

TDPO3 : Réflexion et transmission aux interfaces

Savoirs

- Réflexion, transmission d'une onde acoustique plane progressive sous incidence normale sur une interface plane infinie entre deux fluides : coefficients de réflexion et transmission en amplitude des vitesses et surpressions, ainsi que des puissances acoustiques surfaciques moyennes.
- Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique polarisée rectilignement à l'interface entre deux milieux d'indices complexes $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$ dans le cas d'une incidence normale : coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique.
- Exemples des interfaces entre diélectriques, vide/plasma et vide/métal.

Savoir-faire

- Ondes acoustiques : expliciter des conditions aux limites à une interface. Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion.
- Ondes acoustiques : Associer l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.
- Ondes électromagnétiques : exploiter la continuité (admise) du champ électromagnétique dans cette configuration pour obtenir l'expression du coefficient de réflexion en fonction des indices complexes.
- Ondes électromagnétiques : utiliser la notation réelle ou complexe pour obtenir les coefficients R et T dans des exemples variés (interface entre diélectriques, vide/plasma, vide/conducteur).

Interro de cours

1. Soit une OPPH acoustique d'amplitude de pression p et d'amplitude de vitesse v dans un milieu d'impédance acoustique Z . Donner le lien entre p et v pour une propagation selon $+\vec{u}_x$ et selon $-\vec{u}_x$.
2. Soit une interface entre deux milieux. Définir le coefficient de réflexion r_p en surpression et le coefficient de transmission en surpression t_p . De même pour la vitesse r_v et t_v .
3. Définir le coefficient de réflexion en puissance R en fonction des intensités acoustiques, puis en fonction des vecteurs de Poynting. Idem pour le coefficient de transmission en puissance T .
4. Comment sont reliés les coefficients R et T (respectivement coefficients de réflexion et transmission en puissance) ?
5. Soit une OPPH électromagnétique de vecteur d'onde $\vec{k}$. L'exprimer en fonction de l'indice de réfraction $\underline{n}$, ω , c et la direction de propagation $\underline{u}$.
6. Soit une OPPH incidente $\vec{E}_i(x, t) = E_{i0}.e^{j(\omega t - \underline{k}_1 x)}.\vec{u}_y$. On note aussi $\vec{E}_r(x, t) = E_{r0}.e^{j(\omega t + \underline{k}_1 x)}.\vec{u}_y$, $\vec{E}_t(x, t) = E_{t0}.e^{j(\omega t - \underline{k}_2 x)}.\vec{u}_y$. En déduire les champs magnétiques incidents, réfléchis et transmis.

1 Réflexion sur un plasma

Un plasma occupe le demi-espace $x > 0$. Une OPPH polarisée rectilignement se propage dans le vide (demi-espace $x < 0$) et atteint sous incidence normale le plasma. Le champ électrique de cette onde est noté :

$$\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{e}_y$$

L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchi et à une onde transmise. La norme du vecteur d'onde de l'onde réfléchi sur le plasma est k . La norme du vecteur d'onde de l'onde transmise dans le plasma est telle que $k_p^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ où ω_p est la pulsation plasma (voir cours).

On supposera que les champs électrique et magnétique sont continus à l'interface vide-plasma.

1. On note $\underline{r}E_0$ l'amplitude complexe du champ électrique et $\underline{t}E_0$ celle du champ électrique de l'onde transmise. Calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ et donner l'expression du champ électrique réel de chaque onde (on distinguera les cas $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$).
2. On définit de même les facteurs de réflexion R et de transmission T en énergie à partir du flux du vecteur de Poynting associé à chaque onde à travers une surface S du plan $x = 0$. Calculer R et T . Commenter.

2 Réflexion sur un conducteur dans le domaine électrique usuel

On considère une onde électromagnétique en incidence normale depuis le vide sur un métal. On se place aux fréquences électriques usuelles $f < 1$ GHz. Dans ce cadre, le matériau est de conductivité réelle $\sigma_0 > 0$. On cherche à déterminer si l'onde électromagnétique est réfléchi. On admet l'indice complexe du métal (cf démo chapitre PO2) :

