

I Capture d'empreintes digitales par réflexion totale frustrée

I.A Optique géométrique

I.A.1 Conception du système optique

1. Il suffit de rappeler ici la relation de SNELL–DESCARTES $n \sin i = \sin r$ dans le cas de l'approximation de GAUSS, donc $n i = r$ avec par ailleurs $i = \tan i = \frac{HI}{HA}$ (figure 1) et $r = \tan r = \frac{HI}{HA_1}$ pour en déduire $HA_1 = \frac{HA}{n}$ ou, ces deux points étant toujours du même côté du dioptre, $\overline{HA_1} = \frac{\overline{HA}}{n}$.

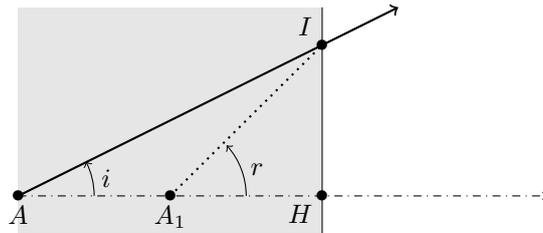


FIGURE 1 – Figure pour la question 1

2. $p = \overline{OA_1}$ et $p' = \overline{OA'_1}$ tandis que $D_1 = \overline{A_1A'_1}$ donc $D_1 = p' - p$. Comme de plus $\gamma = p' - p$ on trouve $p = \frac{D_1}{\gamma - 1}$

et $p' = \frac{\gamma D_1}{\gamma - 1}$. On en déduit immédiatement $f' = -D_1 \frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2}$.

3. Posons $\frac{D_1}{f'} = f(\gamma) = 2 - \gamma - \frac{1}{\gamma}$ donc $f'(\gamma) = \frac{1}{\gamma^2} - 1$ qui vérifie $f'(\gamma) < 0$ pour $\gamma < -1$, d'où le tableau de variation :

γ	$-\infty$	-1	0
$f'(\gamma)$		$-$	0
$f(\gamma)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow
		4	$+\infty$

Ceci impose $f(\gamma) \geq 4$ puisque $\gamma < 0$ donc $D_1 \geq 4f'$.

4. On a maintenant $\frac{D_1}{f'} = -\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma} = \frac{9}{2}$ donc $f' = \frac{2D_1}{9}$ tandis que $p' = \frac{\gamma}{\gamma - 1} D_1 = 3f'$; par ailleurs, $D_1 = D - L + \frac{L}{n}$ soit $D_1 = 9 \text{ cm}$ donc $f' = 2 \text{ cm}$ et $p' = 6 \text{ cm}$ qui est la distance entre lentille et écran.

5. De la relation $\frac{D_1}{f'} = 2 - \gamma - \frac{1}{\gamma}$ on déduit $-D_1 \frac{df'}{f'^2} = \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) d\gamma$ ou encore $\frac{d|\gamma|}{df'} = \frac{D_1}{f'^2} \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2}$ et on cherche à maximiser $|\gamma| > 1$ donc la dérivée $\frac{d|\gamma|}{df'}$ est négative; il faut donc choisir la plus petite focale possible, ce qui fait qu'on augmente la courbure des faces (ou l'indice du verre) et on finit inévitablement par sortir des conditions de GAUSS.

I.A.2 Résolution de l'image

6. Il fut bien sûr $|\gamma|a > \ell_c$ donc $\ell_c < 200 \mu\text{m}$ mais il est inutile de prendre une dimension beaucoup plus faible si on veut juste distinguer un sillon du suivant; si par exemple on veut des détails dans l'image des sillons on peut prendre $20 \mu\text{m}$ pour avoir dix pixels par sillon. *Ici j'avoue ne pas bien comprendre ce qui attendu des candidats.*

7. Par application du théorème de THALÈS dans le schéma de l'énoncé, $\frac{\phi}{e'} = \frac{d}{p' - e'} \simeq \frac{d}{p'}$ puisqu'on va montrer que $e' \ll p'$; pour cela on part de la relation $\frac{1}{p'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{p}$ qu'on différencie pour observer l'effet d'une petite variation de p , $\frac{dp'}{p'^2} = \frac{dp}{p^2}$ donc $\frac{dp'}{dp} = \gamma^2$. Éloigner l'objet revient à augmenter $|p|$ de e donc à diminuer p de $dp = -e$ et finalement $dp' = -\gamma^2 dp$ s'écrit $e' = \gamma^2 e$ d'où les relations $e' \ll p'$ puis $\phi = \gamma d \frac{e}{p}$.

