

→ La mécanique commence très facilement mais se corse de plus en plus.

Oscillations mécaniques et électriques

Il est souvent plus simple lorsque l'on veut étudier expérimentalement, au laboratoire, le comportement d'un oscillateur mécanique en fonction de ses paramètres, d'en réaliser une version électronique plutôt qu'une version mécanique. Les réglages sont plus fins car plus nombreux et la possibilité d'acquisition directe des signaux en divers points du circuit électrique permet la mise au point et l'adaptation de ce dernier à la richesse des oscillations mécaniques. Après avoir étudié un oscillateur mécanique et entrepris sa modélisation numérique dans la première partie, nous construirons progressivement dans la seconde son équivalent électronique. Dans tout le problème un point surmontant une fonction désigne sa dérivée temporelle : $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$

I Oscillateur mécanique

On considère un ressort d'extrémités N et M , de raideur k , de longueur à vide l_0 et de longueur $l(t) = NM$ à un instant t quelconque. Ce ressort est suspendu verticalement par son extrémité N à un point O fixe d'un support immobile dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$. À son extrémité M est accroché un point matériel P de masse m . L'extrémité N (resp. M) du ressort se confond avec le point O (resp. P) (cf. figure 1).

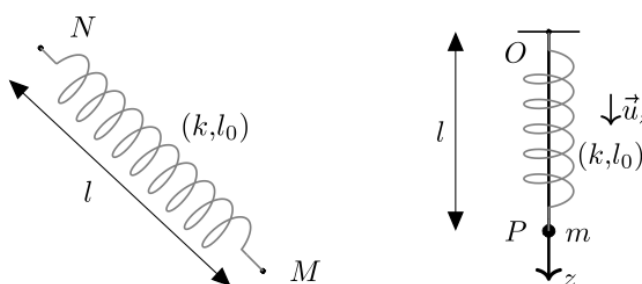


FIGURE 1 – Ressort et oscillateur vertical

On suppose que le mouvement du point matériel P reste vertical : en se repérant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ d'origine O , le point P appartient à la droite $(O, \vec{u}_z)$.

Dans tout le problème, le ressort reste dans son domaine élastique de fonctionnement associé à une force de rappel proportionnelle à son allongement. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme égal à $\vec{g} = g\vec{u}_z$ avec $g > 0$. On néglige toute forme de frottement.

On suppose tout d'abord que le ressort a une masse m_r nulle.

- – 1. Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,k}$ du ressort dont on prendra l'origine lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. On exprimera $\mathcal{E}_{p,k}$ en fonction de k , l_0 et l .
- – 2. Établir, en fonction de m , g et l , l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ du point matériel P dont on prendra l'origine en O .
- – 3. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du point matériel P de masse m dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction notamment de $l(t)$.
- – 4. Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- – 5. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t = 0) = L > 0$. On fera apparaître une pulsation ω_0 .

Quelle condition doit-on imposer à L pour que le point matériel P ne heurte pas le support fixe où est suspendu le ressort ? On exprimera cette condition en fonction de k , l_0 , m et g . Qualifier le mouvement observé : tracer l'allure de $l(t)$ en fonction de t .

Donner l'expression de la période T_0 du mouvement du point matériel P et calculer sa valeur numérique pour $k = 0,300 \times \pi^2 \approx 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $m = 300 \text{ g}$.

Dans les 6 questions suivantes, on tient compte de la masse m_r non nulle du ressort. On suppose que l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,k}$ du ressort établie à la question 1 n'est pas modifiée. Par contre, son énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ est affectée par cette modification. Pour la déterminer, on suppose que, quelque soit sa longueur l , la masse m_r du ressort est uniformément répartie sur toute sa longueur l et que, pour tout z compris entre 0 et l , la tranche élémentaire de ressort comprise entre z et $z + dz$ possède, dans le référentiel $\mathcal{R}$, une vitesse proportionnelle à z . On conserve les mêmes origines que précédemment pour les énergies potentielles.

