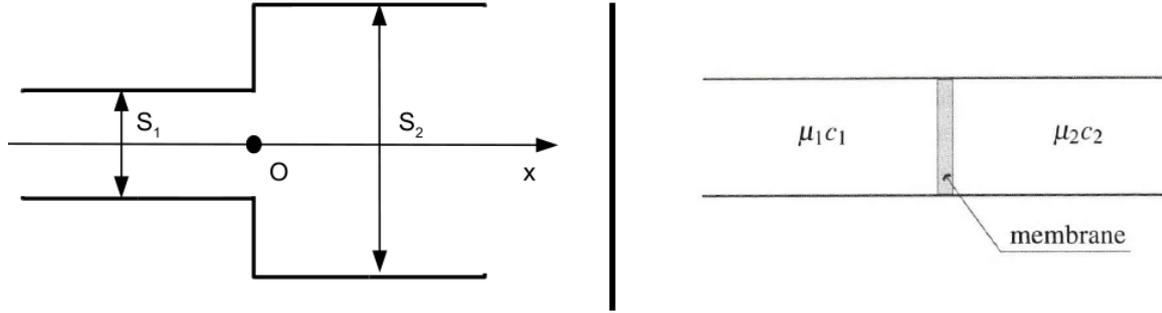


FIGURE 3 – Gauche : discontinuité de section dans un conduit acoustique. Droite : membrane entre deux fluides. Deux situations physiques où on observe aussi réflexion de l’onde même si le fluide est le même de chaque côté ! Explication : on n’a plus à la fois continuité des pressions et des vitesses à l’interface..

- Cas d’une discontinuité de section (utiliser continuité débit) :  
 → encore **continuité des pressions**  $p_1(0, t) = p_2(0, t)$  mais pas des vitesses  $S_1 v_1(0, t) = S_2 v_2(0, t)$ .
- Cas d’une membrane (utiliser PDF sur la membrane) :  
 → pas de continuité des pressions  $p_1(0, t) = p_2(0, t) + m j \omega v_1(0, t) / S$  mais encore **continuité des vitesses**  $v_1(0, t) = v_2(0, t)$ .

## 4 Onde électromagnétique à l’interface entre deux milieux

### 4.1 Position du problème et conditions aux limites

- On considère une OPPH électromagnétique en incidence normale sur un dioptre entre un milieu d’indice  $n_1$  et un milieu d’indice  $n_2$ . On supposera pour simplifier que le champ incident est d’amplitude  $E_{i0} \in \mathbb{R}^{+*}$ , de direction de propagation incidente  $+\vec{u}_x$ , et polarisée rectilignement suivant  $\vec{u}_y$  et donc s’écrit sous la forme :

$$\vec{E}_i(x, t) = E_{i0} \cdot e^{j(\omega t - k_1 x)} \cdot \vec{u}_y, \quad \text{avec l’amplitude } E_{i0} > 0 \tag{15}$$

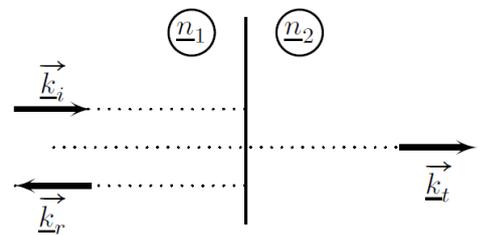
On admettra que les ondes réfléchi et transmise ont même polarisation :

$$\vec{E}_r(x, t) = E_{r0} \cdot e^{j(\omega t + k_1 x)} \cdot \vec{u}_y, \quad \vec{E}_t(x, t) = E_{t0} \cdot e^{j(\omega t - k_2 x)} \cdot \vec{u}_y \tag{16}$$

rq : Les grandeurs  $E_{r0}$  et  $E_{t0}$  peuvent être négatives, voire même complexes.

