PO2 : Dispersion et absorption des ondes

Lors de la propagation dans certains milieux, une onde peut être altérée par dispersion (ses composantes ne se propage pas à la même célérité) ou par absorption (transfert d'énergie au milieu). Nous présenterons les outils de description de ces effets avant d'étudier des exemples de propagations dispersives/atténuées d'ondes électromagnétiques. Mais le phénomène de dispersion peut aussi s'observer pour des ondes mécaniques.

1 Observations expérimentales

• Dans les milieux transparents, la lumière bleue se propage moins vite que la lumière rouge.

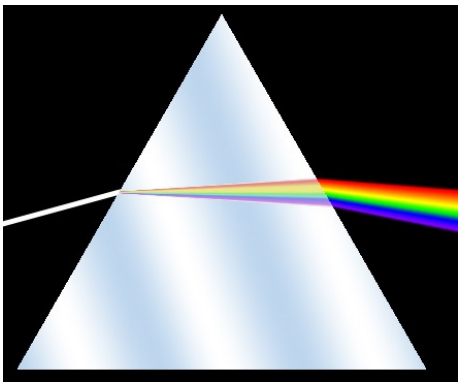


FIGURE 1 – Dans le verre, l'indice de réfraction dépend de la couleur. Pochette de l'album *The Dark Side of the Moon* des Pink Floyd.

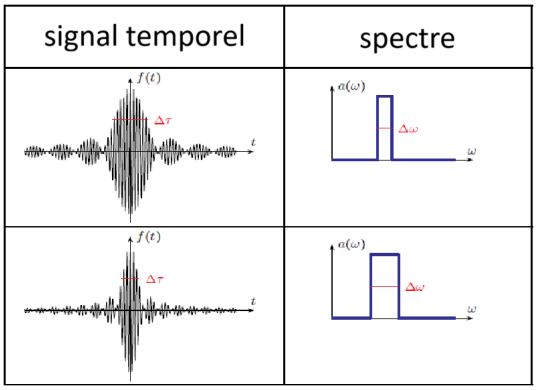
FIGURE 2 – Lors de la propagation dans une fibre optique, les impulsions lumineuses s'étalent et risquent de se superposer. Source : `https://youtu.be/PWaNMjimtPO`.

• La lumière ne se propage quasiment pas dans un métal, elle est principalement réfléchie.
• Un plasma est quasiment transparent pour la lumière mais pas pour les ondes radio AM.
• Si on jette un caillou dans l'eau, des ondes de surface sont produites. On observe que les ondes resserrées (faible λ) sont plus rapides que les ondes plus écartées (grande λ). Cf image page suivante.

2 Propagation d'un paquet d'onde

Un signal quelconque est de durée finie. Une manière de représenter ce phénomène est la notion de « paquet d'onde ».

2.1 Décomposition spectrale d'un paquet d'onde

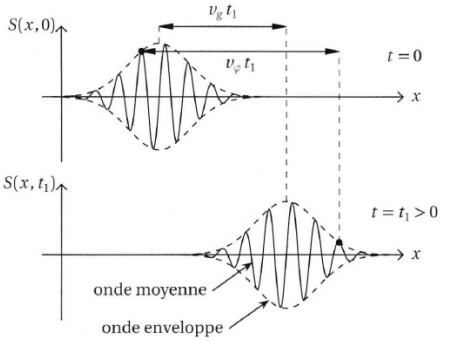


prop : Un signal périodique $s(t)$ suffisamment régulier de période minimale $T = 2\pi/\omega$ se décompose comme somme discrète par sa **série de Fourier** en notation complexe : $s(t) = s_0 + \sum_n a_n \exp(i(n\omega t + \varphi_n))$ (composante continue, fondamental, harmoniques).
prop : Un signal quelconque $s(t)$ suffisamment régulier se décompose comme somme continue (une intégrale) par sa **transformée de Fourier** [1] : $s(t) = s_0 + \int_0^{+\infty} \tilde{s}(\omega) \exp(i(\omega t + \varphi_n))d\omega$.
def : Un **paquet d'onde** est une somme (discrète ou continue) d'OPPH. Dans le cas d'une propagation unidimensionnelle selon $\overrightarrow{u_x}$: $s(x,t) = s_0 + \int_0^{+\infty} \tilde{s}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)x + \varphi_n))d\omega$, avec a priori k qui peut dépendre de ω. Le graphe de $\tilde{s}(\omega)$ en fonction de ω (ou $\nu = \omega/2\pi$) est le **spectre** de $s(x,t)$.
prop : Pour un signal $s(x,t)$ de durée typique τ, la largeur $\Delta\nu$ de son spectre $\tilde{s}(\nu)$ est donnée [2] par : $\boxed{\tau \cdot \Delta\nu \simeq 1}$ ou $\tau \cdot \Delta\omega \simeq 2\pi$. **Le spectre d'un paquet d'onde est d'autant plus étendu que sa durée τ est faible.** [3]

1. Il y a aussi un préfacteur qui dépend des conventions mais ce n'est pas à notre programme.
2. Cette propriété, conséquence de la transformée de Fourier, a déjà été utilisée pour caractériser les trains d'ondes en *Optique*.
3. CE : Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.

intérêt de la décomposition en OPPH : Si la propagation est régie par une équation aux dérivées partielles (ou équation différentielle) linéaire, il suffit de décomposer le signal initial en somme d'OPPH, de résoudre la propagation pour une OPPH, puis de recomposer le signal propagé en refaisant la somme des OPPH.

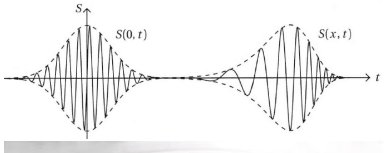
2.2 Distinction entre vitesse de phase et vitesse de groupe pour un milieu non dispersif



def : On appelle « **vitesse de groupe** » v_g la vitesse moyenne de l'enveloppe d'un paquet d'onde. C'est la vitesse de propagation [4] de l'énergie d'un paquet d'onde, et donc de l'information qu'il contient. D'après la relativité restreinte, on a nécessairement $\boxed{v_g \leq c}$, célérité de la lumière dans le vide.

def : La **vitesse de phase** v_φ correspond à la célérité par exemple d'un maximum local de l'oscillation de l'onde, cf schéma où $v_\varphi > v_g$. Attention, on peut avoir $v_\varphi > c$!

