

## TDMF2 : Actions mécaniques dans un fluide en mouvement

### Savoirs

- Forces de pression. Équivalent volumique.
- Contraintes tangentielles dans écoulement  $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$ , viscosité. Équivalent volumique dans écoulement incompressible.
- Nombre de Reynolds. Traînée d'une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme dans fluide newtonien. Coefficient  $C_x$ , évolution avec Re. Écoulement laminaire et turbulent.

### Savoir-faire

- Pression : utiliser  $d\vec{F} = -pd\vec{S}$  et  $\vec{f} = -\vec{\text{grad}}(p)$ .

*Cf PCSI pour la statique des fluides, cf MF0 pour statique des fluides en référentiel galiléen, cf chapitre suivant pour la dynamique des fluides.*

démonstration : Démontrer l'expression des forces volumiques de pression en base cartésienne par calcul de résultante sur un volume mésoscopique cubique.

- Viscosité : utiliser  $d\vec{F} = \eta \partial v_x / \partial y dS \vec{u}_x$  fournie pour un écoulement  $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$ . Utiliser  $\vec{f} = \eta \Delta \vec{v}$ . Exo 3.

démonstration : Établir  $\vec{f} = \eta \Delta \vec{v}$  sur l'exemple d'écoulement précédent.

- Évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique.  
*Exos 1.1, 1.2, 2.1, 2.2.*

### Interro de cours

1. Donner l'expression de la densité volumique des forces de pression.
2. Donner l'expression de la densité volumique des forces de viscosité.
3. Soit un champ de vecteur  $\vec{v}$  de composantes  $(v_x, v_y, v_z)$  en base cartésienne. Donner l'expression de  $\Delta \vec{v}$  en fonction de  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$ .
4. Donner l'expression du nombre de Reynolds.
5. Dans la limite  $\text{Re} \ll 1$ , l'écoulement est-il laminaire ou turbulent ? Même question pour  $\text{Re} \gg 1$ .
6. Considérons une force de traînée  $F = -\alpha \cdot v^k$ . Dans les limites  $\text{Re} \ll 1$  et  $\text{Re} \gg 1$ , donner la valeur de  $k$ .

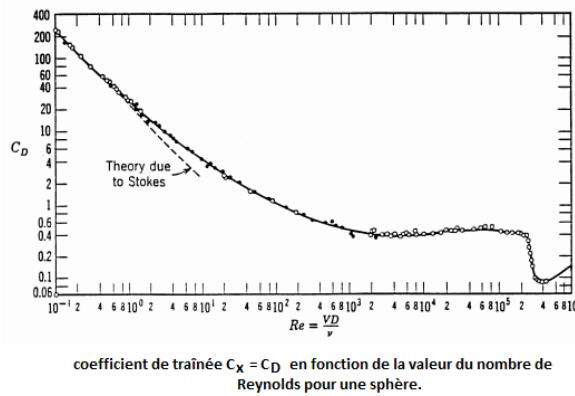
## 1 Jouer avec le nombre de Reynolds

### 1.1 Écoulements similaires

1. Considérons un écoulement d'eau ( $\eta_1 = 10^{-3}$  Pa.s,  $\mu_1$ ) dans une conduite de 5 cm de diamètre à une vitesse moyenne de 0,2 m/s. Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement.
2. Un écoulement d'huile ( $\eta_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  Pa.s,  $\mu_2 = 0,9\mu_1$ ) est similaire au précédent (il a le même nombre de Reynolds) dans une conduite de 30 cm de diamètre. Calculer la vitesse moyenne puis le débit volumique d'huile.

### 1.2 Traînée

Une bille de masse  $m = 0,2$  g et de rayon  $r = 3$  mm tombe dans une colonne d'eau, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité dynamique  $\eta = 10^{-3}$  Pl, suivant la verticale descendante portée par le vecteur  $\vec{u}_z$ . La force de traînée exercée par le fluide sur la bille se met sous la forme :  $\vec{F} = -\frac{C_x}{2}\mu\pi r^2 v^2 \vec{u}_z$  où  $C_x$  est un coefficient de traînée qui peut dépendre de la valeur du nombre de Reynolds et donc de  $v$ ,  $r$  et  $\nu = \eta/\mu$ .