8. On voudrait $\frac{|\gamma|}{|p|} de > |\gamma|a$ ou $\frac{a}{|p|} > \frac{a}{e} \simeq 3$ mais on peut aussi remarquer que l'angle θ entre les rayons issus de deux sillons voisins vérifie $\tan \theta = \frac{a}{|p|}$ et la condition $\tan \theta > 3$ est bien incompatible avec les conditions de l'optique paraxiale.

I.A.3 Réflexion totale

9. Les lois de SNELL-DESCARTES décrivent les rayons issus d'un d'un rayon incident provenant d'un milieu transparent d'indice n_1 lorsqu'il aborde le dioptre (remplacé localement par son plan tangent) qui le sépare d'un autre milieu transparent d'indice n_2 . La première loi affirme qu'un rayon incident, se propageant dans le *plan d'incidence* (défini par le rayon lui-même et la normale \vec{n} au dioptre au point d'incidence I) donne naissance éventuellement à un rayon réfléchi et un rayon transmis, tous deux se propageant dans le même plan d'incidence (figure 2).

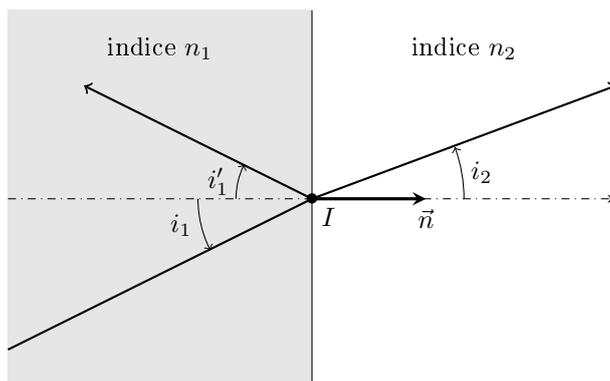


FIGURE 2 – Figure pour la question 9

La seconde loi donne, dans ce plan, la direction du rayon réfléchi selon $i'_1 = -i_1$ et du rayon réfracté (transmis) selon $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ respectivement.

10. La réflexion totale est la propriété de concentrer toute l'intensité émergente dans le seul rayon réfléchi; c'est ce qu'on observe lorsque l'équation permettant de déterminer la direction i_2 n'a pas de solution, donc lorsque $n_1 \sin i_1 > n_2$. Il faut donc d'abord $n_1 > n_2$ et de plus $\sin i_1 > \frac{n_2}{n_1}$.
11. La réponse est non car le faisceau incident parvient sur le dioptre derrière lequel se trouve l'objet à observer sous un angle $i = \frac{\pi}{4}$ tandis que les sillons susceptibles d'être éclairés sont dans l'air ($n_{\text{air}} = 1$) et il y a réflexion totale car $n \sin i = \frac{1,5}{\sqrt{2}} = 1,06 > 1$.

I.B Passage d'une onde électromagnétique sur un dioptre

I.B.1 Relation de dispersion

12. Dans le vide ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$) les équations de MAXWELL s'écrivent $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$, $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On en déduit par exemple pour le champ électrique $\text{rot } \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ tandis qu'une relation générale de l'analyse vectorielle permet aussi d'écrire $\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$; on a donc établi l'équation de propagation de D'ALEMBERT, $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. On en déduit la relation de dispersion en cherchant une solution ayant la forme d'une onde plane progressive et monochromatique, $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ pour laquelle l'équation de propagation impose la relation de dispersion $\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ ainsi que la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} = c$; elle ne dépend pas de la pulsation de l'onde donc le vide n'est pas dispersif.

13. On remplace $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ par $\frac{n^2}{c^2}$ d'où la nouvelle relation de dispersion $\vec{k}^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$ et la vitesse de phase associée $v_\varphi = \frac{c}{n}$ qui dépend cette-fois-ci de la pulsation de l'onde, donc le milieu est dispersif.