2.3 Dispersion d'un paquet d'onde



prop : **Si la propagation d'un paquet d'onde est dispersive, l'enveloppe du paquet se déforme.**

rq : Si la dispersion est suffisamment importante, on peut remarquer [5] que la dispersion est liée au fait que v_g et v_φ dépendent de ω (ou k).

exo1 : *Dans les différents cas de l'animation, comparer v_φ et v_g, et la dépendance de v_g avec λ ou k.*

exo2 : *Sur la photo déterminer si v_g augmente ou diminue avec $k = 2\pi/\lambda$.*

exo3 : *La durée d'une impulsion laser femtoseconde augmente lors de la propagation dans une lame de verre. Expliquer et indiquer quelle couleur du spectre est à l'avant du front d'onde. Donnée : l'indice du verre augmente si la longueur d'onde diminue.*

3 Propagation linéaire unidimensionnelle cartésienne d'une OPPH

On considère une OPPH du type $\exp^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ dont la propagation est régie par une équation aux dérivées partielles linéaire (EDP). A priori le nombre $\underline{k}$ est complexe et dépend de ω.

3.1 Procédure générale

⋆ Démontrer l'EDP à partir des équations fondamentales (Maxwell, Euler, PFD, etc). Remarquer qu'elle est linéaire [6] (la fonction qui représente l'onde n'apparaît qu'à la puissance 1, pas d'inverse ou de carré par exemple).

⋆ Injecter une OPPH en notation complexe. En simplifiant, on obtient la **relation de dispersion**.

⋆ En déduire les valeurs possibles de $\underline{k}$ (souvent deux valeurs opposées).

⋆ Interprétation de $\mathrm{Re}(\underline{k})$. Est-ce une onde progressive ($\mathrm{Re}(\underline{k}) \neq 0$) ? Propagation dispersive ($v_\varphi = \omega/\mathrm{Re}(\underline{k})$ dépend de l'OPPH) ?

⋆ Interprétation de $\mathrm{Im}(\underline{k})$. Y-a-t-il atténuation ou amplification (signe de $\mathrm{Im}(\underline{k})$) ?

3.2 Exemple du câble coaxial dissipatif

L'équation des télégraphistes modélise la propagation du mode fondamental d'un câble coaxial dissipatif. Au modèle des constantes réparties présenté *TDPO1a*, on adjoint deux sources de dissipation, comme représenté figure suivante :

⋆ La première est l'effet Joule dans les conducteurs. Il se modélise par l'ajout dans l'élément de câble d'une résistance $r\delta x$ montée en série avec la bobine.

⋆ La seconde est la perte de charge due au caractère imparfait de l'isolant séparant l'âme et la gaine. Elle se modélise par l'ajout dans l'élément de câble d'une conductance $g\delta x$ montée en parallèle avec le condensateur.

4. CE : Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.

5. Faire varier la relation de dispersion et la largeur initiale du paquet d'onde dans l'animation `http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html`.

6. CE : Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles.

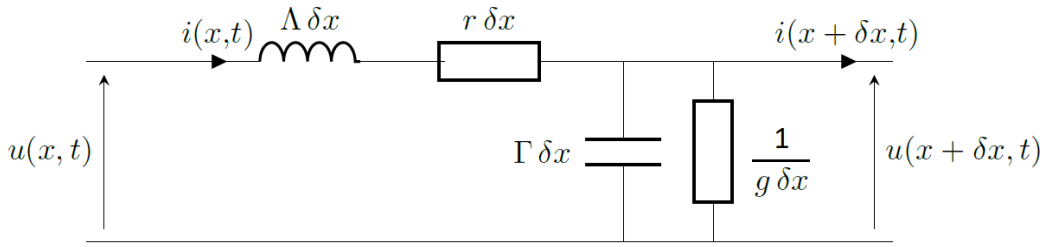


FIGURE 3 – Modélisation mésoscopique d'un câble coaxial dissipatif.

exo : *Démontrer que les lois de Kirchhoff mènent à l'EDP appelée « équation des télégraphistes », avec* $c = 1/\sqrt{\Lambda\Gamma}$ *:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Lambda g + \Gamma r)\frac{\partial u}{\partial t} + rgu \tag{1}$$

rq : De nombreux exemples de propagation dispersive sont régis par une EDP du type {d'Alembert+terme supplémentaire}.

3.3 Relation de dispersion

def : La **relation de dispersion** est la relation reliant $\underline{k}$ et ω. On l'obtient en injectant une OPPH dans l'EDP [7].

exo : *Démontrer que l'équation de dispersion du câble coaxial dissipatif est :*

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - rg + i\omega(\Lambda g + \Gamma r) \tag{2}$$

def : La relation de dispersion d'une EDP de d'Alembert est $k^2 = \omega^2/c^2$.
prop : Dans le cas général, $\underline{k}^2$ est un nombre complexe donc $\underline{k}$ peut l'être aussi ! On le note souvent $\underline{k} = k' - ik''$.

def : Pour une onde électromagnétique, l'indice de réfraction $\underline{n}$ est le nombre « $\underline{k}$ adimensionné » suivant : $\boxed{\underline{n} = \dfrac{\underline{k}}{k_{\text{vide}}} = \underline{k}\dfrac{c}{\omega}}$.

3.4 Interprétation de $k' = \mathrm{Re}(\underline{k})$: propagation et dispersion

Considérons une OPPH $s_0 \cdot e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{k} = k' \in \mathbb{R}$. Se reformule $s_0 \cdot e^{i\omega(t - \frac{k'}{\omega}x)}$ où on voit apparaître [8] la vitesse de la phase de l'OPPH.

prop : La **vitesse de phase** v_φ d'une OPPH est $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{k})}}$.

prop : Interprétation de $k' = \mathrm{Re}(\underline{k})$:
⋆ Si $k' \neq 0$, l'onde est **progressive** (terme couplant t et x).
⋆ Si $k' > 0$, propagation selon $+\overrightarrow{u_x}$,
⋆ Si $k' < 0$, propagations selon $-\overrightarrow{u_x}$,
⋆ Si $v_\varphi = \omega/k'$ dépend de ω (ou k'), la propagation est **dispersive**.

prop : *Démontrer que la vitesse de phase d'une onde électromagnétique dans un matériau d'indice n réel vaut* $v_\varphi = c/n$.

ex : *On donne les relations de dispersion suivantes. En déduire si ces propagations sont dispersives ou non.*

1. *Onde acoustique dans un fluide dans l'approximation acoustique :* $\omega^2 = \dfrac{k^2}{\mu_0 \chi_S}$.
2. *Onde acoustique dans un tuyau d'air de rayon a :* $k^2 = \mu_0\chi_S\omega^2 - \left(\dfrac{\mu_{mn}}{a}\right)^2$ *où* μ_{mn} *sont des nombres sans dimensions indicés par les entiers m et n.*
3. *Onde électromagnétique dans le vide :* $k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$.
4. *Onde électromagnétique dans un milieu transparent d'indice* $n(\lambda)$ *:* $k^2 = \varepsilon_0\mu_0 n^2(\lambda)\omega^2$.