- On notera  $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$  le champ électrique dans le milieu 1, et  $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$  le champ électrique dans le milieu 2. De même,  $\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_r$  et  $\vec{B}_2 = \vec{B}_t$ .
- L’interface reste fixe en  $x = 0$ .
- La propagation d’une OPPH électromagnétique selon le vecteur unitaire  $\vec{u}$  est caractérisée par son indice  $n$  défini par :

$$\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{u} \tag{17}$$



Ainsi, les vecteurs d’onde s’expriment en fonction des indices des deux milieux :

$$\vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} \cdot (+\vec{u}_x), \quad \vec{k}_r = n_1 \frac{\omega}{c} \cdot (-\vec{u}_x), \quad \vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} \cdot (+\vec{u}_x) \tag{18}$$

- Pour une OPPH, l'équation de Maxwell-Faraday donne  $\vec{B} = \vec{k} \wedge \vec{E} / \omega$ . Le champ magnétique s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{n_1}{c} (+\vec{u}_x) \wedge \vec{E}_i = \underbrace{\frac{n_1 E_{i0}}{c}}_{B_{i0}} \cdot e^{j(\omega t - k_1 x)} \cdot \vec{u}_z \\ \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{n_1}{c} (-\vec{u}_x) \wedge \vec{E}_r = \underbrace{-\frac{n_1 E_{r0}}{c}}_{B_{r0}} \cdot e^{j(\omega t + k_1 x)} \cdot \vec{u}_z \\ \vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{n_2}{c} (+\vec{u}_x) \wedge \vec{E}_t = \underbrace{\frac{n_2 E_{t0}}{c}}_{B_{t0}} \cdot e^{j(\omega t - k_2 x)} \cdot \vec{u}_z \end{array} \right. \quad (19)$$

conditions aux limites à l'interface : On admet que pour une OPPH en incidence normale sur une interface non chargée sans courant surfacique, les champs électriques et magnétiques sont continus à l'interface, en cohérence avec une polarisation inchangée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1(0, t) = \vec{E}_2(0, t), \quad \text{soit : } \boxed{E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}} \\ \vec{B}_1(0, t) = \vec{B}_2(0, t), \quad \text{soit : } \boxed{B_{i0} + B_{r0} = B_{t0}} \end{array} \right. \quad (20)$$

## 4.2 Coefficient de réflexion et transmission

rq : Un coefficient de transmission ou réflexion en amplitude n'est pas forcément dans  $[0, 1]$ , il peut être supérieur à 1, ou bien même négatif ou même complexe ! Au contraire, ceux pour la puissance sont toujours dans  $[0, 1]$  pour assurer la conservation de l'énergie.

- coefficients pour le champ électrique<sup>5</sup> :

$$\left. \begin{array}{l} r_E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{r0}}{E_{i0}}, \quad t_E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{t0}}{E_{i0}} \end{array} \right\} \quad r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (21)$$

démo de cours : Démontrer les coefficients de réflexion et transmission pour le champ électrique, en se basant sur les conditions aux limites à l'interface et sur le lien entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

1. Commencer par montrer que les conditions aux limites donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ n_1 E_{i0} - n_1 E_{r0} = n_2 E_{t0} \end{array} \right. \quad (22)$$

2. En déduire alors les expressions de  $r_E$  et  $t_E$  en fonction des indices.
3. Définir des coefficients  $t_B$  et  $r_B$  pour le champ magnétique. En déduire directement que  $t_B = n_2 t_E / n_1$  et  $r_B = -r_E$ .
4. Effectuer l'analogie entre ces expressions et les coefficients de réflexion et transmission d'une onde acoustique.

- coefficients en puissance : La puissance surfacique de l'onde électromagnétique est définie par la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting :

$$I = \left\| \langle \vec{\Pi} \rangle \right\| = \frac{\left\| \langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle \right\|}{\mu_0} \quad (23)$$

**ATTENTION** : L'intensité  $I$  est une grandeur non-linéaire car produit de deux grandeurs dépendant du temps  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Il faut donc d'abord exprimer les champs en notation réelle avant de calculer  $\vec{\Pi}$ .