- Justifier à l'aide de la figure que dans le cas des faibles nombres de Reynolds (préciser la limite), la force de traînée peut se mettre sous la forme :  $\vec{F} = -6\pi\eta rv\vec{u}_z$  (formule de Stokes).
- Dans quel domaine de valeurs du nombre de Reynolds peut-on supposer que le coefficient de traînée est constant ? Quelle est sa valeur approchée ?
- En déduire la vitesse limite atteinte par la bille dans la colonne d'eau.

## 2 Exos de méca avec différents frottements

### 2.1 Chute d'une gouttelette : frottements linéaires

Quand une gouttelette du brouillard de Reims tombe dans l'air sans vent, celui-ci exerce sur la gouttelette, supposée sphérique, une force modélisée par la formule de Stokes :  $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$  où  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Pa.s est la viscosité de l'air,  $r$  le rayon de la sphère et  $\vec{v}$  la vitesse de la gouttelette par rapport à l'air. L'étude expérimentale montre que la goutte atteint le sol avec une vitesse limite  $v_l = 1,2 \text{ mm.s}^{-1}$ . Le but de l'exercice est d'en déduire une mesure du rayon  $r$  de cette goutte. Données : Masse volumique de l'eau  $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ , masse volumique de l'air  $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

- Évaluer le nombre de Reynolds pour valider le choix de modèle de force de frottements.
- Calculer le rapport entre la norme  $\Pi$  de la poussée d'Archimède sur la gouttelette et son poids  $P$ .

On négligera dans la suite la poussée d'Archimède. On oriente l'axe ( $Oz$ ) vers le bas.

- À l'aide du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation différentielle sur la vitesse  $v = \frac{dz}{dt}$  de la gouttelette.
- Sans la résoudre, en déduire l'expression de la vitesse limite  $v_l$  et du temps caractéristique  $\tau$  du régime transitoire.
- Déduire alors des mesures la valeur du rayon  $r$  d'une gouttelette de brouillard.
- Résoudre l'équation différentielle sur  $v(t)$  dans le cas d'une vitesse initiale nulle.
- On pose  $z(0) = 0$ . En déduire l'expression de  $z(t)$  en fonction du temps.

### 2.2 Tir aquatique : frottements quadratiques

Attaquons nous à un problème physique de la plus haute importance : quelle est la portée de tir d'un fusil classique ... utilisé sous l'eau ? L'interaction entre la balle de fusil et l'eau est complexe, mais proposons le modèle simplifié suivant. On considère un fusil éjectant une balle de masse  $m = 2 \text{ g}$  de diamètre  $d = 5 \text{ mm}$  à la vitesse  $v_0 = 500 \text{ m.s}^{-1}$ . On modélise la force de trainée d'un fluide sur la balle par  $\vec{F} = -\alpha.v.\vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse de la balle,  $v$  est sa norme, et  $\alpha$  une constante positive donnée par :

$$\alpha = \frac{1}{2}\rho.S.C_x \quad (1)$$

avec  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $S$  la section de la balle, et  $C_x = 0,3$ . Dans cet exercice, on ne prendra en compte qu'une seule force : celle des frottements.

- Évaluer le nombre de Reynolds pour valider le choix de modèle de force de frottements. On donne  $\eta_{\text{air}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$  et  $\eta_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ .