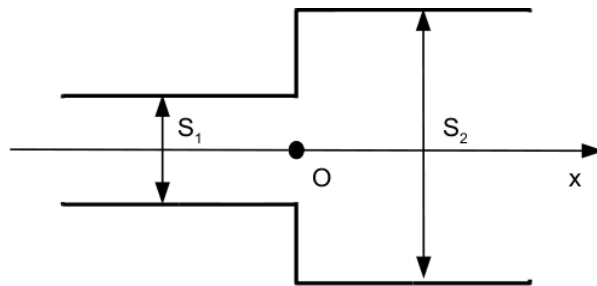
$$\underline{n}_2 = \underline{k}_2 \frac{c}{\omega} = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 c^2}{2\omega}} - j \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 c^2}{2\omega}} \quad (1)$$

1. Déterminer les coefficients r_E et t_E en fonction de $\underline{n}_2$.
2. Dans la limite du conducteur parfait ($\sigma_0 \rightarrow +\infty$), que deviennent ces coefficients ?
3. En déduire R et T .

3 Discontinuité de diamètre (**)

Conformément au programme, nous avons étudié le cas de la réflexion et de la transmission d'une onde sonore au niveau de l'interface entre deux fluides à l'intérieur d'un tuyau de section constante (cette section était prise infinie dans le cadre du cours). Le présent exercice vise à généraliser ces conditions de passage dans le cas où le tuyau sonore est rempli du même fluide mais présentant deux parties cylindriques de diamètres respectifs S_1 et S_2 raccordés par une discontinuité brutale en $x = 0$ (cf figure ci-dessous).

De la même manière qu'en cours, on montre qu'en $x = 0$ il y a continuité de la surpression. Par contre, c'est le débit volumique qui est continu au niveau de l'interface et non plus la vitesse (vous remarquerez que dans le cas particulier $S_1 = S_2$ la vitesse est continue et l'on retrouve le cas du cours).



On note ρ_0 la masse volumique de l'air au repos et c la célérité des ondes sonores. Une OPPM est envoyée dans la direction des x croissants dans le tube 1 : $p_i(x, t) = p_{i,m} \cos(\omega t - kx)$.

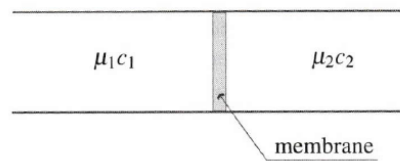
1. Justifier simplement que c est la même dans les deux parties du tube.
2. Soient p_r et p_t les OPPM réfléchi et transmise au niveau de l'interface. Donner les expressions des ondes de vitesse v_i , v_r et v_t en fonction de p_i , p_r et p_t ainsi que de ρ_0 et de c .
3. Déterminer les expressions des coefficients de réflexion r et de transmission t relatifs aux amplitudes de surpression en fonction du rapport $\beta = S_2/S_1$.
4. En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T relatifs aux puissances acoustiques des ondes réfléchi et transmise :

$$R = \frac{P_r}{P_i} \text{ et } T = \frac{P_t}{P_i} \text{ avec } P_i, P_r \text{ et } P_t \text{ les puissances des trois ondes sonores.}$$

5. Tracer le graphe de la fonction $R(\beta)$ et préciser la signification physique de son minimum.
6. Étudier le cas où $S_2 \rightarrow \infty$. En déduire qu'un tuyau ouvert sur l'atmosphère impose un nœud de surpression.
7. Une flûte peut être considérée en première approximation comme un tuyau sonore de longueur L ouvert à ses deux extrémités. Il se comporte donc pour certaines fréquences comme un résonateur siège d'une système d'ondes stationnaires de longueur d'onde λ . Ces fréquences sont les modes propres de l'instrument et correspondent aux notes qu'il est capable de générer. Déterminer la longueur d'une flûte pour que son mode fondamental soit la note mi de fréquence $\nu = 330$ Hz sachant que $c = 340$ m.s⁻¹. Montrer que les notes harmoniques, de fréquence supérieure au fondamental, sont régulièrement espacées en fréquence et calculer l'écart entre deux harmoniques successifs.
8. Que vaut le coefficient de transmission en puissance dans le cas de la flûte précédente ? Quelles conséquences cela a-t-il sur l'utilisation de la flûte comme instrument ? Quelle solution voyez-vous pour résoudre ce problème ?

4 Réflexion et transmission sur une membrane (**)

La membrane, de masse surfacique σ , située en $x = 0$, est infiniment mince. Elle peut coulisser sans frottement dans le tuyau horizontal et sépare deux fluides parfaits. On note μ_i et c_i la masse volumique et la célérité des ondes acoustiques dans chacun des deux demi tuyaux ($i = 1$ ou 2). Le tuyau est supposé illimité.