5. CE : Exploiter la continuité admise du champ électromagnétique dans cette configuration pour obtenir l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en fonction des indices complexes.

def : Comme pour l'onde acoustique :

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_r}{I_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\| \langle \vec{\Pi}_r \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \|}, \quad T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_t}{I_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\| \langle \vec{\Pi}_t \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \|} \quad (24)$$

## 5 Cas d'une onde électromagnétique à l'interface vide/plasma

### 5.1 Indices de l'air et du plasma

On considère une onde incidente depuis le vide sur un plasma. On note  $\vec{u}_x$  la direction de propagation de l'onde incidente. Le vide occupe alors le demi-espace  $x < 0$ , le plasma occupe  $x > 0$ . L'indice du vide est  $n_1 = 1$ . Exprimons l'indice  $\underline{n}_2$  du plasma.

prop démontrée chapitre PO2 : On a trouvé que dans un plasma peu dense, la relation de dispersion est :

$$k_2^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (25)$$

Qui donne deux possibilités pour  $k_2$ , pour une propagation suivant  $\vec{u}_x$  (donc tel que  $\text{Re}(k_2) > 0$ ) selon la comparaison de  $\omega$  et  $\omega_p$  :

$$\begin{cases} \underline{k}_2(\omega > \omega_p) = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \in \mathbb{R}^+ \\ \underline{k}_2(\omega < \omega_p) = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} \in j\mathbb{R}^- \end{cases} \quad (26)$$

On en déduit l'indice du plasma  $\underline{n}_2 = \underline{k}_2 c / \omega$  :

$$\begin{cases} \underline{n}_2(\omega > \omega_p) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \in ]0, 1[ \\ \underline{n}_2(\omega < \omega_p) = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \in j\mathbb{R}^- \end{cases} \quad (27)$$

| schéma : *graphie de  $\text{Re}(\underline{n}(\omega))$  et  $\text{Im}(\underline{n}(\omega))$ .*

### 5.2 Coefficients à $\omega > \omega_p$ : domaine transparent

prop : Pour une OPPH incidente du vide ( $n_1 = 1$ ) sur du plasma à  $\omega > \omega_p$ , l'indice  $n_2$  est réel positif donné par la formule ci-dessus. Les coefficients deviennent :

$$r_E = \frac{1 - n_2(\omega)}{1 + n_2(\omega)}, \quad t_E = \frac{2}{1 + n_2(\omega)} \quad (28)$$

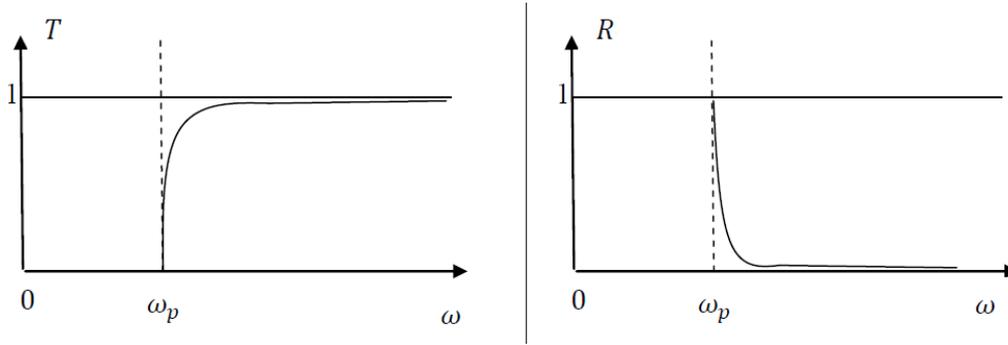
| exo : *Que deviennent  $r_E$  et  $t_E$  dans les limites où  $\omega$  tend vers  $\omega_p^+$  et  $+\infty$  ?*

prop : Pour une OPPH incidente du vide sur du plasma à  $\omega > \omega_p$ , :

$$R = \left( \frac{1 - n_2(\omega)}{1 + n_2(\omega)} \right)^2 = r_E^2, \quad T = \frac{4n_2(\omega)}{(1 + n_2(\omega))^2} = n_2(\omega)t_E^2 \quad (29)$$

exo :

