

E4 : Équations de Maxwell

Importance historique des équations de Maxwell

Jusqu'au XIX^e siècle, les phénomènes électriques (interaction électrostatique, invention de la pile par Volta) et magnétiques (aimants) semblaient indépendants.



FIGURE 1 – Une pile voltaïque conservée au *Temple Volta* en Italie.

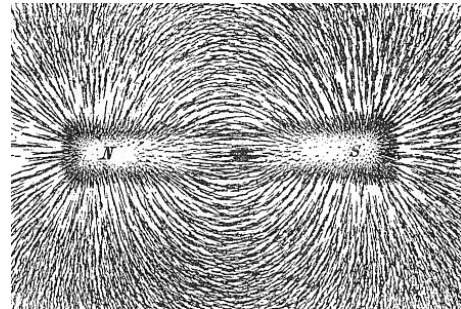


FIGURE 2 – Lignes de champ d'un aimant visualisées par de la limaille de fer.

Mais Ørsted, Ampère et Faraday remarquèrent une interaction entre les circuits électriques et le champ magnétique. C'est la **découverte du phénomène d'induction électromagnétique**.

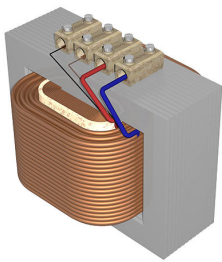


FIGURE 3 – Un transformateur à bobinages concentriques.



FIGURE 4 – Un transformateur de puissance dans un poste électrique.

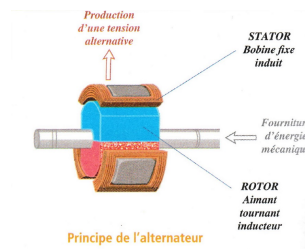


FIGURE 5 – Principe du générateur électrique.



FIGURE 6 – L'alternateur d'une centrale nucléaire est un peu plus gros...

En 1864, l'ensemble des connaissances à ce sujet est synthétisé par un physicien écossais James Clerk Maxwell. Cette synthèse fut ensuite simplifiée notamment par Heaviside pour donner l'ensemble de quatre équations appelées « **les équations de Maxwell** ».

Mais ce travail de Maxwell fut bien plus qu'une synthèse. Une conséquence de ces équations est l'existence d'ondes se propageant à une célérité valant environ $3 \cdot 10^8$ m/s. **Maxwell interprète alors la lumière comme une onde électromagnétique**. Quelques années plus tard (1886-1890), Hertz met en évidence expérimentalement des ondes électromagnétiques dans le domaine de fréquence appelé maintenant « ondes radio ». Après cette prouesse, Hertz était loin d'être visionnaire : « *Electromagnetic waves are of no use whatsoever[...] this is just an experiment that proves Maestro Maxwell was right—we just have these mysterious electromagnetic waves that we cannot see with the naked eye. But they are there.* »

Une propriété de ces ondes a eu ensuite un impact considérable sur la physique moderne. D'après les équations de Maxwell, les ondes électromagnétiques vont à célérité c . Cela veut-il dire que ces équations ne sont valides que dans un référentiel particulier ? Ou bien que cette célérité vaut toujours c , ce qui irait à l'encontre de la loi de composition des vitesses en mécanique !! **La dernière hypothèse, invariance de c par changement de référentiel, fut exploitée par Einstein pour fonder la théorie de la relativité restreinte (1905).**

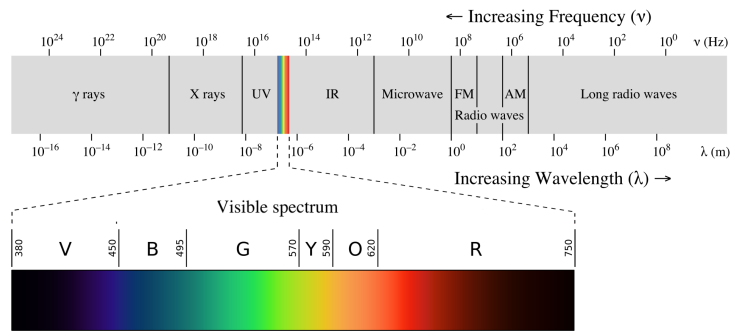


FIGURE 7 – Spectre du champ électromagnétique.