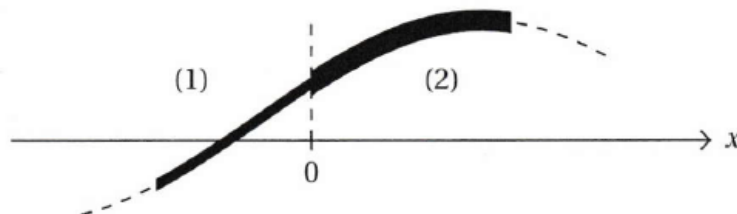
Une onde incidente plane progressive monochromatique de pulsation ω arrive sur la membrane.

1. Déterminer l'onde transmise et l'onde réfléchie.
2. Dans la suite de l'exercice, les deux milieux de part et d'autre de la membrane sont identiques. Déterminer le coefficient de transmission T en énergie, rapport des flux moyens d'énergie transmise et incidente.
3. Tracer l'allure de la courbe $G_{dB} = 10 \log(T(\omega))$ en fonction de $\log(\omega)$. Quelle sont la nature du filtre, la fréquence de coupure f_c à -3 dB et la pente pour $f > f_c$?
4. On souhaite un affaiblissement de 40 dB pour une fréquence de 200 Hz. Dans quel domaine se situe la fréquence de coupure f_c ? Commenter. En déduire la masse surfacique σ puis l'épaisseur a de la cloison sachant que sa masse volumique est $\rho = 1200 \text{ kg.m}^{-3}$. L'hypothèse d'une membrane infiniment fine est-elle vérifiée ?

5 Jonction de deux cordes (** → ***)

5.1 Version peu guidée (***)

On souhaite transmettre une onde progressive monochromatique d'une corde à une autre, dont le diamètre est double. Ces deux cordes sont constituées du même matériau. On fait l'hypothèse que l'ensemble est sans raideur et que la tension est la même dans les deux cordes.



1. Pour avoir le coefficient de transmission maximal, a-t-on intérêt à envoyer le signal de la petite corde vers la grande ou dans le sens inverse ? Quels sont les coefficients de transmission en amplitude dans chacun des sens de propagation ?
2. Même question dans le cas où les cordes précédentes sont reliées par un nœud de masse M .

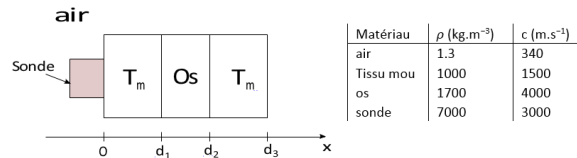
5.2 Version plus guidée (**)

1. Déterminer le lien entre les célérités dans les deux cordes, en déduire les vecteurs d'onde.
2. Exprimer les ondes de vibrations $y(x, t)$ comme des sommes d'OPPH dans les deux milieux.
3. Justifier que y et $\partial y / \partial t$ sont continues à la jonction.
4. Utiliser alors ces conditions aux limites pour en déduire $\underline{t}$.
5. Dans le cas d'un nœud à la jonction, comment sont modifiées les conditions aux limites ?

6 Échographie

On se propose d'étudier un modèle simple du principe d'une échographie. Une sonde émet des impulsions sonores. Cette sonde est également utilisée comme récepteur des ondes réfléchies (échos) sur les différents interfaces rencontrés. Dans cette étude, on ne considère pas les réflexions multiples (une onde s'étant réfléchi sur plus d'un interface n'est pas détectée).

Nous allons étudier une échographie de la cuisse comme modélisée sur la figure. On donne dans le tableau les valeurs de la vitesse du son et de la masse volumique des différents milieux considérés. On donne également les épaisseurs des différents milieux : $d_1 = 6$ cm, $d_2 = 9$ cm et $d_3 = 15$ cm.



Partie A : adaptation d'impédances :

Si on pose la sonde à même la peau, une fine pellicule d'air est coincée entre la sonde et la peau.

1. Expliquez pourquoi on observe alors un seul écho.
2. Quelle doit être la valeur de l'impédance d'un matériau (gel) placé entre la cuisse et la sonde pour maximiser la transmission de l'onde sonore entre la sonde et la cuisse ? Indication : Pour a , b et x strictement positifs, la

fonction $g(x) = \frac{16abx^2}{(a+x)^2(b+x)^2}$ admet un maximum unique pour $x = \sqrt{ab}$.