I.B.2 Coefficients de réflexion et de transmission

14. La continuité du champ électrique en tout point du dioptre $z = 0$ impose $\vec{E}_i(z = 0) + \vec{E}_r(z = 0) = \vec{E}_t(z = 0)$ donc en projection sur \vec{e}_y et après simplification par $E_0 \exp(j\omega t)$ il reste, avec $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ la relation $e^{jk_{ix}x} + r e^{jk_{rx}x} = t e^{jk_{tx}x}$.
15. Cette relation est valable $\forall x$ donc aussi pour $x = 0$ avec donc $1 + r = t$.
16. En admettant ici l'existence de ces ondes (ce que suggère le schéma, alors justement qu'on sera plus loin amené à considérer que l'onde transmise n'existe pas nécessairement en tant qu'onde plane...) les vecteurs d'onde ont pour normes $k_i = k_r = n \frac{\omega}{c}$ et $k_t = \frac{\omega}{c}$ donc leurs composantes tangentielles ont pour expressions $k_{ix} = n \frac{\omega}{c} \sin i_1$, $k_{rx} = -n \frac{\omega}{c} \sin i'_1$ et $k_{tx} = \frac{\omega}{c} \sin i_2$ donc l'égalité des composantes tangentielles des vecteurs d'onde est bien équivalente aux lois de SNELL-DASCARTES, $i'_1 = -i_1$ et $n \sin i_1 = \sin i_2$.
17. Le champ magnétique d'une onde plane progressive et monochromatique se déduit de la relation de structure (ou de MAXWELL-FARADAY) $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$; on en déduit respectivement $\vec{B}_i = (-k_{iz}\vec{e}_x + k_{ix}\vec{e}_z) \frac{E_0}{\omega} e^{-j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$, $\vec{B}_r = (-k_{rz}\vec{e}_x + k_{rx}\vec{e}_z) \frac{r E_0}{\omega} e^{-j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$ et $\vec{B}_t = (-k_{tz}\vec{e}_x + k_{tx}\vec{e}_z) \frac{t E_0}{\omega} e^{-j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$. On peut maintenant écrire la continuité $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t$ en tout point du dioptre $z = 0$; la projection normale (sur \vec{e}_z) de cette relation redonne simplement la relation $1 + r = t$ tandis que l'autre projection, associée à la relation géométriquement évidente $k_{rz} = -k_{iz}$, fournit la relation attendue, $k_{iz}(1 - r) = k_{tz}t$ ou encore $1 - r = \nu t$ avec les notations de l'énoncé. On vérifie bien sûr que les deux relations établies mènent à $r = \frac{1 - \nu}{1 + \nu}$ et $t = \frac{2}{1 + \nu}$.
18. On a déjà projeté sur \vec{e}_x , $k_{ix} = nk_0 \sin i_1$ et de même sur \vec{e}_z , $k_{iz} = nk_0 \cos i_1$.
19. De la relation rappelée avec l'équation de dispersion $\vec{k}_t^2 = k_0^2$ dans le vide on déduit $k_{tz}^2 = k_0^2 (1 - n^2 \sin^2 i_1)$ donc on doit distinguer le cas $n \sin i_1 \leq 1$ (en l'absence de réflexion totale en optique géométrique) pour lequel $k_{tz} = k_0 \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}$ définit l'angle i_2 de la réfraction par $k_{tz} = k_0 \cos i_2$, et le cas $n \sin i_1 > 1$ (avec réflexion totale) pour lequel $k_{tz} = +jk_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}$. Dans le premier cas, le champ électrique transmis est une onde plane progressive et monochromatique, $\vec{E}_t = t E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$ tandis que dans le second cas cette onde ne garde son caractère propagatif que sur l'axe (Ox) avec au contraire une atténuation progressive sur l'axe (Oz) au fur et à mesure qu'on s'éloigne du dioptre, $\vec{E}_t = t E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - k_{ix}x)} e^{-z/\delta}$ en notant $\delta = \frac{1}{k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}}$.
20. Il s'agit d'une onde évanescente. La distance δ a été exprimée ci-dessus; comme $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ on a aussi l'expression de la distance d'atténuation $\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}}$. On pourrait bien sûr montrer que la composante sur \vec{e}_z du vecteur de POYNTING est en moyenne nulle mais l'absence de propagation dans la direction (Oz) permet aussi de le justifier sans calcul.