2. Déterminer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse est du type :

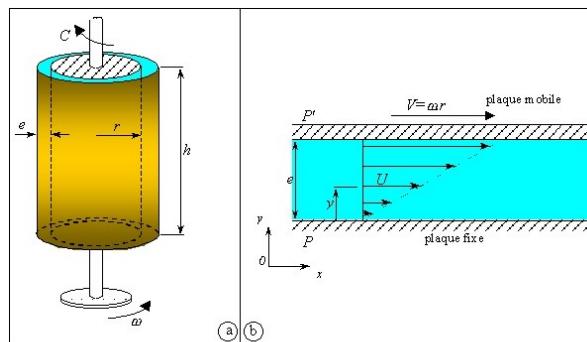
$$\frac{dv}{dt} + kv^2 = 0 \quad (2)$$

où  $k$  est une grandeur qu'on exprimera en fonction de  $\alpha$  et  $m$  et dont on justifiera la dimension.

3. Sans la résoudre, déduire de cette équation une longueur caractéristique du problème qu'on assimilera alors à un ordre de grandeur de la portée du tir. Faire l'application numérique dans le cas du tir sous l'eau et du tir dans l'air. Commenter.
4. On cherche maintenant à estimer l'évolution de la vitesse  $v(t)$ . Bien que l'équation différentielle sur  $v$  soit non-linéaire, mettre en œuvre une démarche permettant la détermination de  $v(t)$ .
5. Déduire de l'expression de  $v(t)$  la durée  $t_{1/2}$  que met la balle à perdre la moitié de sa vitesse initiale dans l'eau et dans l'air.

### 3 Viscosimètre de Couette

Un viscosimètre de Couette est représenté sur la figure ci-dessous. Cet instrument, constitué de deux cylindres de même axe  $Oz$ , permet de mesurer la viscosité d'un fluide. Le cylindre extérieur tourne à vitesse angulaire  $\omega = \omega_0$  constante. Le cylindre intérieur de rayon  $R = 2,65$  cm subit ainsi des forces visqueuses. Il est maintenu fixe en lui exerçant une force (opposée aux forces visqueuses), qui est mesurée à l'aide d'un dynamomètre.



Dispositif expérimental de Couette permettant la mesure de la viscosité du fluide entre les deux cylindres. a) vue de l'ensemble du dispositif. b) vue de coupe entre les deux cylindres.

Entre les deux cylindres, on place ici une couche d'épaisseur  $e = 2$  mm d'huile de paraffine sur une hauteur  $H$ . On suppose que la vitesse du fluide est de la forme  $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{u}_\theta$  et que le champ de pression est de la forme  $p(r, z)$  dans le champ de pesanteur  $-g\vec{u}_z$  uniforme.

Les effets de bords sur le fond en  $z = 0$  et à l'interface fluide air  $z = H$  sont négligés, ce qui revient à supposer que l'écoulement est invariant suivant  $z$ . Dans ce système de coordonnées cylindriques, la force de viscosité subie par une particule de fluide en  $r$  sous l'action du fluide plus à l'extérieur est :

$$d\vec{F} = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) dS \vec{u}_\theta$$

1. Calculer le moment par rapport à l'axe  $Oz$  de la force  $d\vec{F}$  exercée sur une surface  $dS \vec{u}_r$  par la partie du fluide plus éloignée de l'axe.
2. En déduire que le moment associé aux forces surfaciques de viscosité due à la partie du fluide plus éloignée de l'axe qui s'exercent à une distance  $r$  de l'axe par rapport à  $Oz$  est  $\Gamma(r) = 2\pi\eta r^3 H \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right)$ .
3. Le système est en régime stationnaire. En appliquant le théorème du moment cinétique à la couche de fluide d'épaisseur  $dr$  comprise entre  $r$  et  $r + dr$ , montrer que  $\Gamma(r)$  est indépendant de  $r$ , noté  $\Gamma_0$ .
4. Déterminer alors l'expression de  $v_\theta(r)$  en fonction de  $\Gamma_0$  et d'une constante d'intégration.
5. Écrire les deux conditions aux limites. En déduire l'expression de  $v_\theta(r)$  et  $\Gamma_0$  en fonction des données du problème.