

→ Pages 1-2 : exo de cours. Puis niveau type Mines/Centrale.

Modèles physiques de quelques instruments de musique et acoustiques

Ce problème s'intéresse à quelques aspects de la physique des instruments de musique.

La première partie étudie un modèle simple d'instrument à corde, dans lequel seule la physique de la corde vibrante intervient (les effets du couplage entre la corde et l'instrument ne sont pas évoqués).

La deuxième partie propose une étude simplifiée de certains instruments à percussion, à partir des modes de vibrations d'une membrane (là encore, les effets du couplage de la membrane avec le corps de l'instrument ne sont pas pris en compte).

La troisième partie aborde l'étude des instruments à vent, modélisés par de simples tuyaux sonores.

Enfin, la quatrième partie s'intéresse à la restitution d'un son par un haut-parleur, et à l'onde sonore rayonnée par la membrane de celui-ci.

Les quatre parties sont indépendantes.

La description d'une expérience doit comporter un schéma explicatif et le protocole expérimental.

Dans tout le problème, on note $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base des coordonnées cartésiennes. Les grandeurs complexes sont soulignées.

Première partie

Corde vibrante - Instruments à cordes

Les cordes des instruments de musique sont des objets cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur L . Le rayon du cylindre est a avec $a \ll L$.

On commence par étudier le modèle de la corde sans raideur, qui fait l'objet des questions **A.** à **D.**. On néglige l'effet de la pesanteur dans les questions **A.** à **C.** et dans la question **E.**. Cet effet est étudié dans la question **D.**. Enfin, la raideur de la corde est prise en compte dans la question **E.**.

A. Équation de propagation de l'ébranlement

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0 . Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox).

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x, t)$ le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t . L'axe Oy est l'axe vertical ascendant.

On fait les hypothèses suivantes :

- (1) Les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe Ox , ce qui entraîne : $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1$.
- (2) La tension de la corde en mouvement est : $T(x, t) = T_0 + T_1(x, t)$ avec $|T_1(x, t)| \ll T_0$ et $\frac{|T_1(x, t)|}{T_0}$ infiniment petit du même ordre ou d'un ordre supérieur à $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$.
- (3) On ne gardera que les termes du premier ordre en $y(x, t)$ et en ses dérivées.

(4) On néglige les effets de la pesanteur.

1. a) On considère l'élément de corde de longueur $d\ell$ situé entre les plans d'abscisses x et $x + dx$.

Montrer que :

$$d\ell \simeq dx$$

au premier ordre en $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$.

b) Appliquer le théorème de la résultante cinétique à cet élément de corde et le projeter sur $\vec{e}_y$. En déduire que l'ébranlement $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

où c est une grandeur à exprimer en fonction de T_0 et μ .

2. a) Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue pour c .

b) Donner sans démonstration la forme générale des solutions de l'équation (1).

c) Calculer c pour :

- une corde de guitare : masse linéique $\mu = 3 \text{ g.m}^{-1}$, tension $T_0 = 103 \text{ N}$;
- une corde de piano : masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$, tension $T_0 = 850 \text{ N}$, diamètre $\phi = 1,2 \text{ mm}$.

Commenter les valeurs obtenues.

B. Corde fixée à ses deux extrémités, modes propres

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0, t) = y(L, t) = 0$.

1. Modes propres, fréquences propres

a) Qu'appelle-t-on *onde stationnaire* ?

b) Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (1) sont de la forme :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Quelle est la relation entre ω et k ?

c) Définir les *modes propres* et les *fréquences propres* de la corde.

d) Montrer que les fréquences propres de la corde sont :

$$f_n = n \frac{c}{2L}$$

e) Définir les *ventres* et les *nœuds* de vibration. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? entre deux nœuds consécutifs ? entre un ventre et un nœud consécutifs ?

f) Dessiner l'aspect de la corde à différents instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

g) Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde.

h) On considère les cordes dont on a donné les caractéristiques à la question A.2c.

La corde de guitare permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) 147 Hz (pour les musiciens, cette note est un ré_2). Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

C. Étude énergétique

1. a) Exprimer la densité linéique d'énergie cinétique e_C de la corde en mouvement en fonction de μ et de $\frac{\partial y}{\partial t}$.

b) On étudie la portion de corde située entre les abscisses x et $x + dx$. Dans cette question, il est conseillé de travailler avec les variables $T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial y}{\partial t}$.

i) Exprimer la puissance des forces extérieures à ce système.

ii) En appliquant le théorème de la puissance cinétique à ce système, exprimer la puissance des forces intérieures.

iii) En déduire que l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_P(x, t) = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

en prenant l'énergie potentielle nulle quand la corde est au repos.

2. a) On étudie la corde dans le mode propre n . L'ébranlement est écrit sous la forme :

$$y_n(x, t) = c_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Montrer que l'énergie totale de la corde dans ce mode n s'écrit :

$$E_n = n^2 c_n^2 \frac{\pi^2}{4L} T_0$$

b) On considère maintenant la solution générale sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie E de la corde est :

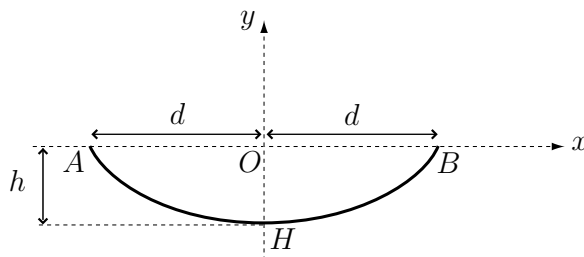
$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

Commenter.