- – 6. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ associée au ressort en fonction de m_r , g et l .
- – 7. Établir l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du ressort en fonction de m_r et l .
- – 8. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du système constitué par le point matériel P de masse m et le ressort de masse m_r , dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction de m , m_r , k , g , l_0 et l .
- – 9. Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Commenter.
- – 10. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t = 0) = L$. On fera apparaître une pulsation ω_1 .
Qualifier le mouvement observé en supposant que le point matériel P ne heurte pas le support fixe.
Déterminer l'expression de la période T_1 du mouvement du point matériel en fonction de T_0 , m et m_r puis calculer sa valeur numérique pour $k = 0,300 \times \pi^2 \approx 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 300 \text{ g}$ et $m_r = 36,0 \text{ g}$ (on pourra utiliser l'approximation $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$).
- – 11. Quelle condition doit satisfaire m_r pour que l'écart relatif entre T_0 et T_1 ne dépasse pas 1 % ? On fera l'application numérique dans les conditions de la question précédente.

Le point matériel P de masse m est maintenant astreint à se déplacer, sans frottement, horizontalement sur une glissière parfaite qui se confond avec la droite $(O', \vec{u}_x)$ (cf figure 2). Le ressort précédent, dont on suppose la masse m_r nulle dans toute la suite du problème, est toujours accroché par son extrémité N au point O fixe dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$ et par son extrémité M au point matériel P :

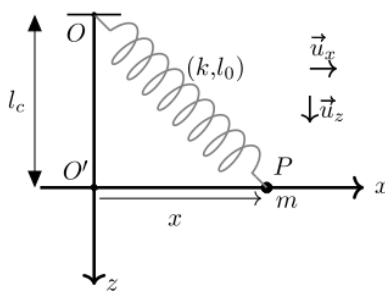


FIGURE 2 – Oscillateur horizontal

On se place maintenant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ d'origine O' telle que la droite $(O, \vec{u}_z)$ soit perpendiculaire à la droite $(O', \vec{u}_x)$: le point matériel P est ainsi repéré par son abscisse x sur la droite $(O', \vec{u}_x)$. On note l_c la distance OO' .

- – 12. Établir l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,P}$ du point matériel P en fonction de k , l_0 , l_c et x en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en O' et celle de l'énergie potentielle élastique du ressort pour $l = l_0$.

- – 13. En fonction du paramètre l_c , discuter des positions d'équilibre du point P et de leur stabilité respective : on exprimera les abscisses d'équilibre x_e associées en fonction des données et on donnera les allures correspondantes de $\mathcal{E}_{p,P}$ en fonction de x en précisant les valeurs remarquables.
- – 14. Dans quel cas peut-on parler de barrière de potentiel ? Préciser sa hauteur U_b en fonction des données.
- – 15. Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $x(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
Que représente physiquement $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x)$ en termes de force ?
- – 16. Transformer l'équation différentielle du mouvement en 2 équations différentielles d'ordre 1 en variables $u_0(t) = x(t)$ et $u_1(t) = \dot{x}(t)$.
En introduisant les estimations $u_{0,n}$ de $u_0(t)$ et $u_{1,n}$ de $u_1(t)$ aux instants $t_n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$ où Δt désigne le pas de discrétisation temporelle, former les 2 relations exprimant $u_{0,n+1}$ et $u_{1,n+1}$ en fonction de $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$ déduites de la méthode d'Euler explicite.
Quelles valeurs doit-on donner pour $n = 0$ à $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$?

Pour $k = 0,300 \times \pi^2 \approx 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 300 \text{ g}$, $l_0 = 1,00 \text{ m}$ et $l_c = 0,200 \text{ m}$, on effectue la résolution numérique de l'équation différentielle du mouvement pour déterminer $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ en fonction de t pour 2 conditions initiales A et B différentes. Les résultats sont présentés sur la figure 3.