7. CE : Établir la relation de dispersion d'un phénomène de propagation en utilisant des ondes de la forme $\exp(\pm i(\omega t - \underline{k}x))$.
8. CE : Associer la partie réelle de $\underline{k}$ au phénomène de dispersion.

prop admise : La **vitesse de groupe**[9] d'une onde est $\boxed{v_g = \dfrac{d\omega}{d(\mathrm{Re}(\underline{k}))}}$.

prop : Pour une onde se propageant selon l'équation de d'Alembert, alors $v_\varphi = v_g$.

démo : *La relation de dispersion qui découle de l'équation de d'Alembert est $\omega^2 = c^2k^2$ avec c constante. On en déduit $v_g = d\omega/dk = \omega/k = v_\varphi$.*

exo : *La relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur h est donnée par :*

$$\omega^2 = \left(g.k + \frac{\gamma k^3}{\mu}\right)\mathrm{th}(kh)$$

où $g = 9,81$ m.s^{-2} est l'accélération de la pesanteur, $\gamma = 72.10^{-3}$ SI est la tension superficielle de l'interface air-eau et $\mu = 1,0$ kg.L^{-1} est la masse volumique de l'eau. On précise que $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} \simeq x$ *pour $x \ll 1$. Et* $\mathrm{th}(x) \simeq 1$ *pour $x \gg 1$. Dans les cas suivants, déterminer si la propagation est dispersive et exprimer la vitesse de groupe de l'onde :*

1. onde de marée avec $\lambda = 1000$ km et $h = 5$ km (on trouve $\omega^2 \simeq ghk^2$),
2. onde de houle avec $\lambda = 5$ m et $h = 5$ km (on trouve $\omega^2 \simeq gk$) ? Faire le lien avec l'animation de la partie 2.3.

On pensera à négliger les termes adéquats dans la relation de dispersion pour chaque phénomène avant d'exprimer des vitesses.

3.5 Interprétation de $k'' = -\mathrm{Im}(\underline{k})$: absorption ou amplification

Considérons une OPPH $s_0 \cdot e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{k} = k' - ik''$. Se reformule $s_0 \cdot e^{-k''x} \cdot e^{i\omega(t-\frac{k'}{\omega}x)}$.

prop : Interprétation de $k'' = -\mathrm{Im}(\underline{k})$:
⋆ Si $k'' = 0$, l'onde est est d'amplitude constante.
⋆ Si $k'' > 0$, l'amplitude est **atténuée** si propagation selon $+\overrightarrow{u_x}$, ou **amplifiée** si propagation selon $-\overrightarrow{u_x}$
⋆ Si $k'' < 0$, c'est le contraire.
⋆ La **distance typique** d'atténuation ou amplification est $\delta = 1/|k''|$.

rq : Dans un milieu passif, l'onde ne peut évidemment pas être amplifiée exponentiellement, seule la solution avec atténuation sera physiquement possible. C'est le phénomène d'**absorption**[10].

ex : Il peut y avoir amplification exponentielle à la traversée d'un milieu amplificateur dans un laser (jusqu'à éventuellement atteindre une saturation), voir *chapitre PO4-Laser*.

9. CE : Déterminer la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes à partir de la relation de dispersion.
10. CE : Associer partie imaginaire de $\underline{k}$ au phénomène d'absorption.

4 Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique

4.1 Observations expérimentales

⋆ La résistance électrique d'un fil métallique est quasiment constante à basse fréquence mais finit par augmenter avec la fréquence si celle-ci devient suffisamment grande.

⋆ Quand cet effet est notable, augmenter la section ne réduit pas la résistance, en apparente contradiction avec la formule $R = \frac{L}{\sigma S}$ obtenue en statique. C'est pourquoi les circuits électriques « hyperfréquences » (dans les GHz) sont souvent constitués de bandes fines plutôt que de fils inutilement larges.

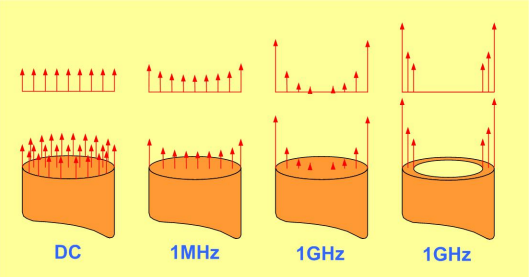


FIGURE 4 – Quand la fréquence augmente, le courant se répartit dans une portion de câble de plus en plus faible.

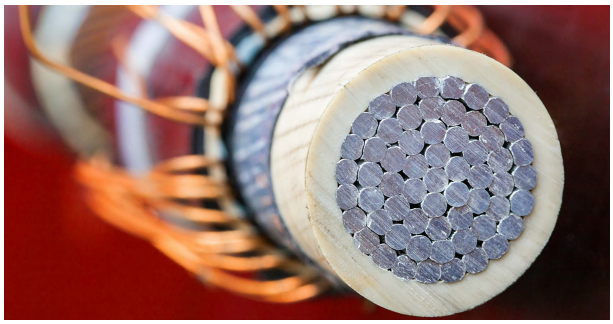


FIGURE 5 – C'est pourquoi on préfère parfois utiliser un ensemble de câbles fins plutôt qu'un gros câble.

4.2 Rappel sur le conducteur ohmique (cf chapitre *E1*)

4.2.1 Propriétés d'un conducteur ohmique : modèle de Drüde et loi d'Ohm locale

⋆ Le métal est modéliser par d'une part des ions fixes (noyau + électrons de cœur),

⋆ les électrons libres se déplacent sous l'influence de la force de Lorentz produite par l'onde électromagnétique :

$$\overrightarrow{F} = (-e)\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \simeq (-e)\overrightarrow{E} \tag{3}$$

car pour une OPPH électromagnétique, en supposant valable approximativement $B \simeq E/c$ (démontrée dans le vide), $\frac{vB}{E} \simeq \frac{v}{c} \ll 1$ pour des électrons non relativistes.