I.C Barrière de potentiel et effet tunnel en physique quantique

I.C.1 Marche de potentiel

21. Ici $V(x) = 0$ donc l'équation de SCHRÖDINGER prend la forme $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Phi(x)$ dont les solutions dépendent du signe de l'énergie E . Si on choisit $E < 0$ (ou $E = 0$) la solution est une combinaison linéaire d'exponentielles réelles (ou une fonction affine) et elle ne peut pas décrire un comportement de type « particule provenant de l'infini »; on se contentera donc d'étudier le cas $E = 0$ pour lequel la solution générale de l'équation de SCHRÖDINGER prend la forme $\Phi_G(x) = Ae^{jkx} + Be^{-jkx}$ à condition de poser $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

22. Ici l'équation de propagation s'écrit $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\Phi(x)$ dont la solution prend bien la forme proposée

à condition de poser $\underline{q}^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$ ou $\underline{q} = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$ si $E \geq V_0$ et $\underline{q} = j\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ sinon.

Dans le premier cas, D est l'amplitude d'une onde se propageant dans le sens de $-\vec{e}_x$ qui n'a ici pas de raison d'apparaître à partir de l'onde incidente; la causalité impose donc $\underline{D} = 0$. Dans le second cas D est l'amplitude d'une onde divergente pour $x \rightarrow +\infty$ donc la recherche de solutions bornées impose aussi $\underline{D} = 0$.

23. Identifiant Ae^{jkx} comme l'onde incidente, on note $B = rA$ et $C = tA$ d'où les relations exprimant la continuité de $\Phi(x)$ en $x = 0$, $1 + B = C$ ou encore $\underline{1 + r = t}$ et celle de sa dérivée $\frac{d\Phi}{dx}$, $k(1 - r) = q t$ ou encore $\underline{1 - r = \underline{\nu} t}$; ces équations sont les mêmes que celles qui ont déjà été établies dans le cas d'un dioptre et on a donc les mêmes solutions, $\underline{r = \frac{1 - \underline{\nu}}{1 + \underline{\nu}}}$ et $\underline{t = \frac{2}{1 + \underline{\nu}}}$.

24. Le vecteur \vec{J} est défini par analogie au courant de charge $\vec{j} = \rho\vec{v}$ en remplaçant la densité volumique de charge ρ par celle de probabilité $|\Psi|^2$ et la vitesse par $\frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar\vec{k}}{m}$ puisqu'on identifie l'impulsion $\hbar\vec{k}$ de la particule associée à une onde plane progressive et monochromatique de vecteur d'onde \vec{k} . On a donc $\underline{\vec{J} = \frac{\hbar\vec{k}}{m}|\Psi|^2}$. Les coefficients

de réflexion associés sont alors $\underline{R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|}}$ et $\underline{T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|}}$ donc aussi $\underline{R = |r|^2}$ (les vecteurs d'onde sont les mêmes au signe près pour les ondes incidente et réfléchie) et $\underline{T = |\underline{\nu}| |t|^2}$ (puisque le rapport des vecteurs d'onde est justement égal à $\underline{\nu}$, qui d'ailleurs est ici réel). On en déduit $\underline{R = \left(\frac{1 - \underline{\nu}}{1 + \underline{\nu}}\right)^2}$ et $\underline{T = \frac{4\underline{\nu}}{(1 + \underline{\nu})^2}}$. On

a aussi $(1 - \underline{\nu})^2 + 4\underline{\nu} = (1 + \underline{\nu})^2$ donc $\underline{R + T = 1}$ qui se traduit comme la conservation des flux de particules lors du passage par la marche de potentiel : le flux incident se divise en un flux réfléchi et un flux transmis avec conservation du débit total des particules.

25. L'onde transmise est ici évanescence et on ne peut plus appliquer la relation ci-dessus au calcul de \vec{J} ; le retour à la définition générale montrerait que $\vec{J}_t = \vec{0}$ et donc $\underline{T = 0}$ mais c'est simplement une conséquence de la portée finie de l'onde transmise.

I.C.2 Synthèse de I.B.2 et I.C.1

26. Successivement $\underline{(?_1) \mapsto k_{tz}^2 < 0 \text{ et } k_{tz} \in j\mathbb{R}}$; $\underline{(?_2) \mapsto j\sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}}$; $\underline{(?_3) \mapsto \frac{1 - \underline{\nu}}{1 + \underline{\nu}}}$; $\underline{(?_4) \mapsto j\sqrt{\frac{n^2 \sin^2 i_1 - 1}{1 - \sin^2 i_1}}}$
 et $\underline{(?_5) \mapsto \vec{E} \text{ (et } \vec{B} \text{ d'ailleurs)}}$.