FIGURE 8 – La réfraction peut s'expliquer à partir du théorème de Malus qui découle des équations de Maxwell.

L'ensemble des applications actuelles de l'électromagnétisme est colossal :

- ★ électricité : appareils électriques omniprésents de nos jours,
- ★ magnétisme : aimants, stockage de données informatiques (disques durs),
- ★ induction : moteur électrique, production d'électricité par turbine, haut-parleur, chauffage par induction, puces RFID, etc,
- ★ ondes électromagnétiques : lumière, radio, micro-onde, rayons X, rayons γ ,
- ★ interaction onde-matière : réfraction, diffraction, diffusion, absorption, etc.

1 Outils mathématiques : compléments sur les opérateurs vectoriels

1.1 Rappel sur le laplacien scalaire

def : opérateur **laplacien scalaire** d'un champ scalaire $f(M, t)$: $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f))$.

def : opérateur **laplacien scalaire** d'un champ scalaire $f(x, y, z, t)$ en cartésien : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

1.2 L'opérateur laplacien vectoriel

def : opérateur **laplacien vectoriel** d'un champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$:

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) \quad (1)$$

rq : attention, la définition comporte un terme supplémentaire que celle du laplacien scalaire.

def : opérateur **laplacien vectoriel** d'un champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z, t) = (A_x, A_y, A_z)$ en cartésien :

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Cela revient à appliquer le laplacien scalaire à chacune des composantes de $\vec{A}$.

1.3 Compositions d'opérateurs vectoriels

prop : Pour tout champ scalaire f : $\boxed{\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(f)) = \vec{0}}$. **Un gradient est toujours de rotationnel nul.**

ex : Cette relation est compatible avec les lois de l'électrostatique : $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$ et $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$.

prop : Pour tout champ vectoriel $\vec{A}$: $\boxed{\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = 0}$. **Un rotationnel est toujours de divergence nulle.**

ex : Cette relation est compatible avec les lois de la magnétostatique : $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ et $\text{div}(\vec{j}) = 0$ (loi des noeuds, cf chapitre E1).

prop : Pour tout couple de champs vectoriels $\vec{A}$ et $\vec{B}$: $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$.

ex : Cette relation est notamment utilisée pour démontrer l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique à partir des équations de Maxwell, cf partie 4.3.

prop : Pour tout champ vectoriel $\vec{A}$: $(\vec{A} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\text{grad}}(\vec{A}^2) + (\vec{\text{rot}} \vec{A}) \wedge \vec{A}$.

ex : Cette relation est utilisée en Mécanique des Fluides.

1.4 Introduction à l'opérateur nabla

L'opérateur **nabla** ∇ , souvent noté $\vec{\nabla}$ tire son nom d'une lyre antique qui avait la même forme de triangle pointant vers le bas. Il s'agit d'un opérateur formel de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On écrit souvent $\vec{\nabla}$ pour souligner que formellement, l'opérateur nabla a les caractéristiques d'un vecteur. Il ne contient certes pas de valeurs scalaires, donc il n'apparaît jamais seul ! Mais on va utiliser ses éléments constitutifs (que l'on peut voir comme des opérations en attente d'argument — des opérateurs différentiels) très exactement comme on aurait utilisé les valeurs scalaires composant un vecteur. La notation nabla fournit un moyen commode pour exprimer les opérateurs vectoriels **en coordonnées cartésiennes seulement**. Mais dans d'autres systèmes de coordonnées, elle n'est pas toujours utilisable de cette manière.

Opérateur nabla en coordonnées cartésiennes

Dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. L'opérateur nabla a déjà été défini ci-dessus. Les différents opérateurs s'expriment alors assez simplement en fonction de $\vec{\nabla}$:

Gradient

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergence

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Laplacien

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplacien vectoriel

$$\Delta \vec{A} = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Compositions d'opérateurs vectoriels avec nabla

Notation classique	Notation avec l'opérateur nabla
$\vec{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$
$\text{div} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$
$\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} f = \Delta f$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f$
$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$	$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$
$\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$

2 Les équations de Maxwell

2.1 Postulats de l'électromagnétisme

2.1.1 Force de Lorentz

rappel : Le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ agit sur une charge ponctuelle q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ par la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (3)$$

2.1.2 Équations de Maxwell (formes locales)

La force de Lorentz indique comment le champ électromagnétique agit sur la matière. Les équations de Maxwell précisent le contraire : comment les sources du champ $(\rho, \vec{j})$ créent le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.