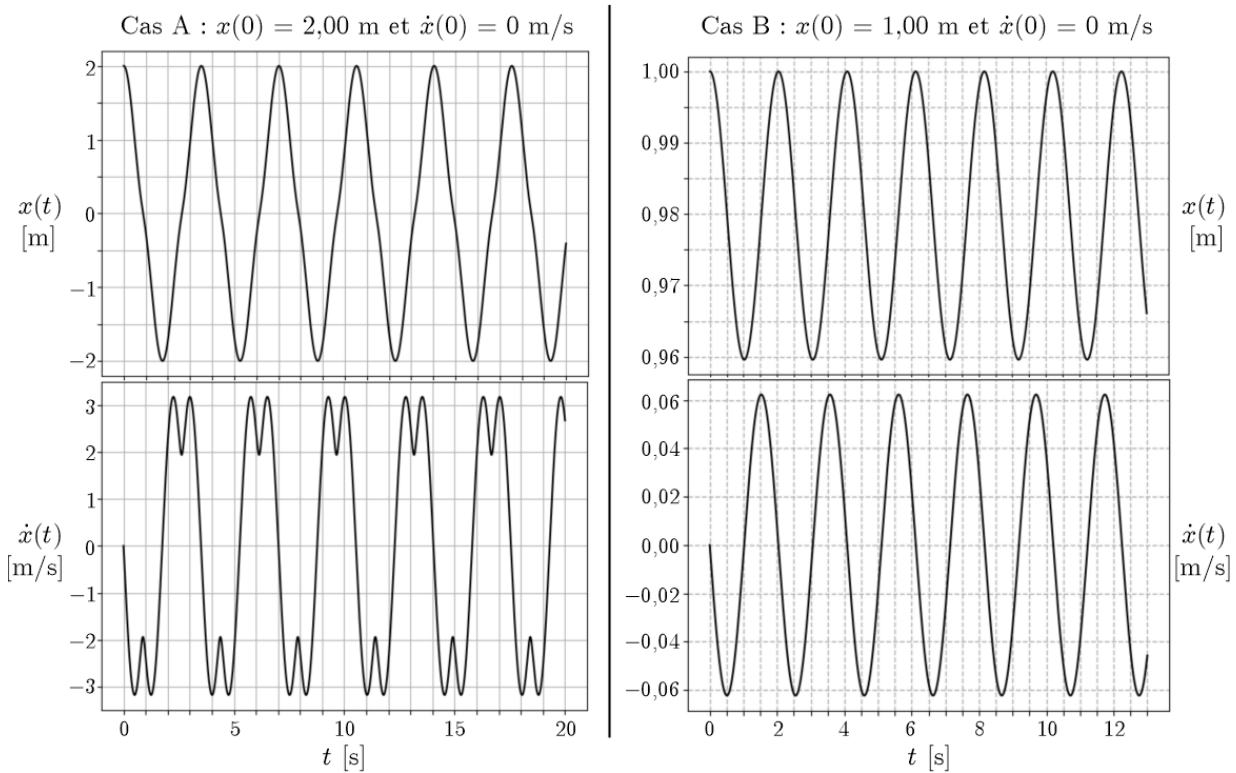


FIGURE 3 – Solutions numériques pour deux conditions initiales distinctes

- – 17. Comparer le plus précisément possible la nature du mouvement dans les 2 cas.
- – 18. Dans le cas B, établir une expression approchée de la valeur moyenne $\langle x(t) \rangle$ des oscillations (en fonction de l_c et l_0) et de leur période T_2 en fonction de T_0 , l_c et l_0 .
Effectuer les applications numériques et comparer les résultats aux valeurs lues sur la figure 3. Conclure sur les approximations effectuées.

- – 19. Les 2 cas A et B correspondent à deux types de mouvements différents du point P . Dans le cas où les conditions initiales sont du type $x(t=0) = X_0 > 0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, établir la condition que doit vérifier X_0 pour que l'on soit dans le cas A.

En conservant les valeurs $k = 0,300 \times \pi^2 \approx 2,96 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $l_0 = 1,00 \text{ m}$, on a représenté sur la figure 4 l'allure de $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x)$ en fonction de x dans les cas $l_c < l_0$ (à gauche) et $l_c > l_0$ (à droite).