⋆ l'interaction des électrons avec le réseau est modélisée par une force de type « frottement fluide » ; $\overrightarrow{F_f} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$ (modèle de Drüde).

prop : Pour des durées grandes devant τ ($\simeq 10^{-14}$ s pour le cuivre), on a trouvé que la loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\boxed{\text{loi d'Ohm locale : } \quad \overrightarrow{j} = \underbrace{ne^2\tau/m}_{\sigma}.\overrightarrow{E}}, \qquad \text{donc pour une OPPH : } \underline{\overrightarrow{j}} = \sigma\underline{\overrightarrow{E}} \tag{4}$$

prop : Comme la conductivité $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$ sont en phase.

⋆ De plus, un matériau conducteur est globalement neutre, donc la densité de charge $\rho = 0$.

justification : *Démontrer que $\partial\rho/\partial t + \rho\sigma/\varepsilon_0 = 0$ dans un bon conducteur. En déduire que ρ peut être considéré comme nul aux fréquences usuelles.*

4.2.2 Loi de Joule locale : puissance dissipée dans le conducteur

prop rappel : La puissance transmise par le champ électromagnétique au matériau par unité de volume s'écrit :

$$\boxed{\text{loi de Joule locale : } \quad \mathcal{P} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}} \tag{5}$$

prop : Pour une OPPH électromagnétique $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = E_0 \cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right)$ se propageant dans un matériau de conductivité $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$, alors **l'énergie est toujours transférée depuis l'onde vers le matériau conducteur** [11] :

$$\mathcal{P} = \sigma E_0^2 \cos^2(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}) \geq 0 \tag{6}$$

ATTENTION : L'utilisation directe des notations complexes n'est possible que pour des relations linéaires. Or, les grandeurs énergétiques font intervenir des produits. Donc, **il faut repasser aux notations réelles avant d'effectuer des calculs de puissance ou d'énergie**.

rq : Il existe une formule pour contourner ce problème mais pas forcément exigible au programme officiel de PC. En notant $\underline{y}^*$ le conjugué de $\underline{y}$, on a $< x(t)y(t) >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{x}\underline{y}^*)$.

4.3 Équation de propagation et relation de dispersion dans un conducteur ohmique

démo de cours : *Pour un conducteur ohmique de conductivité σ, montrer que la relation de propagation de $\overrightarrow{E}$ s'écrit :*

$$\Delta\overrightarrow{E} = \mu_0\sigma\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{7}$$

On donne la relation vectorielle : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) - \Delta\overrightarrow{E}$.

rq : La différence avec la propagation dans le vide réside dans la présence du terme supplémentaire en σ d'ordre 1 en temps.

démo de cours :

1. *En déduire la relation de dispersion* [12] *:*
$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\sigma\omega \tag{8}$$
2. *On donne $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m, et $\sigma = 6.10^7$ S/m pour le cuivre. En déduire qu'un terme de cette équation est négligeable devant l'autre pour des fréquences usuelles des signaux électriques. En déduire une simplification de la relation de dispersion. En déduire aussi une approximation de l'équation de propagation. Faire l'analogie formelle avec l'équation de diffusion.* [13]
3. *En déduire que $\underline{k}$ dans ce cas n'est pas un nombre réel et donner ses expressions.*

prop : Dans les conducteurs ohmiques aux fréquences électriques usuelles, $\underline{k}$ est un nombre complexe :

$$\underline{k} = \pm\frac{1-i}{\delta}, \qquad \text{avec la longueur caractéristique :} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \tag{9}$$

4.4 Dispersion et atténuation

prop : **La propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique est dispersive et absorbée.**

exo de cours : *Démontrer que $v_\varphi = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}}$ et $v_g = 2v_\varphi$. La propagation est-elle dispersive ? La propagation est-elle atténuée ?*

4.5 Épaisseur de peau

On considère une onde se propageant suivant x croissant dans le conducteur ohmique et polarisée rectilignement suivant $\overrightarrow{u_z}$. En notation complexe :

$$\overrightarrow{E}(x,t) = E_0.\overrightarrow{e_z}.e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \tag{10}$$

11. CE : Associer l'atténuation de l'onde dans le milieu conducteur à une dissipation d'énergie.
12. CE : Établir la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique à basses fréquences.
13. CE : Identifier une analogie avec un phénomène de diffusion.

démo de cours : *En déduire l'expression réelle suivante :*

$$\overrightarrow{E}(x,t) = E_0.e^{-x/\delta}.\cos(\omega t - x/\delta).\overrightarrow{e_z} \tag{11}$$

On peut montrer que le champ magnétique et la densité de courant décroissent aussi en $\exp(-x/\delta)$.

def : On appelle **épaisseur de peau** [14] la distance typique δ d'atténuation du champ lors de la propagation.

ODG : *On donne* $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m, *et* $\sigma = 6.10^7$ S/m *pour le cuivre. En déduire l'épaisseur de peau pour les fréquences suivantes :*

fréquence	50 Hz	1MHz	5 GHz
δ	9 mm	60 μm	0,9 μm

rq1 : Il est donc inutile d'utiliser des fils plus beaucoup plus larges que δ !

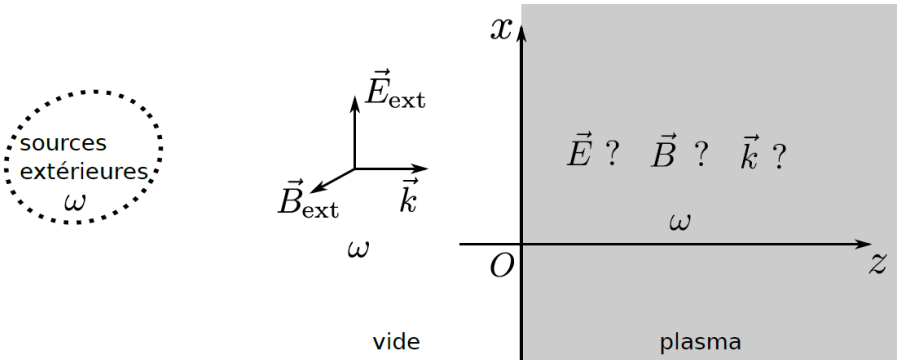
rq2 : Dans la limite d'un conducteur parfait ($\sigma \to +\infty$), l'épaisseur de peau tend vers 0 : l'onde ne pénètre pas dans le conducteur.

exo : *Tracer un exemple d'allure de* $E(x,t)$ *en fonction de* x *à un instant* t *donné.*

5 Propagation d'une onde électromagnétique transverse dans un plasma dilué

Un plasma est constitué d'atomes totalement ou partiellement ionisés. Les électrons libres et les ions sont mobiles et peuvent donc se déplacer sous l'action de la force de Lorentz. Cet état de la matière se retrouve par exemple dans des flammes de haute température, dans la haute atmosphère, et constituent 99% de la matière ordinaire par leur présence dans les étoiles.