Champ électrique	Champ magnétique
$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Maxwell-Gauss)	$\text{div} \vec{B} = 0$ (Maxwell-Thomson)
$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Maxwell-Faraday)	$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Maxwell-Ampère)

Avec $\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$, $\varepsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

rq : le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est homogène à une densité de courant notée $\vec{j}_D$ appelée « courant de déplacement », même s'il ne correspond pas à un courant réel.

2.1.3 Formes intégrales des équations de Maxwell

Champ électrique	Champ magnétique
$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ (thm de Gauss)	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (flux magnétique conservatif)
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$ (loi de Faraday)	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t}$ (thm d'Ampère généralisé)

où ϕ_B (respectivement ϕ_E) est le flux du champ magnétique $\vec{B}$ (resp. champ électrique $\vec{E}$) sur la surface enlacée par par la contour fermé $\mathcal{C}$.

2.2 Propriétés des équations de Maxwell

2.2.1 Généralisation des invariances et symétrie du champ électromagnétique

prop : **Symétries et invariances** du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ à partir des sources $(\rho(t), \vec{j}(t))$:

- ★ Les invariances de l'ensemble des sources $(\rho, \vec{j})$ se retrouvent dans celles des *composantes* du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.
- ★ En un point d'un plan P de symétrie de l'ensemble des sources, $\vec{E} \in P$ et $\vec{B} \perp P$.
- ★ En un point d'un plan P^* d'antisymétrie de l'ensemble des sources, $\vec{E} \perp P$ et $\vec{B} \in P$.

explication sur un exemple : Soit une situation avec $\rho(t)$ sans courant ($\vec{j} = \vec{0}$). Cela crée $\vec{E}$ avec les mêmes¹ symétries que $\rho(t)$. Donc le courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ a les mêmes symétries que $\rho(t)$. Et on sait que $\vec{B}$ a les symétries contraires² des courants, donc $\vec{B}$ a les symétries contraires de $\rho(t)$.

exo : Soit une situation avec $\vec{j}(t)$ sans charges ($\rho = 0$). Effectuer le même raisonnement pour remarquer que $\vec{E}(t)$ a les mêmes symétries que $\vec{j}(t)$. On utilisera le fait que l'opérateur $\vec{\text{rot}}$ donne un vecteur de symétrie contraire à son argument.

2.2.2 Linéarité

- Théorème de superposition : Si des sources $\{\rho_1, \vec{j}_1\}$ créent un champ électromagnétique $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$, et des sources $\{\rho_2, \vec{j}_2\}$ créent un champ électromagnétique $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$, alors des sources $\{\rho_1 + \rho_2, \vec{j}_1 + \vec{j}_2\}$ créent un champ électromagnétique $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \vec{B}_2)$.

- Permutation avec dérivation temporelle :

Une autre conséquence de la linéarité se base sur le théorème de Schwartz :

prop : Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^1$ par rapport à ses deux variables x et t , d'après le **théorème de Schwartz**, il est équivalent de dériver par rapport à x puis par rapport à t que le contraire : $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$.

prop : Ce qui se généralise par exemple en permutant opérateurs vectoriels et dérivées temporelles :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = \text{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad \text{idem avec } \Delta \text{ et } \vec{\text{grad}}. \quad (4)$$

1. C'est lié à l'opérateur div .

2. C'est lié à l'opérateur $\vec{\text{rot}}$.

2.2.3 Couplage de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le cas général

Un champ magnétique variable peut créer un champ électrique d'après l'équation de MF. De même, un champ électrique variable peut créer un champ magnétique d'après l'équation de MA.

On dit que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont **couplés** car les variations temporelles de l'un peuvent affecter l'autre. C'est pourquoi on regroupe ces deux champs sous une même entité : le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.

2.2.4 Découplage de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le cas statique

Les équations de Maxwell avec l'opérateur div sont toujours valables, ainsi que leurs formes intégrales comme le théorème de Gauss. En revanche, les relations avec $\vec{\text{rot}}$ font intervenir une dérivée temporelle, ce qui donne en régime statique :

$$\boxed{\text{Équations de Maxwell statiques : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \quad (5)$$

On retrouve les relations d'électrostatique et de magnétostatique qui sont donc des conséquences des équations de Maxwell. On remarque qu'en statique, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont indépendants. On dit qu'ils sont **découplés**.