I.C.3 Effet tunnel et réflexion totale frustrée

27. Exploitant l'analogie ci-dessus on peut exprimer le coefficient de transmission en puissance sous la forme $R \simeq \exp(-2\kappa L)$ où on prendra ici pour expression de κ la partie imaginaire du vecteur d'onde, donc $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}$ avec $i = \pi/4$; la longueur L est celle correspondant à l'éclairage du fond du sillon donc $L = \frac{e}{\sin i}$. Numériquement on trouve $\underline{T \simeq e^{-350}}$ ce qui signifie que les creux des sillons sont complètement sombres (pas d'éclairage à cause de la réflexion totale) tandis que les points en contact avec la vitre sont éclairés ($T \simeq 1$ car $L \simeq 0$) : on forme donc une image parfaitement contrastée des empreintes digitales.

II Stockage de déchets radioactifs

II.A Énergie cinétique des particules α

II.A.3 Questions

28. La particule α a une charge $2e$ et le reste du noyau une charge $(Z-2)e$ donc $\underline{V(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \alpha \frac{2(Z-2)\hbar c}{r}}$.

29. La décroissance du nombre de radionuclides est exponentielle puisque $\lambda = -\frac{dN}{dt} \frac{1}{N}$ s'intègre en $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$ donc l'instant $t = T$ tel que $N(t) = \frac{1}{2}N(0)$ vérifie $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$ donc $T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.
30. Puisque $E_\alpha = -V_0 + Ec$ on en déduit $E_c = E_\alpha + V_0$ qui permet d'estimer la vitesse $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$ puis la durée d'un aller-et-retour $T = \frac{1}{f}$ qui se déduit d'une vitesse v et de la distance $2R$ parcourue pendant l'aller-et-retour, $v = \frac{2R}{T}$ donc $f = \frac{1}{2R}v$ qui s'écrit bien $f = \frac{c}{2R} \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}}$.
31. $\lambda = Pf = fe^{-\gamma} = \frac{\ln 2}{T}$ s'écrit aussi $T = \frac{\ln 2}{f}e^\gamma$ donc $\log T = \frac{\ln(\ln 2) - \ln f + \gamma}{\ln(10)}$ où le calcul approché de γ et celui de f imposent aussi $\log T = \log(\ln 2) - \log\left(\frac{c}{2R} \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}}\right) + \frac{2(Z-2)\alpha\sqrt{2mc^2}}{\ln(10)} \left(\frac{\pi}{\sqrt{E_\alpha}} - \frac{\pi}{\sqrt{V_m}}\right)$.
Pour un élément chimique donné, Z est fixé et nous supposons que R l'est aussi, donc que $V_m = \alpha \frac{2(Z-2)\hbar c}{R}$ l'est également ; il reste ensuite à affirmer que, vu les propriétés du logarithme, la grandeur $\log(V_0 + E_\alpha)$ dépend assez peu de E_α (en tout cas moins que le terme en $1/\sqrt{E_\alpha}$ pour justifier la formule semi-empirique de GAMOW).
32. On assimile l'émission thermique au début d'énergie cinétique des particules α sortant du noyau (par unité de masse de celui-ci), donc $w = A_m(E_\alpha + V_0)$; cette énergie cinétique peut être estimée à environ 15 MeV (avec $V_0 \sim 10$ MeV et $E_\alpha \sim 5$ MeV d'après le document fourni) donc $w \sim 75 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$.
33. Multipliant encore par la masse volumique, on obtient une émission thermique par unité de volume $u = \rho w$.

II.B Température d'un fût de stockage

II.B.3 Bilan thermique

34. L'émission de 2 kW provient d'un colis de volume 75 L donc $u = \frac{2 \cdot 10^3}{0,175} = 11,4 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}$.
35. La portion étudiée (vue de dessus sur la figure 3) reçoit le flux $\Phi(r)$ puis réémet le flux (plus élevé) $\phi(r + dr)$ pour évaluer en plus la puissance $u d\tau$ produite entre ces deux rayons, de façon à rester en régime stationnaire : $dU = \delta Q + \delta W$ avec $dU = 0$ (régime stationnaire) et $\delta W = 0$ (par de travail des forces macroscopiques). Comme $d\tau = 2\pi r H u$ on en déduit $\frac{d\phi}{dr} = 2\pi u H r$.