5.1 Contexte de l'étude



On considère une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide (donc forcément transverse) selon $\overrightarrow{u_z}$, incidente sur une interface plane avec le plasma en $z = 0$. Pour simplifier, on suppose l'onde incidente dans le vide polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_x}$: $\overrightarrow{E} = E_m\overrightarrow{u_x}e^{i(\omega t - kz)}$. Donc $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u_z}$ avec $k = \omega/c$ dans le vide. Que devient cette onde transverse dans le plasma ?

5.2 Modèle de plasma peu dense localement neutre

⋆ On décrit le plasma par un fluide de densité volumique d'électrons (charge $q = -e$ et masse m) notée $n(M,t)$, et d'ions (charge $q_i = +ke$ et masse m_i) de densité volumique $n_i(M,t)$.

⋆ **Hypothèse de plasma dilué**. Le milieu est suffisamment peu dense pour négliger les phénomènes de collisions. **Ainsi, contrairement aux électrons dans les conducteurs, on ne considérera pas de force de frottement pour le déplacement d'électrons dans un plasma peu dense.** Et on utilisera la structure d'onde électromagnétique du vide $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E}/c$ avec $\overrightarrow{u}$ vecteur unitaire de direction de propagation.

14. CE : Estimer l"ordre de grandeur de l"épaisseur de peau du cuivre à différentes fréquences.

⋆ **Hypothèse de particules non relativistes.** Pour une particule de charge q et vitesse $\overrightarrow{v}$ soumise à une onde électromagnétique $\left(\overrightarrow{E},\overrightarrow{B}\right)$, **la partie électrique de la force de Lorentz domine la partie magnétique** si les particules sont non relativistes ($v \ll c$).

⋆ **Mouvement négligeable des ions.** Comme $m_i \simeq 2000m$, les ions sont beaucoup moins mis en mouvement que les électrons par le champ. Ainsi, $\overrightarrow{v_i} \simeq \overrightarrow{0}$ et $n_i = \text{cte}$.

⋆ **Onde transverse.** On se limite au cas de l'étude d'une onde transverse dans le plasma. Donc de la forme $\overrightarrow{E}(z,t) = E_0\overrightarrow{u_x}e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ avec a priori $\underline{k}$ complexe. Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Gauss, qui s'écrit ici $-i\underline{k}\overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{E} = \rho/\varepsilon_0$ donne $\rho = 0$ (car produit scalaire orthogonal pour une onde transverse). Ainsi, **le plasma reste neutre en présence d'une onde transverse**[15]**.**

Alors $\rho = -en(M,t) + ken_i = 0$, donc $n(M,t)$ est aussi une constante, notée n. Et donc la densité de courant est $\overrightarrow{j}(M,t) = -en\overrightarrow{v_e}(M,t) + ken_i\overrightarrow{v_i}(M,t) = -en_e\overrightarrow{v_e}(M,t)$ car les ions sont immobiles.

5.3 Conductivité électrique imaginaire pure dans le plasma

prop : Dans un plasma neutre peu dense soumis à une OPPH transverse, la conductivité $\underline{\sigma}$ est imaginaire pure[16] :

$$\overrightarrow{\underline{j}} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\overrightarrow{\underline{E}} \quad \text{donc} \quad \underline{\sigma} = -i\frac{ne^2}{m\omega} \tag{12}$$

Ainsi, en revenant en notation réelle, les courants $\overrightarrow{j}$ et champ $\overrightarrow{E}$ sont en quadrature de phase (déphasage de $\pi/2$).

démo de cours :

1. *Appliquer l'équation de Navier-Stokes au plasma en négligeant les forces autres que la partie électrique de la force de Lorentz.*
2. *Montrer que l'accélération convective est négligeable devant l'accélération locale pour un plasma non relativiste soumis à une OPPH électromagnétique.*
3. *En déduire que $\overrightarrow{\underline{j}} = \underline{\sigma}\overrightarrow{\underline{E}}$ et donner l'expression de la conductivité électrique.*

interprétation énergétique : Si $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$ sont en quadrature, alors **le champ ne transfère pas d'énergie aux charges en moyenne**[17] : $<\mathcal{P}>=<\overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}>=0$.

démo de cours.

5.4 Relation de dispersion

On cherche la relation de dispersion des OPPH transverses dans le plasma[18].

démo de cours :

1. *De la même manière que pour le conducteur ohmique partie 4.3, montrer que la relation de dispersion s'écrit :*

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\underline{\sigma}\omega \tag{13}$$

2. *En déduire que pour le cas du plasma :*

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \tag{14}$$

où on donnera l'expression de ω_p.

prop : On appelle **pulsation plasma** $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.

15. CE : Justifier la neutralité électrique locale du plasma en présence d'une onde transverse.
16. CE : Établir l"expression de la conductivité électrique complexe du plasma.
17. CE : Interpréter énergétiquement le caractère imaginaire pur de la conductivité électrique complexe du plasma.
18. CE : Établir la relation de dispersion des ondes planes progressives harmoniques transverses.