Les formes intégrales statiques redonnent notamment $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (circulation électrostatique conservative) et $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$ (théorème d'Ampère).

2.2.5 Compatibilité intrinsèque

démo de cours : Démontrer que les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Thomson sont bien compatibles. On rappelle la propriété à connaître $\operatorname{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0$ pour tout champ vectoriel $\vec{A}$.

2.2.6 Compatibilité avec conservation de la charge

prop - rappel : L'équation de conservation de la charge s'écrit : $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

La démonstration par un bilan unidimensionnel doit être connue (cf chapitre E1). Cette relation peut aussi se démontrer à partir des équations de Maxwell³ !

exo de cours : Démontrer l'équation de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell. On rappelle la propriété à connaître $\operatorname{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0$ pour tout champ vectoriel $\vec{A}$.

3 Interprétation des équations de Maxwell

3.1 Passage entre forme locale ou intégrale

Pour les équations en div, on utilise le **théorème d'Ostrogradsky** (*divergence theorem* en anglais) :

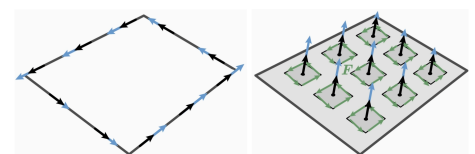
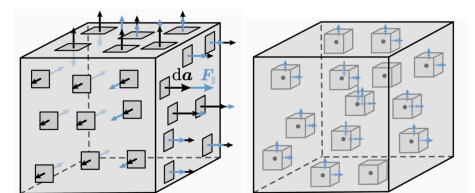
$$\boxed{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) \cdot dV}$$

interprétation⁴ : $\operatorname{div}(\vec{F}(M))$ représente à quel point $\vec{F}$ semble provenir (>0) de M ou se diriger (<0) vers M.

Pour les équations en $\vec{\text{rot}}$, on utilise le **théorème de Stokes** (*curl*⁵ *theorem* en anglais) :

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}}$$

interprétation : $\vec{\text{rot}}(\vec{F}(M))$ représente à quel point le champ $\vec{F}$ appliquerait un couple en M si c'était une force.



3. CE : Établir l'équation locale de la conservation de la charge à partir des équations de Maxwell.

4. La plupart des schémas de cette partie proviennent de la vidéo *The 4 Maxwell Equations. Get the Deepest Intuition!* <https://youtu.be/hJD8ywGrXks> de la chaîne *Universaldenker-Physics* (traitant principalement d'électricité, électromagnétisme et mécanique quantique).

5. Le rotationnel est appelé *curl* en anglais.

| démo : Passer d'une forme locale à une forme intégrale et réciproquement.

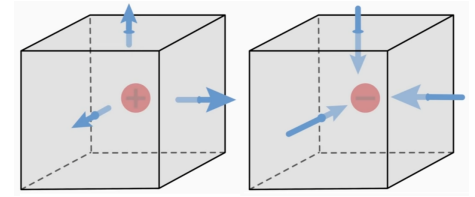
rq : Il faut utiliser un contour fermé rigide dans la démo de la loi de Faraday à partir de l'équation MF. Sinon, la démo est plus subtile.

3.2 Forme intégrale de Maxwell-Gauss : théorème de Gauss

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss est le **théorème de Gauss** :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Le théorème de Gauss est donc inclus dans les équations de Maxwell. Il est toujours valable, même en régime non statique.

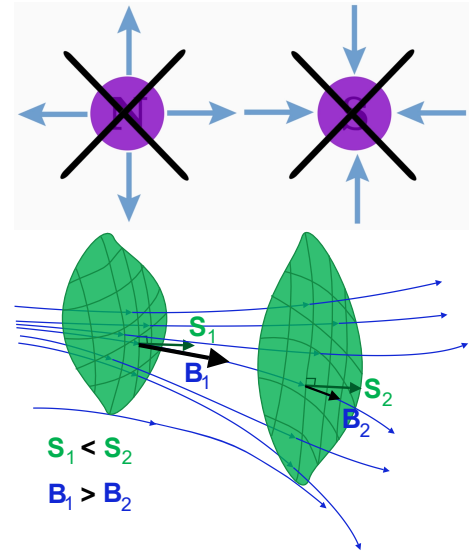


3.3 Forme intégrale de Maxwell-Thomson

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Thomson est la **conservation du flux magnétique** :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7)$$

La conservation du flux est donc incluse dans les équations de Maxwell. Le flux magnétique est toujours conservatif, même en régime non statique, ce qui exclut l'existence de monopôles magnétiques.