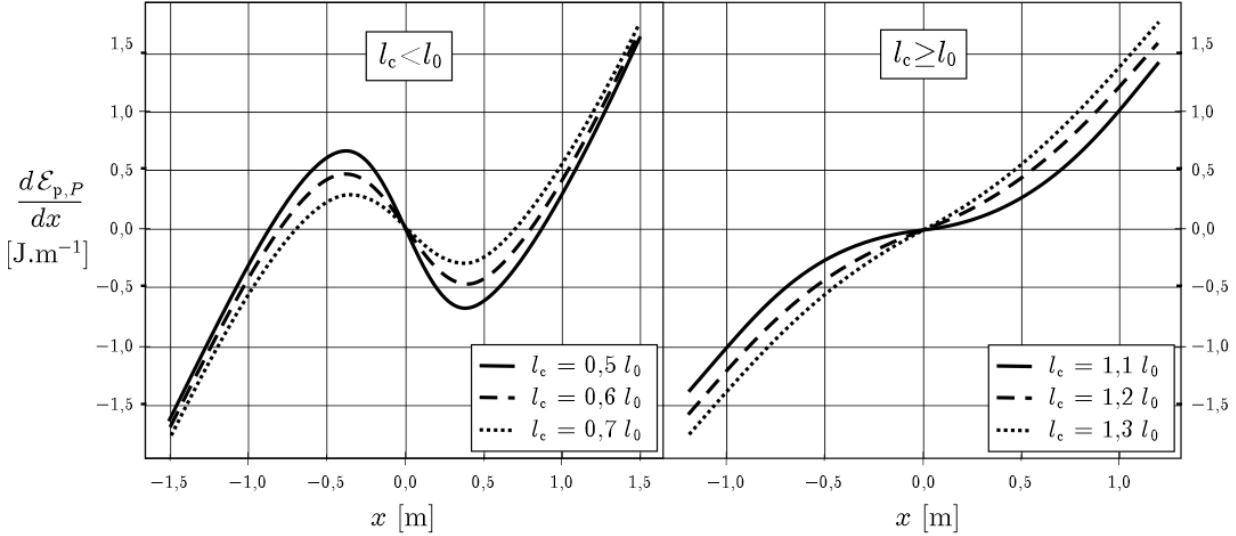


FIGURE 4 – Représentation graphique de la dérivée de l'énergie potentielle de pesanteur de P

On suppose pouvoir modéliser la fonction $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x)$ par un polynôme de degré 3 de la variable x de la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x) \simeq \alpha_m x + \beta_m x^3$$

- – 20. Commenter cette affirmation et préciser en fonction de la valeur de l_c les signes des constantes α_m et β_m .

Réécrire alors l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $x(t)$.

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Duffing non amortie.

II Oscillateur électrique

Dans la suite du problème, nous allons étudier le circuit électronique présenté sur la figure 5 visant à simuler l'oscillateur mécanique décrit dans la partie précédente.

Les trois amplificateurs linéaires intégrés (ALI) nommés (A1), (A2) et (A3) sont supposés idéaux, de gain infini et fonctionnant en régime linéaire. On notera $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$ leurs tensions de saturation haute et basse.

- – 21. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $x(t)$ définie sur le circuit de la figure 5.
À quelle situation mécanique ce circuit correspond-il ?
- – 22. On suppose, uniquement dans cette question, que l'on place dans le circuit de la figure 5 une résistance R_0 en parallèle sur le condensateur de capacité C_1 .
Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $x(t)$.
À quelle situation mécanique ce circuit correspond-il ?

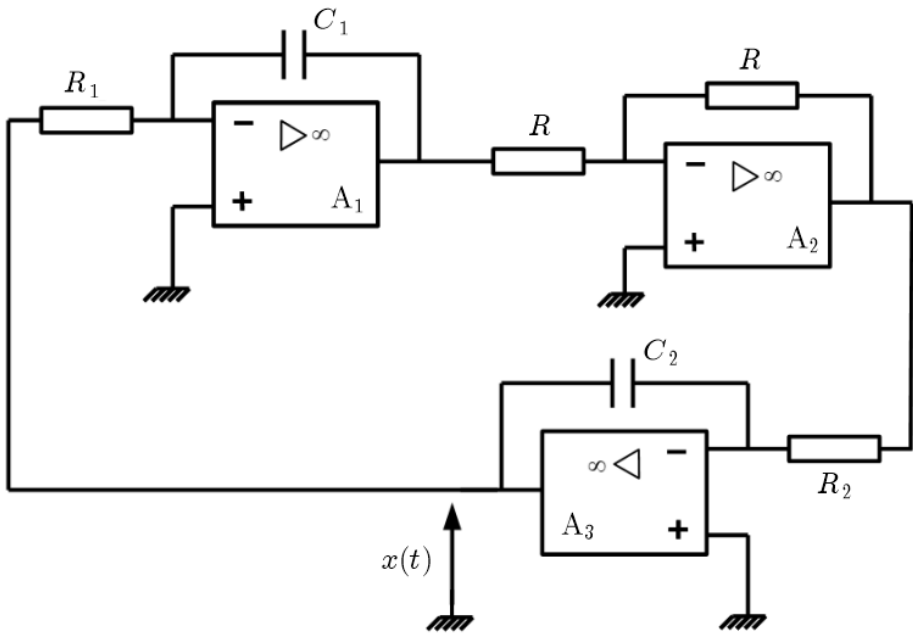


FIGURE 5 – Oscillateur électronique