L'ionosphère, partie haute de l'atmosphère est assimilable à un plasma neutre peu dense, de densité volumique d'électrons $n_0 = 10^{11}$ m^{-3}. *On donne* $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F/m, $c = 3,00.10^8$ m/s, $e = 1,60.10^{-19}$ C, *et* $m = 9,11.10^{-31}$ kg. *On donne* $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$. *Montrer que la pulsation plasma de l'ionosphère vaut* $\omega_p = 17,8.10^6$ s^{-1}. *Comparer aux pulsations de radio AM, radio FM et de la lumière.*

5.5 Propagation à haute pulsation $\omega > \omega_p$

prop : Si $\omega > \omega_p$, alors la relation de dispersion donne $\underline{k}^2 > 0$ donc $k \in \mathbb{R}$:

$$k(\omega > \omega_p) = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \tag{15}$$

prop : La propagation de l'onde pour $\omega > \omega_p$ est **dispersive** mais non atténuée : **le plasma est transparent** [19].

exo de cours :

1. *L'onde est-elle atténuée ?*
2. *Montrer que* $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}$ *et en déduire que la propagation est dispersive. Tracer* $v_\varphi(\omega)$ *et comparer à c.*
3. *À partir de la relation de dispersion, montrer que* $v_\varphi.v_g = c^2$ *et en déduire* v_g. *La tracer sur le même graphe.*
4. *Dans la limite des très hautes fréquences, montrer que l'onde se propage dans le plasma comme dans le vide.*

5.6 Propagation à basse pulsation $\omega < \omega_p$

prop : Si $\omega < \omega_p$, alors la relation de dispersion donne $\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k}$ est imaginaire pur :

$$\underline{k}(\omega < \omega_p) = \pm i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} \tag{16}$$

On ne garde que la solution négative car la solution amplifiée est impossible physiquement. On posera $\underline{k} = -ik_2 = -j/\delta$ avec ici $\delta = c/\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$.

prop : **Comme $\underline{k}$ ne présente pas de partie réelle, il n'y a pas de propagation !** [20] Le champ électrique s'écrit alors :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cdot \cos(\omega t) \tag{17}$$

def : Une onde stationnaire dont l'amplitude décroît exponentiellement [21] est dite **évanescente**.

schéma : *Tracer le graphe de* $\overrightarrow{E}$ *en fonction de z à différents instants.*

prop : La valeur moyenne du vecteur de Poynting est nulle [22], en cohérence avec l'absence de propagation.

exo :

1. *À partir de l'expression de* $\overrightarrow{E}$, *en déduire* $\overrightarrow{B}$. *Commenter leur déphasage.*
2. *En déduire que* $< \overrightarrow{R} >= \overrightarrow{0}$.

19. CE : Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes dans le domaine de transparence du plasma.
20. CE : Interpréter la pulsation plasma comme une pulsation de coupure.
21. CE : Citer les caractéristiques d'une onde stationnaire évanescente. (onde stationnaire atténuée).
22. CE : Justifier que, dans le domaine réactif, une onde électromagnétique harmonique ne transporte aucune puissance en moyenne.

5.7 Propagation d'un paquet d'onde dans un plasma

Pour calculer numériquement la propagation d'un paquet d'onde dans un milieu donné, principalement deux méthodes :

⋆ intégration directe de l'EDP : pour une onde initiale donnée, calculer le nouvel état de l'onde à chaque itération à partir d'une méthode de type Euler (ou autre) basée sur l'expression de l'EDP qui régit l'onde. Exemple : script du chapitre PO1a sur la propagation dans une chaîne de ressort, et cf TDPO2.

⋆ utiliser la relation de dispersion : Cette méthode est bien plus rapide car ne nécessite pas d'intégrer une EDP (donc de choisir un pas temporel suffisamment petit). Pour une onde initiale donnée, la décomposer en OPPH (transformée de Fourier) puis calculer la valeur de $\underline{k}(\omega)$ à utiliser pour chaque OPPH à partir de la relation de dispersion (obtenue par calcul analytique sur l'EDP). Puis propager chaque OPPH et recombiner pour obtenir le paquet d'onde propagé.

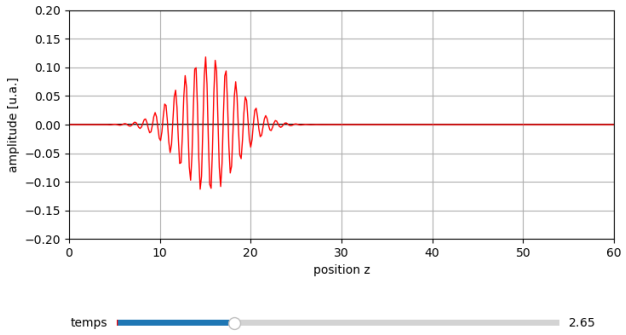


FIGURE 6 – Cas $\omega = 3\omega_p$.

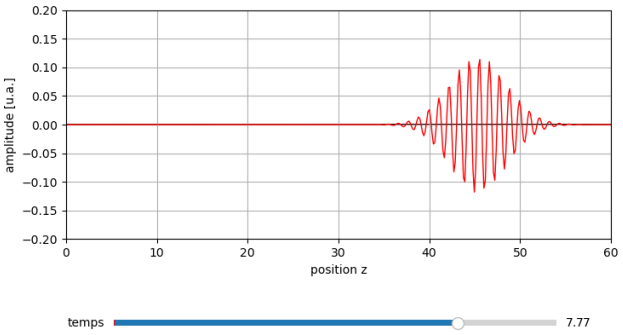


FIGURE 7 – La propagation semble-t-elle dispersive ? Atténuée ?

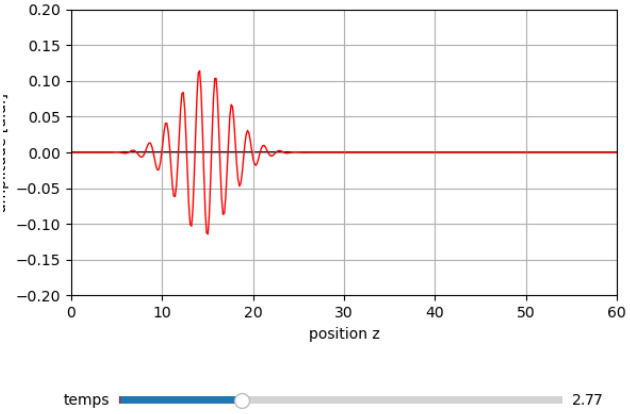


FIGURE 8 – Cas $\omega = 2\omega_p$.