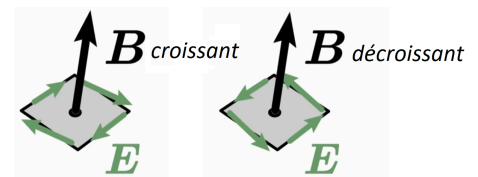
3.4 Forme intégrale de Maxwell-Faraday : loi de Faraday (induction)

D'après le théorème de Stokes pour un contour $\mathcal{C}$, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S}$. En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (8)$$

où ϕ_B est le flux magnétique, et où la permutation intégrales/dérivées n'est possible que si le contour $\mathcal{C}$ est non déformé. On retrouve une réécriture de la loi de Faraday⁶ vue en PCSI.

rappel : on avait dans le cas d'un champ électrostatique $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$ (différence de potentiel). Ainsi, une circulation non nulle sur un contour fermé s'interprète comme une différence de potentiel induite par les variations de flux magnétique. On note alors $e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ la tension induite, appelée **force électromotrice**, dans le cas d'un contour suivant un circuit électrique.



La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est la **loi de Faraday** :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (9)$$

La loi de l'**induction** est donc incluse dans les équations de Maxwell.

exo : Considérons une bobine modélisée par un solénoïde infini sans effet de bord, de densité de spire n et parcourue par un courant $I(t)$. On cherche à montrer que ce courant variable génère aussi un champ électrique⁷. On peut montrer dans le cadre de l'ARQS magnétique (cf partie 5) que le théorème d'Ampère peut s'appliquer ici, ce qui donne $\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$ dans le solénoïde.

6. CE : Relier l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday.

7. CE : Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale.

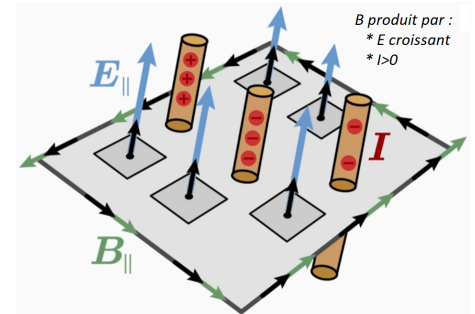
1. Déterminer les invariances et symétries de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
2. En déduire le champ électrique par la forme locale ou la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday. On donne $\vec{\text{rot}}(E\vec{u}_\theta) = (-\partial E/\partial z)\vec{u}_r + ((1/r)\partial(rE)/\partial r)\vec{u}_z$.
3. Interprétation énergétique, cf TD.

3.5 Forme intégrale de Maxwell-Ampère : théorème d'Ampère généralisé

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère est le **théorème d'Ampère généralisé** :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \mu_0 (I_{\text{enlacé}} + I_D) \quad (10)$$

avec $I_D = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$. Le théorème d'Ampère est donc le cas particulier de l'équation de Maxwell-Ampère dans le cas de champs statiques.



exo : Considérons un condensateur modélisé par deux disques de surface S et de charge surfacique $\sigma(t)$ et $-\sigma(t)$ où on néglige les effets de bord. On cherche à montrer que ces charges variables génèrent aussi un champ magnétique. En négligeant les effets de propagation, on admet que le champ électrique entre les plaques est donné par $\vec{E}(t) = (\sigma(t)/\varepsilon_0)\vec{u}_x$ avec $\vec{u}_x$ depuis la plaque $+\sigma$ vers la plaque $-\sigma$.

1. Déterminer les invariances et symétries de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
2. En déduire par la forme locale ou intégrale d'une équation de Maxwell que le champ magnétique vaut $\vec{B} = \mu_0 \frac{d\sigma}{dt} \frac{r}{2}$. Interpréter en terme de champ créé par un fil parcouru par I_D .
3. Interprétation énergétique, cf TD.