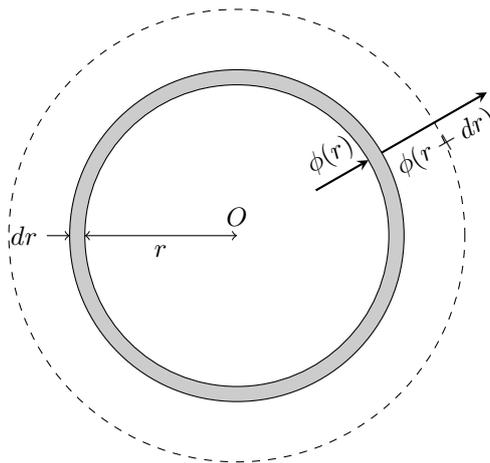


FIGURE 3 – Figure pour la question 35

36. La loi de FOURIER $\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ exprime la densité volumique de flux thermique conductif au sein d'un conducteur de conductivité thermique λ . Elle s'écrit dans la géométrie radiale unidimensionnelle adoptée ici $\vec{j}_{\text{cd}} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$ donc le flux à travers un cylindre de rayon r et de hauteur H est $\phi(r) = -2\pi r H \lambda \frac{dT}{dr}$.
37. L'intégration de $\frac{d\phi}{dr} = 2\pi u H r$ fournit $\phi(r) = \pi u H r^2 + C$ mais la constante d'intégration C est nécessairement nulle puisque aucun flux thermique ne peut sortir d'un cylindre de rayon nul situé au center du colis... ; on

a donc aussi $\pi u H r^2 = -2\pi r H \lambda \frac{dT}{dr}$ donc $\frac{dT}{dr} = -\frac{ur}{2\lambda}$ et $T(r) = -\frac{u^2 r}{4\lambda} + C'$ où $T(R) = -\frac{u^2 R}{4\lambda} + C'$ donc

$$T(r) = T(R) + \frac{u}{4\lambda}(R^2 - r^2).$$

38. Il reste à relier $T(R)$ à la température extérieure T_{ext} (qui ne doit pas dépasser 90°C) et aux phénomènes pariétaux qui assurent le transfert vers l'extérieur de la puissance parvenant en surface du colis; on peut donc

aussi écrire $\phi(R) = h2\pi R H(T(R) - T_{\text{ext}})$; comme $\phi(R) = \pi u H R^2$ il vient aussi $T(R) = T_{\text{ext}} + \frac{uR}{2h}$ d'une

part et au point le plus chaud du colis (au centre) $T_{\text{max}} = T_{\text{ext}} + \frac{uR}{2h} + \frac{uR^2}{4\lambda}$. On peut évaluer séparément

les deux termes de cette équation, soit $\frac{uR^2}{4\lambda} = 132\text{ K}$ et $\frac{uR}{4h} = 10,6\text{ K}$ en convection forcée; on obtient donc

$T_{\text{max}} \simeq 233^\circ\text{C}$, compatible avec les contraintes de l'énoncé. En convection naturelle (*la valeur du coefficient h était, dans ce cas là, absente des sujets imprimés et distribués, mais elle figurait sur l'énoncé mis en ligne le soir même par le concours*) on trouve 251°C , ce qui est là aussi compatible avec l'absence de transition de phase au sein du verre.

II.C Fonte du verre

II.C.3 Questions

39. De façon tout à fait immédiate, $\text{O}_2 + 4\text{e}^- = 2\text{O}^{2-}$.

40. Pour l'électrode de référence, l'oxydant est l'oxygène gazeux d'activité $a = P_{\text{O}_2\text{ref}}/P^\circ$ et le réducteur est formé des ions oxyde O^{2-} du verre en fusion donc le potentiel de l'électrode est donnée par application de la loi de NERNST au couplé cité ci-dessus, $E_{\text{ref}} = E^\circ(T) + \frac{RT}{4\mathcal{F}} \ln \frac{P_{\text{O}_2\text{ref}}/P^\circ}{a(\text{O}^{2-})^2}$. Pour l'électrode de travail, l'oxydant du couple est le dioxygène dissous dans le bain de verre fondu, d'activité $a = f_{\text{O}_2}/P^\circ$. Les deux électrodes sont maintenues à la même température et ont même potentiel standard donc $E = E^\circ(T) + \frac{RT}{4\mathcal{F}} \ln \frac{f_{\text{O}_2}/P^\circ}{a(\text{O}^{2-})^2}$; on suppose bien sûr aussi l'homogénéité du bain de verre fondu pour affirmer que l'activité des ions O^{2-} est la