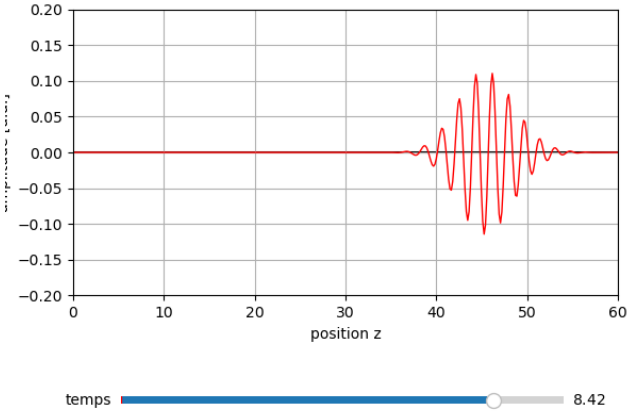


FIGURE 9 – La propagation semble-t-elle dispersive ? Atténuée ?

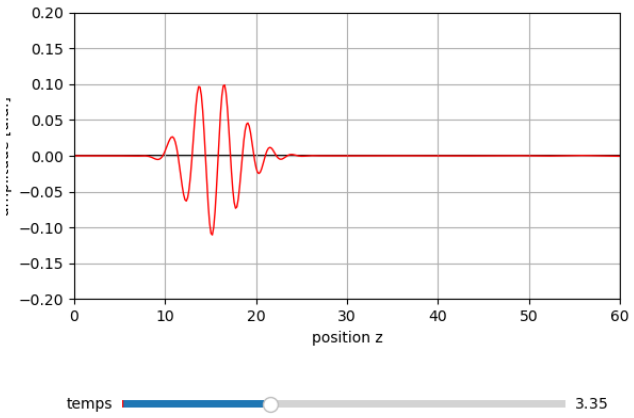


FIGURE 10 – Cas $\omega = 1,5\omega_p$.

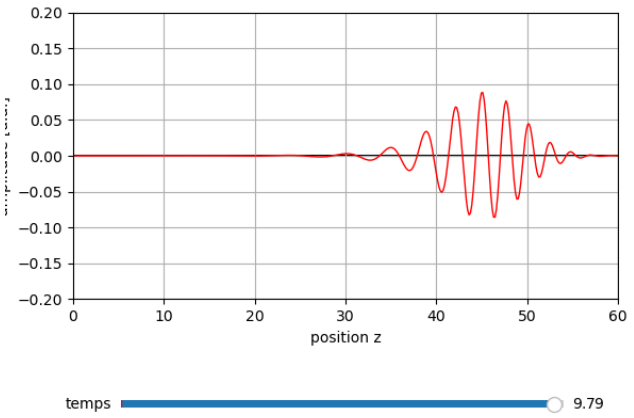


FIGURE 11 – La propagation semble-t-elle dispersive ? Atténuée ?

6 Simulation numérique de la propagation d'un paquet d'onde

6.1 Approche par résolution directe de l'EDP

6.1.1 Principe de résolution de l'EDP

On dispose de l'équation aux dérivées partielle régissant le système. On peut donc la résoudre par une méthode de différence finie (discrétisation de l'espace pour estimer les éventuelles dérivées spatiales) avec méthode d'Euler pour l'évolution temporelle [23].

ex : Chaîne infinie de ressorts de raideur k et masse m, l'équation différentielle [24] de l'élongation de la n-ième masse est : $\frac{d^2\xi_n(t)}{dt^2} = \omega_0^2\left(\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t) - 2\xi_n(t)\right)$ avec $\omega_0^2 = k/m$. On obtient donc pour chaque masse le schéma d'Euler suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot{\xi}_n}{dt} = \omega_0^2\left(\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t) - 2\xi_n(t)\right) \\ \dfrac{d\xi_n}{dt} = \dot{\xi}_n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\xi}_{n,i+1} = \dot{\xi}_{n,i} - \left(\xi_{n+1,i}(t) + \xi_{n-1,i}(t) - 2\xi_{n,i}(t)\right)\cdot dt \\ \xi_{n,i+1} = \xi_{n,i} + \dot{\xi}_{n,i}\cdot dt \end{cases}$$

6.1.2 Exemple de code

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
# Donnees du probleme
k = 3                                   # raideur
a = 1                                   # distance interatomique au repos
m = 1                                   # masse atome
# Discretisation spatiale
n_x = 1001                              # nb d'atomes
# L = a*(n_x-1)                         # longueur totale au repos
L_x = [j*a for j in range(n_x)]         # liste des positions au repos des atomes
# Discretisation temporelle
dt = 0.01                               # pas de temps << 2pi * sqrt(m/k)
n_t = 20000                             # nb de pas de temps
# Initialisations de liste de deplacement au repos
L_xi = [0]*n_x                  # liste des deplacements xi
L_xipoint = [0]*n_x             # liste des vitesse d(xi)/dt
```

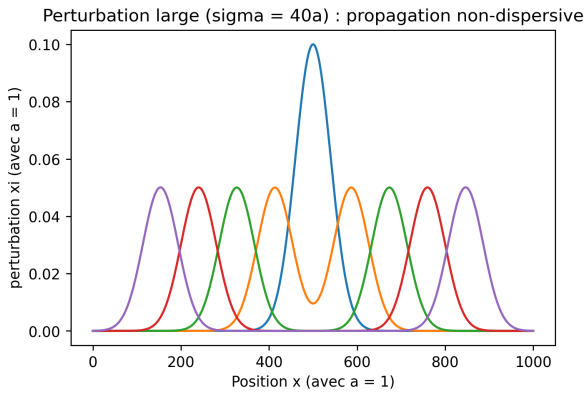
23. La résolution est donc très proche de celle de la diffusion thermique, sauf que les équations d'onde sont souvent de dérivées d'ordre 2 en temps.

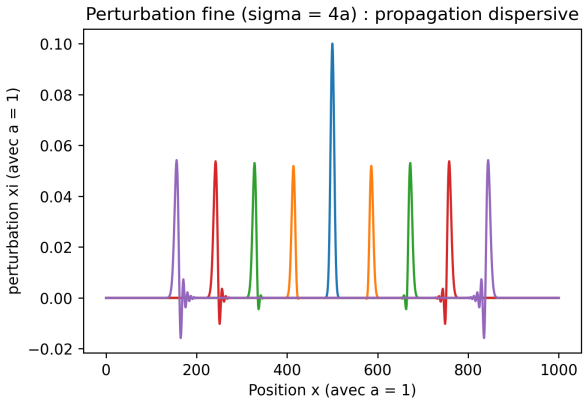
24. Démo chapitre *PO1a*.