4 Aspects énergétiques

4.1 Puissance fournie par le champ aux charges

prop : La puissance volumique $\mathcal{P}_V$ (en W/m³) fournie par le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ aux porteurs de charge s'écrit :

$$\mathcal{P}_V = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (11)$$

C'est la puissance transmise par le champ aux charges. La puissance acquise par le champ est donc son opposé.

prop : Dans le cas d'un milieu ohmique de conductivité σ , on a vu chapitre E1 que $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. On retrouve la loi de Joule locale $\mathcal{P}_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = j^2/\sigma$ qui est un cas particulier de la propriété précédente.

4.2 Bilan local d'énergie du champ électromagnétique

À partir des équations de Maxwell, on cherche à établir une relation de conservation de l'énergie du champ, analogue aux relations de conservation de particules (chapitre T2), conservation d'énergie thermique (chapitre T3), conservation de la charge (chapitres E1).

On suppose pouvoir définir :

★ une **densité volumique d'énergie du champ électromagnétique** u_{em} telle que l'énergie totale dU_{em} contenue dans un volume dV s'écrit $dU_{em} = u_{em}dV$. Son expression sera démontrée plus tard.

★ un **vecteur densité de courant d'énergie du champ électromagnétique** $\vec{j}_{em}$. Il est défini par la puissance $d\mathcal{P}$ traversant une surface $d\vec{S}$: $d\mathcal{P} = \vec{j}_{em} \cdot d\vec{S}$. Son expression sera démontrée plus tard.

★ une **densité volumique de puissance acquise par le champ** $\mathcal{P}_{V,acquise}$. On a déjà vu que $\mathcal{P}_{V,acquise} = -\mathcal{P}_{V,fournie} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$

démo de cours : En effectuant un bilan sur une tranche dx d'un système à géométrie unidimensionnelle cartésienne, démontrer l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique $\partial j_{em}/\partial x + \partial u_{em}/\partial t = -\vec{j} \cdot \vec{E}$.

prop : De manière générale, l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique s'écrit :

$$\operatorname{div}(\vec{j}_{em}) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (12)$$

4.3 Équation locale de Poynting : conservation de l'énergie

L'objectif est maintenant de déterminer les expressions de $\vec{j}_{em}$ et u_{em} à partir des équations de Maxwell.

démo de cours : Utiliser les équations de Maxwell pour obtenir une équation de bilan local. On utilisera la relation $\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$.

prop : L'équation de **Poynting** est :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (13)$$

Elle illustre la conservation de l'énergie du champ électromagnétique.

4.4 Interprétation des termes de l'équation de Poynting

4.4.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

prop : La **densité volumique d'énergie électromagnétique** u_{em} s'écrit :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (14)$$

★ unité de u_{em} en J.m^{-3} ,

★ compatible avec l'énergie volumique dans un condensateur en électrostatique (sans champ magnétique) : $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, cf chapitre E2.

★ compatible avec l'énergie volumique dans un solénoïde en magnétostatique (sans champ électrique) : $\frac{B^2}{2\mu_0}$, cf chapitre E3.

4.4.2 Vecteur de Poynting

prop : La densité de courant d'énergie électromagnétique, notée souvent $\vec{R}$ ou $\vec{\Pi}$, appelée **vecteur de Poynting**, s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (15)$$

★ unité de $\vec{R}$ en W.m^{-2} ,

★ interprétation de la direction du vecteur de Poynting : indique la direction de propagation de l'énergie électromagnétique, et en particulier **la direction de la propagation de la lumière**.⁸

★ interprétation de la norme dans le cas de l'optique : sa valeur moyenne donne l'intensité lumineuse.

$$\text{L'intensité lumineuse } I \propto \left\| \langle \vec{R} \rangle \right\| \quad (16)$$

★ Lien avec flux d'énergie : le flux d'énergie, donc une puissance, $\mathcal{P}$ à travers une surface S est :

$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{R} \cdot d\vec{S} \quad (17)$$

4.5 Exemple 1 : atténuation d'une onde sphérique

8. CE : Associer le vecteur de Poynting et l'intensité lumineuse utilisée dans le domaine de l'optique.

exo : Par conservation du flux de $\vec{R}$, justifier que l'intensité lumineuse d'une onde sphérique s'atténue en r^{-2} .