même dans les deux cas. Finalement, $\Delta E = E - E_{\text{ref}} = \frac{RT}{4\mathcal{F}} \ln \frac{f_{\text{O}_2}}{P_{\text{O}_2\text{ref}}}$.

41. L'équation-bilan (B) écrite est le bilan de la demi-équation rédox (O) de la question 39 et de celle (Ce) relative au cérium, $\text{Ce}^{4+} + \text{e}^- = \text{Ce}^{3+}$, de potentiel standard E'° . Sous la forme de l'énoncé, (B) = 2(Ce) - $\frac{1}{2}$ O et la même relation s'applique aux $\Delta_r G^\circ$, avec en particulier $\Delta_r G_{\text{B}}^\circ = -RT \ln K_{\text{B}}^\circ$ et les relations thermodynamiques de l'oxydo-réduction $\Delta_r G_{\text{O}}^\circ = -4\mathcal{F}E^\circ$ et $\Delta_r G_{\text{Ce}}^\circ = -\mathcal{F}E'^\circ$. On en déduit sans difficulté $\ln K_{\text{B}}^\circ = \frac{2\mathcal{F}}{RT}(E^\circ - E'^\circ)$ tandis que par ailleurs $K_{\text{B}}^\circ = \frac{(f_{\text{O}_2}/P^\circ)^{1/2} a^2(\text{Ce}^{3+})}{a(\text{O}^{2-}) a^2(\text{Ce}^{4+})}$. Il faut ici admettre qu'une même quantité de cérium III et

IV correspond aussi à une même activité (*ce qui, dans les conditions de l'énoncé, n'a rien d'évident*) pour en déduire $f_{\text{O}_2}^* = P^\circ a^2(\text{O}^{2-}) \exp\left(\frac{4\mathcal{F}}{RT}(E'^\circ - E^\circ)\right)$.

42. L'équation d'équilibre précédent peut être recopiée $K_{\text{B}}^\circ = \frac{(f_{\text{O}_2}^*/P^\circ)^{1/2}}{a(\text{O}^{2-})} = \frac{(f_{\text{O}_2}/P^\circ)^{1/2} a^2(\text{Ce}^{3+})}{a(\text{O}^{2-}) a^2(\text{Ce}^{4+})}$ d'où on dé-

duit la relation demandée, $\log \frac{a(\text{Ce}^{3+})}{a(\text{Ce}^{4+})} = 4 \log \frac{f_{\text{O}_2}^*}{f_{\text{O}_2}}$. En particulier si $f_{\text{O}_2} > f_{\text{O}_2}^*$ on passe dans le domaine de prédominance de la forme oxydée Ce^{4+} , donc le taux d'incorporation des déchets de cérium décroît.

43. (a) Pour déplacer les équilibres en faveur de la forme réduite on doit $\boxed{\text{diminuer la pression de dioxygène}}$ (l'oxydant) dans l'atmosphère au-dessus du bain (c'est ce qu'on a établi ci-dessus);

(b) Pour déplacer les équilibres en faveur de la forme réduite on doit $\boxed{\text{augmenter l'activité des ions oxyde}}$ (le réducteur) donc la basicité du bain; *l'énoncé ne demande pas de faire explicitement le lien mais c'est pourtant assez facile en considérant une simple déshydratation, $2\text{OH}^- = \text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O}$.*

(c) L'ajout de matière $\boxed{\text{réductrice}}$ déplace l'équilibre en réduisant les ions cérium IV en cérium III (décrit d'ailleurs par le texte à la question suivante).

44. La figure proposée montre que, comme annoncé, l'ajout de matière réductrice maintient en permanence la fugacité du dioxygène dissous sous la barre critique de 1 bar (qui conduirait à la formation de bulles donc à la dégradation de la qualité du verre) même à forte température.

Solutions proposées par P. Roux, paul.roux@fauriel.org.