1. On note dans le plasma  $\underline{k}_2 = k' \in \mathbb{R}^+$ . En déduire les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en notation complexe dans le plasma. Puis passer en notation réelle.
2. Exprimer les vecteurs de Poynting pour les ondes incidente, réfléchie et transmise.
3. En déduire les expressions de  $R$  et  $T$  ci-dessus.
4. Que deviennent  $R$  et  $T$  dans les limites où  $\omega$  tend vers  $\omega_p^+$  et  $+\infty$  ?
5. Montrer que l'énergie de l'onde est conservée.



### 5.3 Coefficients à $\omega < \omega_p$ : domaine réactif

prop : Pour une OPPH incidente du vide sur du plasma à  $\omega < \omega_p$ , en notant  $\underline{n} = -jn'$  :

$$\underline{r}_E = \frac{1 + jn'}{1 - jn'} = e^{j\varphi}, \quad \underline{t}_E = \frac{2}{1 - jn'} \quad (30)$$

rq : Le coefficient de réflexion est de module 1 pour tout  $\omega$ .  $\underline{r}_E$  et  $\underline{t}_E$  sont complexes.

prop : Pour une OPPH incidente du vide sur du plasma à  $\omega < \omega_p$ , le plasma se comporte comme **un miroir parfait** :

$$R = \left| \frac{1 + jn'}{1 - jn'} \right|^2 = |r|^2 = 1, \quad T = 0 \quad (31)$$

exo :

1. On note dans le plasma  $\underline{k}_2 = -jk'$ . En déduire les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en notation complexe dans le plasma. Puis passer en notation réelle.
2. Exprimer les vecteurs de Poynting pour les ondes incidente, réfléchie et transmise.
3. En déduire les expressions de  $R$  et  $T$  ci-dessus.

### 5.4 Exo : réflexion sur l'ionosphère

L'ionosphère<sup>6</sup>, partie haute de l'atmosphère est assimilable à un plasma neutre peu dense, de densité volumique d'électrons  $n_0 = 10^{11} \text{ m}^{-3}$ . On donne  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ,  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , et  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . On donne  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$ .

1. Montrer que la pulsation plasma de l'ionosphère vaut  $\omega_p = 17,8 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ .
2. Montrer que le rayonnement solaire n'est quasiment pas réfléchi par l'ionosphère.
3. Montrer que les ondes radios AM dans le domaine de fréquences des centaines de kHz peuvent être transmis à grande distance par réflexion sur l'ionosphère, mais pas les fréquences radio FM autour de 100 MHz.

## 6 Cas d'une onde électromagnétique sur une interface vide/métal

### 6.1 Conductivité

On considère une onde incidente depuis le vide sur un métal de conductivité statique  $\sigma_0$ , et de force de dissipation  $\vec{F} = -m\vec{v}/\tau$ . On note  $\vec{u}_x$  la direction de propagation de l'onde incidente. Le vide occupe alors le demi-espace  $x < 0$ , le conducteur occupe  $x > 0$ . L'indice du vide est  $n_1 = 1$ . Exprimons l'indice  $\underline{n}_2$  du conducteur.

prop à savoir démontrer (cf chapitre E1) : Dans l'approximation quasi-statique  $\omega \ll 1/\tau$  ( $1/\tau \simeq 10^{14} \text{ s}^{-1}$  pour le cuivre, donc valable pour les signaux électriques usuels), on avait trouvé que la conductivité quasi-statique valait :

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (32)$$

6. CE : Utiliser les expressions des coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique dans des situations variées.

prop à démontrer : Sans l'approximation quasi-statique, la conductivité a une partie imaginaire :

$$\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau} \quad (33)$$

exo de cours : À partir du PFD, démontrer l'expression générale de  $\underline{\sigma}(\omega)$  dans un conducteur.

prop à savoir démontrer (cf chapitre PO2) : On donne la relation de dispersion d'une onde électromagnétique en fonction de  $\underline{\sigma}$ , puis on injecte l'expression obtenue.