4.6 Exemple 2 : application à un conducteur en régime permanent

Considérons un câble cylindrique de rayon a d'axe z parcouru par une densité de courant $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme et constante. Le matériau est de conductivité électrique σ . L'objectif de l'exercice est d'interpréter la puissance reçue par le matériau en terme de bilan d'énergie électromagnétique.⁹

exo :

1. Exprimer l'intensité I en fonction des données.
2. Exprimer le champ $\vec{E}$ dans tout l'espace.
3. Exprimer le champ $\vec{B}$ au bord du câble en $r = a$.
4. Exprimer le vecteur de Poynting puis calculer le flux d'énergie électromagnétique entrant dans un câble de longueur h .
5. Interpréter ce résultat en reconnaissant la résistance du câble.

exo - complément :

1. Exprimer le champ $\vec{B}$ dans le câble.
2. En déduire l'énergie électromagnétique totale contenue dans un câble de longueur h .

4.7 Freinage par induction : courants de Foucault

4.7.1 Observation expérimentale

expérience de cours : **La chute libre d'un aimant est ralentie si elle s'effectue à proximité d'un matériau conducteur électrique.**

rq : La force de freinage F_{frein} est proportionnelle à la conductivité électrique σ du matériau et au carré du moment magnétique $\mathcal{M}$ de l'aimant : $F_{\text{frein}} \propto \sigma \mathcal{M}^2$.

def : **Courants de Foucault** : courants électriques créés par induction dans une masse conductrice, soit par la variation au cours du temps d'un champ magnétique extérieur traversant ce milieu (le flux du champ à travers le milieu), soit par un déplacement de cette masse dans un champ magnétique constant.

schéma : Interprétation de l'expérience de chute d'un aimant.

4.7.2 Applications des courants de Foucault

Principalement deux intérêts de cette **conversion électromécanique** :

- Atténuer l'énergie mécanique d'un système sans contact mécanique : **freinage par induction** (certains camion ou trains).
- Récupérer de l'énergie électrique : par exemple pour la dissiper par effet Joule pour un **chauffage par induction** (plaques à induction).

5 Approximation des régimes quasi-stationnaires « magnétique »

5.1 Équation de propagation des champs dans le vide

L'objectif est de montrer que les équations de Maxwell permettent d'obtenir les équations de propagation des champs électriques et magnétiques.¹⁰

démo de cours : Établir les équations de propagation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide. On rappelle la relation $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$.

9. CE : Utiliser les grandeurs énergétiques pour faire des bilans d'énergie électromagnétique.

10. CE : Établir les équations de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide. Interpréter c .

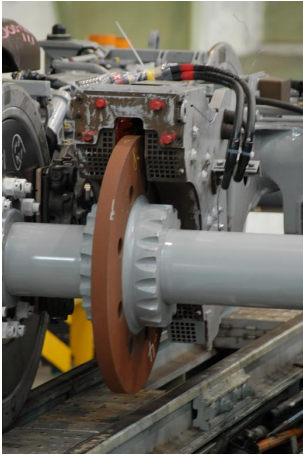


FIGURE 9 – Frein à courants de Foucault sur un train rapide japonais Shinkansen.

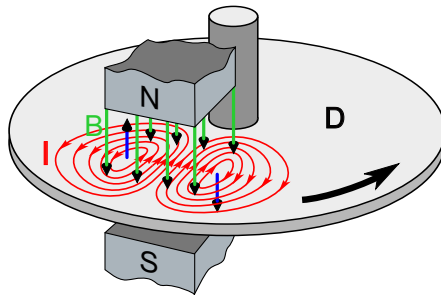


FIGURE 10 – Schéma d'un disque de frein de Foucault actuel.

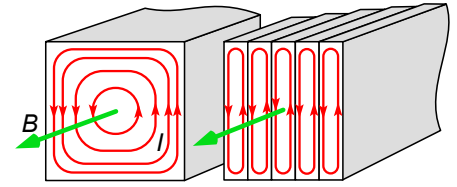


FIGURE 11 – Pour limiter l'établissement de courants de Foucault non désirés, on effectue un feuilletage du matériau (insertion de feuilles isolantes), cf TD.

prop : L'équation de propagation des champs électriques et magnétiques dans le vide sont :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (18)$$

★ La structure de cette équation, du type « **équation de d'Alembert** » est caractéristique de la propagation d'ondes. Elle sera étudiée plus en détails dans les chapitres de *Physique des Ondes*.