Partie B : échos sans gel :

Dans cette partie, on néglige les échos dus aux réflexions sur le gel et on considère que les épaisseurs de la sonde et du gel sont nulles. On note I_A l'intensité acoustique transmise par la sonde au premier tissu mou (situé entre les abscisses 0 et d_1 sur la figure). Temporellement, la source délivre une impulsion sonore rectangulaire de largeur τ . On note t_A l'instant où la source commence à émettre le pulse ce qui correspond dans cette approximation à l'instant où le front d'onde entre dans le premier tissu mou.

1. Si on néglige les réflexions sur le gel, combien d'échos la source (utilisée comme récepteur) doit-elle détecter ?
2. Déterminer les temps d'arrivée de ces différents échos en fonction de t_A , des différentes distances $d_{i=1,2,3}$ et des différentes vitesses de propagation.
3. Déterminer l'intensité acoustique des échos en fonction de I_A et des impédances acoustiques caractéristiques des différents milieux.

Partie C : échos avec gel :

On tient compte maintenant des réflexions sur le gel. On note E l'épaisseur de la sonde et e l'épaisseur de la couche de gel. On prendra la valeur déterminée dans la partie Adaptation d'impédance pour l'impédance acoustique du gel. La vitesse du son dans le gel c_{gel} sera prise égale la vitesse du son dans les tissus mous. On note I_0 l'intensité acoustique délivrée par la source.

1. Cette fois, combien d'échos supplémentaires sont détectés ?
2. Quelle condition sur e , c_{gel} et τ doit être remplie pour que les deux échos supplémentaires ne se chevauchent pas ?
3. Exprimer l'intensité acoustique de ces deux échos en fonction de I_0 et des impédances acoustiques caractéristiques du gel et de la sonde.
4. Exprimer I_A (intensité transmise dans le premier tissu mou) en fonction de I_0 et des impédances acoustiques.

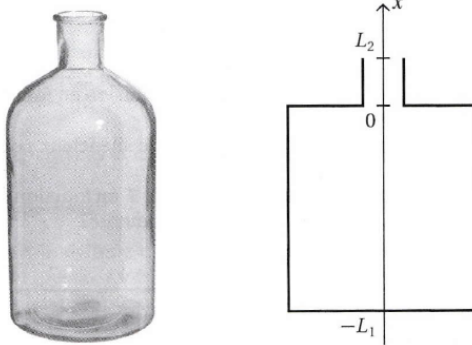
Partie D : application à l'échographie :

On donne $\tau = 1$ μ s, $E = 1$ cm, $e = 0.5$ mm. Le temps où la sonde commence à émettre est $t_0 = 0$ s.

1. Déterminer t_A (instant où le front d'onde arrive sur le premier tissu mou).
2. Représenter l'allure de l'échographe obtenu.
3. Faites un zoom temporel sur les deux premiers échos et représentez leur allure.

7 Modes propres d'une bouteille (**)

Une bouteille ouverte remplie d'air (figure de gauche ci-après) est modélisée par la juxtaposition de deux cylindres de même axe (Ox) (figure de droite ci-après), représentant respectivement le corps de la bouteille (section S_1 et $-L_1 \leq x \leq 0$) et son col (section $S_2 < S_1$ et $0 \leq x \leq L_2$).



On cherche les pulsations ω des modes propres de la bouteille décrits par les champs de vitesses dans le corps :

$$v_1(x, t) = \underline{A}_1 e^{j(\omega t - k_1 x)} + \underline{B}_1 e^{j(\omega t + k_1 x)},$$

dans le col :

$$v_2(x, t) = \underline{A}_2 e^{j(\omega t - k_2 x)} + \underline{B}_2 e^{j(\omega t + k_2 x)}.$$