$$\underline{k}_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\omega\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\omega \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau} \quad (34)$$

## 6.2 Coefficients dans le domaine électrique ( $f < 1$ GHz)

prop : Dans les domaines des signaux électriques usuels,  $\underline{\sigma} \simeq \sigma_0$ .

ex : Pour le cuivre,  $\tau \simeq 10^{-14}$  s. Les signaux électriques usuels sont de pulsations inférieures aux GHz. Donc  $\omega\tau \ll 1$ .

prop démontrée chapitre PO2 : Alors le vecteur d'onde vérifie  $\underline{k}_2 = \frac{1-j}{\delta}$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}}$ . Donc l'indice du conducteur est :

$$\underline{n}_2 = \underline{k}_2 \frac{c}{\omega} = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0 c^2}{2\omega}} - j\sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0 c^2}{2\omega}} \quad (35)$$

prop : Pour une OPPH incidente du vide sur un conducteur parfait ( $\sigma_0 \rightarrow +\infty$ ), pour des fréquences usuelles de signaux électriques, le conducteur se comporte comme **un miroir parfait** :

$$r_E \rightarrow -1, \quad t_E \rightarrow 0, \quad \text{et} \quad R \rightarrow 1, \quad T \rightarrow 0 \quad (36)$$

démo : Exprimer les coefficients  $r_E$  et  $t_E$  en fonction de  $\underline{n}_2$  puis faire tendre  $\sigma_0$  vers l'infini.

## 6.3 Coefficients dans le domaine optique ( $f \simeq 10^{15}$ Hz)

prop : Dans le domaine optique,  $\underline{\sigma} \simeq \frac{\sigma_0}{j\omega\tau}$ .

ex : Pour le cuivre,  $\tau \simeq 10^{-14}$  s. Les signaux optiques usuels sont de pulsations supérieures à  $10^{15}$  s<sup>-1</sup> (ex à 500 nm,  $\omega = 3,8 \cdot 10^{15}$  s<sup>-1</sup>). Donc  $\omega\tau \gg 1$ .

prop : Alors le vecteur d'onde vérifie une relation de dispersion similaire à celle du plasma :

$$\underline{k}_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\sigma_0}{\tau} = \frac{\omega^2 - (\omega'_p)^2}{c^2} \quad (37)$$

où on pourrait définir une pulsation plasma équivalente  $\omega'_p = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0 c^2}{\tau}}$ .

prop : Pour une OPPH incidente du vide sur un conducteur, dans le domaine optique, le conducteur se comporte comme **un miroir parfait** :

$$r_E \simeq -1, \quad t_E \simeq 0, \quad \text{et} \quad R = 1, \quad T = 0 \quad (38)$$

exo de cours :

1. Montrer que dans le domaine optique,  $\omega < \omega'_p$ .
2. En déduire que l'indice est imaginaire pur. Appliquer la même démarche dans un plasma à basse pulsation pour montrer que la lumière visible est réfléchi par un métal.
3. Justifier que lors de la réflexion sur un métal en incidence normale, une onde lumineuse subit un déphasage de  $\pi$ .

rq : Dans l'UV, on passe à  $\omega > \omega'_p$ , donc les métaux peuvent être transparents aux UV.

## 7 Cas d'une onde électromagnétique à l'interface vide/diélectrique

### 7.1 Coefficients d'un milieu diélectrique

prop : Un milieu est dit **diélectrique** s'il ne contient pas de charges électriques libres et donc où ne s'établit pas de courant macroscopique. Il sont en général isolants : le verre, le vide, le bois sec, etc. On se limite ici au cas d'un milieu diélectrique (DLHI) :

- *Linéaire* : la fréquence d'une onde progressive sinusoïdale reste constante lors de la propagation (il existe des milieux non-linéaires : application au doublage de fréquence) ;
- *Homogène* : propriétés identiques en tout point de l'espace (contreexemple : gradient de densité donnant mirage ; fibres optiques à gradient d'indice) ;
- *Isotrope* : propriétés indépendantes selon toutes directions (contreexemple : certains cristaux sont biréfringents) ;
- *Transparent* : absorption négligée.