★ Cette équation fait intervenir une seule grandeur caractéristique : $(\varepsilon_0 \mu_0)$.

5.2 Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide

| démo de cours : Démontrer la dimension de $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Interpréter sa valeur.

prop : La célérité c des ondes électromagnétiques dans le vide est donnée par : $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$. Elle est indépendante de la fréquence (radio, micro-ondes, IR, visible, UV, X).

rq : Cette propriété s'écrit souvent sous la forme $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$ plus facile à retenir.

prop : La durée de propagation τ sur une distance D est donnée par $\tau = D/c$.

5.3 Domaine de l'ARQS magnétique

def : On appelle **Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires** (ARQS) l'approximation consistant à négliger les phénomènes de propagation. Cela veut dire qu'on considère que les ondes électromagnétiques se sont propagées quasi-instantanément dans tous le domaine d'étude.¹¹

prop : Pour un système physique de taille D , de durée typique T d'évolution des sources, l'ARQS est valide si la durée de propagation τ du champ électromagnétique est négligeable devant la durée T . Soit :

$$\text{ARQS : } \frac{D}{c} \ll T \quad (19)$$

Par exemple, dans le cas d'un circuit électrique en régime sinusoïdal, T est la période.

11. CE : Discuter l'approximation des régimes quasistationnaires.

ex : Proposer une fréquence maximale typique des circuits électriques usuels. En déduire la taille maximale d'un circuit pour que l'ARQS reste valide.

rq : L'ARQS est donc vérifiée dans la plupart des circuits électriques usuels.

Dans la plupart des situations courantes, la matière est globalement neutre, mais peut être parcourue de courants intenses (par exemple dans les circuits électriques). Ainsi, les effets des courants sont souvent prépondérants sur les effets des charges.

prop : L'ARQS « magnétique » consiste à négliger les effets des charges devant ceux des courants. Cela revient à l'inégalité suivante :

$$\boxed{\text{ARQS magnétique : } \rho c \ll j} \quad (20)$$

contre-exemple important : À l'intérieur des armatures d'un condensateur, les effets des armatures chargées dominent les effets des courants (nuls à l'intérieur d'un condensateur). On pourrait alors utiliser « l'ARQS électrique » $j \ll \rho c$, hors programme en CPGE.

5.4 Électromagnétisme dans l'ARQS magnétique

- simplification de la conservation de la charge¹² : Dans le cas général, $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

exo de cours : En comparant les ordres de grandeur des deux termes de l'équation de conservation de la charge, démontrer que celle-ci se simplifie dans le cas de l'ARQS magnétique.

prop : La conservation de la charge dans le cadre de l'ARQS « magnétique » s'écrit :

$$\boxed{\text{conservation charge dans l'ARQS magnétique : } \text{div } \vec{j} \simeq 0 \quad (\text{loi des nœuds})} \quad (21)$$

rappel : On a déjà vu que cette relation s'interprète comme la **loi des nœuds**. Celle-ci est donc valide dans le cas des circuits électriques usuels qui rentrent dans le cadre de l'ARQS magnétique.

- simplification de l'équation de Maxwell-Ampère : Dans le cas général, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

exo de cours : En comparant les ordres de grandeur des deux termes de droite de l'équation de Maxwell-Ampère, démontrer que celle-ci se simplifie dans le cas de l'ARQS magnétique.

prop : L'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'ARQS « magnétique » s'écrit :

$$\boxed{\text{Maxwell-Ampère dans l'ARQS magnétique : } \text{rot } \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}} \quad (22)$$

rappel : Cette relation est similaire au cas statique. On retrouve alors que le théorème d'Ampère est valide dans l'ARQS magnétique.

prop : Pour les circuits électriques usuels, donc dans le cadre de l'ARQS magnétique, on peut appliquer la loi des nœuds et le théorème d'Ampère, non seulement en statique, mais aussi pour des courants variables à fréquences raisonnables.

12. CE : Simplifier et utiliser les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'approximation du régime quasi-stationnaire. Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.