1. Justifier la forme de ces expressions et déterminer k_1 et k_2 . Exprimer les surpressions complexes $p_1(x, t)$ et $p_2(x, t)$ correspondantes.
2. Écrire la condition aux limites au fond de la bouteille en $x = -L_1$ et établir une relation (1) entre les amplitudes complexes inconnues $\underline{A}_1$ et $\underline{B}_1$.
3. Comment s'écrit la condition aux limites en $x = L_2$? En déduire la relation (2) entre les amplitudes $\underline{A}_2$ et $\underline{B}_2$.
4. En faisant un bilan de masse pour un volume d'épaisseur $\varepsilon \rightarrow 0$ au voisinage de $x = 0$, montrer la continuité du débit volumique en $x = 0$. En utilisant par ailleurs la continuité de la surpression $p_1(0^-, t) = p_2(0^+, t)$, établir deux nouvelles relations (3) et (4) entre les amplitudes $\underline{A}_1, \underline{B}_1, \underline{A}_2, \underline{B}_2$.
5. Établir l'équation donnant les pulsations propres de la bouteille :

$$S_1 \tan\left(\frac{\omega L_1}{c}\right) = S_2 \cotan\left(\frac{\omega L_2}{c}\right).$$

6. Discuter graphiquement cette équation implicite sur ω . Quelle est l'influence du col sur les fréquences propres?

8 Miroir de Bragg (**)

Les miroirs utilisés usuellement dans le domaine optique sont des miroirs métalliques qui présentent un coefficient de réflexion en puissance de l'ordre de 90%. Cette valeur de réflectivité s'avère limitante pour certaines applications telles que la réalisation de cavités laser avec très peu de pertes. Des miroirs avec des coefficients de réflexion proches de 1 peuvent être obtenus par empilement de couches diélectriques, correspondant à des matériaux transparents et non absorbants. La réflexion de la lumière est favorisée dans ces structures par un phénomène interférentiel : les ondes réfléchies interfèrent constructivement alors que les ondes transmises interfèrent destructivement.

Afin d'appréhender le fonctionnement d'un miroir diélectrique, considérons pour commencer une unique lame diélectrique composée d'un milieu d'indice n_1 et d'épaisseur e_1 comprise entre $z = 0$ et $z = e_1$.

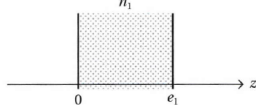


Figure 18.17. Lame diélectrique d'indice n_1 et d'épaisseur e_1 .

Une onde de longueur d'onde dans le vide λ_0 telle que $2n_1 e_1 = \lambda_0/2$ se propage dans le milieu. Le champ électrique associé à cette onde s'écrit en notation complexe à l'intérieur de la lame sous la forme :

$$\vec{E}(0 < z < e_1, t) = \underline{A}_1 e^{j(\omega t - k_1 z)} + \underline{A}'_1 e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_y,$$

où k_1 représente le vecteur d'onde de l'onde dans le milieu diélectrique d'indice n_1 .

1. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ associé à l'onde dans la lame.
2. On écrit les champs électrique et magnétique en entrée et en sortie de la lame sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z=0^-, t) &= \underline{E} e^{j\omega t} \vec{u}_y & \vec{E}(z=e_1^+, t) &= \underline{E}' e^{j\omega t} \vec{u}_y, \\ \vec{B}(z=0^-, t) &= \underline{B} e^{j\omega t} \vec{u}_y & \vec{B}(z=e_1^+, t) &= \underline{B}' e^{j\omega t} \vec{u}_y, \end{aligned}$$

où $\underline{E}, \underline{B}$ représentent les amplitudes complexes des champs électrique et magnétique à l'entrée de la lame en $z = 0$ et $\underline{E}', \underline{B}'$ les amplitudes complexes des champs électrique et magnétique en sortie de la lame en $z = e_1$. Montrer que :

$$\underline{E}' = j \frac{c}{n_1} \underline{B} \quad \text{et} \quad \underline{B}' = j \frac{n_1}{c} \underline{E}.$$

Une seconde lame diélectrique d'indice n_2 et d'épaisseur e_2 telle que $2n_1 e_1 = 2n_2 e_2 = \lambda_0/2$ est accolée à la première lame.

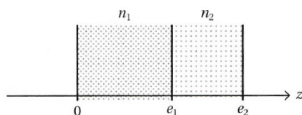


Figure 18.18. Deux lames diélectriques accolées formant le motif d'un miroir de Bragg.