3. On a vu précédemment que les amplitudes des différents harmoniques d'une corde pincée sont de la forme $c_n = \frac{c_1}{n^2}$ alors que ceux d'une corde frappée sont de la forme : $c'_n = \frac{c'_1}{n}$. Comparer les énergies des différents modes d'une corde de clavecin (corde pincée) et d'une corde de piano (corde frappée). Commenter.

D. Influence de la pesanteur

Pour étudier les effets de la pesanteur, nous allons faire le calcul exact de la forme d'une corde parfaitement souple tendue entre deux points A et B situés à la même altitude, comme sur la figure ci-dessous. Nous appliquerons ensuite les résultats obtenus aux cordes d'instruments de musique.



Dans cette question **D.** et dans celle-là uniquement, les déformations ne sont plus considérées comme petites.

1. On considère l'élément de corde compris en x et $x + dx$.

a) Quelle est la relation entre $d\ell$, dx et dy ?

b) Écrire l'équation vectorielle traduisant l'équilibre de ce système.

c) Montrer que la projection de la tension sur Ox est uniforme. On note T_0 cette projection.

d) Montrer enfin que la fonction donnant la forme de la corde $y(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{T_0}{\mu g} \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3)$$

2. On pose $\delta = \frac{T_0}{\mu g}$. Quelle est la dimension de δ ?

3. a) Montrer que la solution de l'équation (3) est :

$$y(x) = \delta \left(\operatorname{ch} \frac{x}{\delta} - 1 \right) - h$$

On rappelle que :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{argsh} u$$

→ La fonction argsh est la fonction réciproque du sinus hyperbolique sh .

b) Calculer la longueur de la corde en fonction de d et δ .

c) En déduire la relation :

$$h = \delta \left(\sqrt{1 + \frac{L^2}{4\delta^2}} - 1 \right)$$

d) Calculer h pour une corde de guitare de masse $m = 1,9$ g, de longueur $L = 63$ cm, telle que $T_0 = 103$ N. On prendre $g = 10$ m.s⁻².

Le fait de négliger la pesanteur dans les questions précédentes est-il justifié ?

E. Prise en compte de la raideur de la corde

Dans cette question, on suppose que la corde est cylindrique de rayon a et qu'elle est faite en acier, de masse volumique $\rho = 7800$ kg.m⁻³ et de module d'Young $E = 190 \cdot 10^9$ U.S.I.. La pesanteur n'est plus prise en compte et les déformations sont de nouveau considérées comme petites.

1. Rappeler la définition du module d'Young et préciser son unité.

2. On considère une déformation de cette corde dans le plan xOy comme précédemment.

La théorie de l'élasticité montre que la tension $\vec{T}$ n'est plus tangente à la corde et que, pour permettre la courbure de la corde, il faut un couple de moment $\vec{\Gamma} = \pm \Gamma_z(x, t) \vec{e}_z$ qui s'exprime, dans le cadre de notre étude, par :

$$\Gamma_z(x, t) = ESK^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4)$$

où S la section de la corde et K un coefficient dépendant de la forme de la section droite de la corde, égal à $K = \frac{a}{2}$ pour une corde cylindrique.

La portion de corde comprise entre les points d'abscisse x et $x + dx$ est donc soumise aux deux tensions :

$$\vec{T}_g(x, t) = -(T_x(x, t) \vec{e}_x + T_y(x, t) \vec{e}_y) \quad \text{en } x$$

et :

$$\vec{T}_d(x + dx, t) = T_x(x + dx, t) \vec{e}_x + T_y(x + dx, t) \vec{e}_y \quad \text{en } x + dx$$

et aux deux couples :

$$-\Gamma_z(x, t) \vec{e}_z \quad \text{en } x$$

et :

$$\Gamma_z(x + dx, t) \vec{e}_z \quad \text{en } x + dx$$

dont le moment est donné par l'expression (4).

a) Vérifier l'homogénéité de l'expression (4).

b) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la tranche $\{x, x + dx\}$, montrer que T_x ne dépend que du temps.

On supposera que T_x est constante et on la prendra égale à T_0 .

Établir une relation différentielle entre T_y et y .

c) En appliquant le théorème du moment cinétique au centre de masse de la tranche $\{x, x + dx\}$, établir une nouvelle relation différentielle entre T_y , Γ_z et y . On justifiera le fait que le moment d'inertie de ce système est d'ordre 3 en dx donc négligeable à l'ordre d'approximation envisagé.

d) En déduire l'équation de propagation :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ESK^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

3. Modification des fréquences propres

a) En supposant que la déformation est harmonique, donc de la forme :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \varphi)$$

donner la relation entre ω et k .

b) i) Dans le cas où la raideur de la corde reste faible, montrer que les fréquences propres de la corde tendue entre $x = 0$ et $x = L$ se mettent sous la forme :

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2}$$

où c est la célérité des ondes dans la corde sans raideur et B une constante à exprimer en fonction de E , S , K , T_0 et L .

ii) Tracer, sur le même graphique, les courbes représentant f_n en fonction de n pour une corde sans raideur puis pour une corde avec raideur.

iii) Pour une corde de piano étudiée plus haut, on donne : $B = 4 \cdot 10^{-4}$. À partir de quelle valeur de n la fréquence propre de la corde avec raideur est-elle plus aiguë d'un demi-ton que celle de la corde idéale ? On rappelle que la gamme tempérée divise l'octave en 12 intervalles, appelés *demi-tons*, et que les fréquences successives f_p des notes espacées par ces demi-tons forment une suite géométrique vérifiant la loi générale $f_p = 2^{p/12} f$ où $p \in [1, 12]$ (p entier).