Dans ce cadre, l'indice de réfraction  $n$  est un réel supérieur à 1. Les relations de  $r_E$  et  $t_E$  permettent de calculer les coefficients<sup>7</sup> de réflexion et transmission en incidence normale :

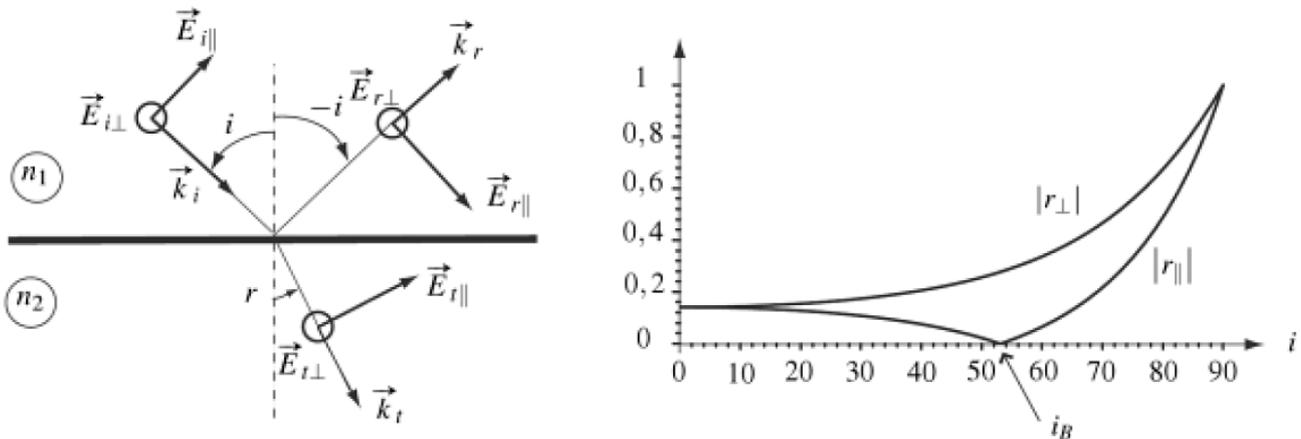
$$\boxed{r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}}, \quad R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2, \quad T = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (39)$$

rq : Si  $n_1 < n_2$ ,  $r_E < 0$ , donc le champ change de signe : l'onde subit un déphasage de  $\pi$  à la réflexion sur un milieu plus réfringent. En revanche, si  $n_1 > n_2$ ,  $r_E > 0$ .

| exo : Calculer le coefficient de réflexion en puissance de l'air sur le verre.

### 7.2 Observation expérimentale de l'influence de l'angle incidence

Considérons cette fois une onde incidente selon un angle d'incidence  $i$  sur le dioptre. On décompose l'onde incidente en sa composante  $\vec{E}_{i\parallel}$  dans le plan d'incidence, et en  $\vec{E}_{i\perp}$  perpendiculaire au plan d'incidence. Le graphe suivant donne l'évolution des modules des coefficients de réflexion de chacune de ces composantes :



Coefficients de réflexion à l'interface entre deux milieux.

prop expérimentale : On remarque qu'il existe un angle, dit **angle de Brewster**<sup>8</sup>, pour lequel la composante  $\vec{E}_{\parallel}$  est complètement transmise ( $r_{\parallel} = 0$ ), donc  $\vec{E}_{r\parallel} = \vec{0}$ .

ODG : Pour air sur verre,  $i_B = 56^\circ$ . Pour air sur eau,  $i_B = 53^\circ$ .

application : **Polarisation par réflexion vitreuse.**

L'onde réfléchi à incidence de Brewster est polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence.

7. CE : Établir et interpréter les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en puissance dans le cas d'une interface

8. CE de TP : Identifier de façon absolue l'axe d'un polariseur par une méthode mettant en œuvre la réflexion vitreuse