On note $\underline{E}''$ et $\underline{B}''$ les amplitudes complexes des champs électrique et magnétique en sortie de la seconde lame de telle sorte que les champs s'écrivent en $z = e_2$:

$$\vec{E}(z=e_2, t) = \underline{E}'' e^{j\omega t} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}(z=e_2, t) = \underline{B}'' e^{j\omega t} \vec{u}_y.$$

3. Montrer que les amplitudes complexes des champs en entrée et en sortie du système de deux lames vérifient les relations :

$$\underline{E}'' = -\frac{n_1}{n_2} \underline{E} \quad \text{et} \quad \underline{B}'' = -\frac{n_2}{n_1} \underline{B}.$$

On considère maintenant N empilements des deux lames précédentes positionnés dans l'espace $z > 0$. On note r le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique sur la face d'entrée du dispositif en $z = 0$ et t le coefficient de transmission en amplitude du champ électrique au travers du dispositif total.

4. Écrire les expressions des champs électrique et magnétique dans les domaines $z < 0$ et $z > N(e_1 + e_2)$.
5. Déterminer l'expression du coefficient de réflexion en amplitude r .
6. On réalise un empilement de lames de verre NBK7 d'indice $n_1 = 1,52$ et de diamant d'indice $n_2 = 2,42$. Combien d'empilements de deux lames sont nécessaires pour obtenir un coefficient de réflexion en puissance $R > 0,99$?
7. En vous aidant de la figure ci-dessous, expliquer le comportement en longueur d'onde d'un miroir de Bragg. Citer un avantage et un inconvénient de ce type de miroir.

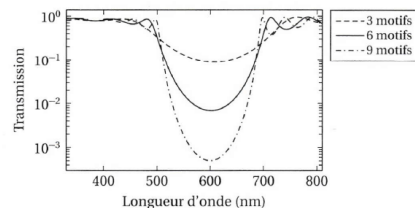


Figure 18.19. Évolution de la transmission d'un miroir de Bragg en fonction de la longueur d'onde pour différents nombres de motifs superposés.

9 Effet tunnel dans un conducteur (**)

Un conducteur occupe le volume de l'espace compris entre les plans $z = 0$ et $z = d$. De part et d'autre de ce conducteur se trouve un milieu vide de charges et de courants. Une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique arrive en incidence normale sur le conducteur. La pulsation ω de cette onde est dans le domaine visible, telle que $1/\tau \ll \omega < \omega_p$ (Cf. cours pour les notations).

On donne l'expression en notation complexe des champs électriques des ondes incidente, réfléchie et transmise dans le vide :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(z < 0, t) &= E_0 \exp(i(\omega t - \omega z/c)) \vec{e}_y, \\ \vec{E}_r(z < 0, t) &= \underline{r} E_0 \exp(i(\omega t + \omega z/c)) \vec{e}_y, \\ \vec{E}_t(z > d, t) &= \underline{t} E_0 \exp(i(\omega t - \omega z/c)) \vec{e}_y.\end{aligned}$$

1. On appelle $\underline{n}(\omega) = n_1(\omega) - in_2(\omega)$ l'indice du conducteur. Quelles sont les expressions de $n_1(\omega)$ et de $n_2(\omega)$ dans le domaine de pulsations utilisé ?

2. Déterminer la forme acceptable du champ électrique $\vec{E}_{\text{cond}}(z, t)$ de l'onde à l'intérieur du conducteur.

On donne la relation entre les amplitudes des champs électrique et magnétique dans le conducteur en $z = 0^+$ et en $z = d^-$:

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_{\text{cond}}(0^+) \\ c \underline{B}_{\text{cond}}(0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(n_2 \phi) & -\frac{i}{n_2} \text{sh}(n_2 \phi) \\ in_2 \text{sh}(n_2 \phi) & \text{ch}(n_2 \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}_{\text{cond}}(d^-) \\ c \underline{B}_{\text{cond}}(d^-) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \phi = \frac{\omega d}{c}.$$

3. On admet la continuité des champs électrique et magnétique en $z = 0$ et $z = d$. Établir le système d'équations vérifiées $\underline{r}$ et $\underline{t}$. Comment peut-on définir des coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie à partir de $\underline{r}$ et $\underline{t}$?

4. Un calcul non demandé conduit au résultat suivant :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(1 + n_2^2)^2}{4n_2^2} \text{sh}^2(n_2 \phi)},$$

Simplifier l'expression de T dans la limite où $n_2 \phi \gg 1$. Commenter le résultat obtenu. Expliquer pourquoi il peut y avoir transmission d'énergie à travers le conducteur alors que $\omega < \omega_p$? Rencontre-t-on ce phénomène dans d'autres domaines de la physique ?