```
17
18 # Perturbation initiale : enveloppe gaussienne
19 ampl = 0.1*a                  # perturbation max
20 sigma = 4                     # ecart-type (30:non dispersion, 10:amplitude varie, 4:forte dispersion,
       3:artefacts)
21 x0 = 500                      # centre de la perturbation
22 for i in range(n_x):
23     L_xi[i] = ampl*np.exp(-(i-x0)**2/(2*sigma**2))
24
25 # pour tracer graphe entre abscisses x1 et x2
26 x1 = 0
27 x2 = n_x
28
29 # Resolution numerique, avec graphe a differents instants
30 plt.figure()
31 plt.plot(L_x[x1:x2],L_xi[x1:x2])          # tracer xi(x) initial
32 for i in range(n_t):                      # pour chaque instant :
33     L_xi_temp = [0]                      # xi(x) temporaire pour ce t, initialisee a 0
34     L_xipoint_temp = [0]                 # dxi/dt(x) temporaire pour ce t, initialisee a 0
35     for j in range(1,n_x-1):             # pour chaque position suivante :
36         L_xi_temp.append(L_xi[j]+(L_xipoint[j])*dt)                                  # Euler sur xi
37         L_xipoint_temp.append(L_xipoint[j]+(L_xi[j+1]+L_xi[j-1]-2*L_xi[j])*dt*k/m) # Euler d(xi)/dt
38     L_xi_temp.append(0)                  # extremite a 0
39     L_xipoint_temp.append(0)             # extremite a 0
40     L_xi[:] = L_xi_temp[:]               # copie complete dans la liste L_xi
41     L_xipoint[:] = L_xipoint_temp[:]     # copie complete dans la liste L_xipoint
42     if ((i+1)%5000 == 0):                # trace tous les xxxx dt
43         plt.plot(L_x[x1:x2],L_xi[x1:x2])
44 plt.xlabel('Position x (avec a = 1)'); plt.ylabel('perturbation xi (avec a = 1)')
45 plt.title('Perturbation fine (sigma = 4a) : propagation dispersive')
46 plt.show()
```

6.1.3 Questions sur le code et les résultats

La résolution a été effectuée dans le cadre d'une excitation initiale au centre du système. Les figures suivantes sont les résultats pour une perturbation très large devant a et plus fine.





1. Ligne 12, pourquoi faut-il que le pas de temps dt soit petit devant $2\pi\sqrt{m/k}$?
2. Ligne 35, expliquer le domaine du `range`.
3. Lignes 36-37, savoir les écrire à partir de l'EDP.
4. Commenter les figures : y-a-t-il dispersion ? Si oui, comment évolue v_g avec k (faire le lien avec l'exo correspondant de *TDPO2*) ?

6.1.4 Temps de calcul élevé pour la résolution de l'EDP

Pour déterminer le profil spatial du paquet d'onde à l'instant t, il faut calculer le profil spatial à tous les instants intermédiaires ! Le temps de calcul peut alors être conséquent.

rq : Ce temps de calcul peut probablement être réduit en vectorisant la situation. Le système de n ED sur les ξ_n peut s'écrire sous forme matricielle $\frac{d\dot{X}}{dt} = MX$ avec le vecteur $X = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$ et la matrice tridiagonale M.

6.2 Approche par utilisation de la relation de dispersion

6.2.1 Principe du calcul par transformée de Fourier

On dispose de la relation de dispersion. Par exemple pour le plasma : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.
On considère un paquet d'onde $s(z,t)$ comme superposition [25] d'OPPH (transformée de Fourier) :

$$s(z,t) = \int_0^{+\infty} \tilde{s}(\omega) \exp\left(\omega t - k(\omega) z\right) d\omega \tag{18}$$

où $\tilde{s}(\omega)$ représente le spectre du paquet d'onde.
On utilisera une enveloppe gaussienne :

$$\tilde{s}(\omega) = A \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right) \tag{19}$$

où ω_0 est le centre du spectre et $\Delta\omega$ l'ordre de grandeur de la largeur spectrale.

Dans ce cas, on peut calculer directement le paquet d'onde à n'importe quel instant quelconque en appliquant la formule. Pas besoin de calculer la propagation à tous les instants intermédiaires !

6.2.2 Exemple de code qui produit une animation

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation
import cmath
import sys
## Discretisation de la coordonnee spatiale
zmin,zmax,nz    = 0,900,1200
Z = np.linspace(zmin,zmax,num=nz)
# de la coordonnee temporelle
tmin,tmax,nt    = 0,900,400
dt = (tmax-tmin)/nt

## Proprietes du paquet d'onde d'enveloppe gaussienne
omega0 = 1          # pulsation centrale
deltaomega = 0.15   # largeur spectrale
# Pour calculer l'onde par somme discrete (au lieu d'une integrale) d'un grand nombre d'OPPH, on definit les pulsations de chacune de ces OPPH
nomega = 1000       # nombre d'OPPH de la superposition
omega  = np.linspace(omega0-3*deltaomega,omega0+3*deltaomega,num=nomega)
# Spectre du paquet d'ondes : fonction qui recoit en entree la pulsation omega et renvoie l'amplitude (complexe) de la composante de pulsation omega (ici spectre gaussien)
def s(w):
    return cmath.exp(-(w-omega0)**2/deltaomega**2) # amplitude *complexe* d'ou le cmath

## On definit ici la relation de dispersion
def k(w):
    wp = 0.5        # pulsation plasma
    if w < wp :     # tel quel, le programme n'a pas ete ecrit pour prendre en compte les k complexes
        print('Attention vous demandez une pulsation pour laquelle k est imaginaire pur')
        sys.exit()
    return np.sqrt(w**2-wp**2) # on a pris c=1

## On fabrique le paquet d'onde avec k(w) qui vient de la relation de dispersion
def paquetdondes(z,t):
    # En entree, un tableau numpy contenant les coordonnees z, et un scalaire contenant la date t
    # Cette fonction renvoie la valeur (complexe) du paquet d'ondes a la date t, en tous les points de z, sous forme d'un tableau numpy de longueur len(z)
```

25. Numériquement, le calcul approché de l'intégrale est effectué en l'assimilant à une somme discrète.

```
35      h = np.zeros_like(z,dtype=complex)   # il faut preciser qu'on veut un tableau de complexes
36      for p in range(nomega):
37          h += s(omega[p])*np.exp(1j*(omega[p]*t-k(omega[p])*z))
38      return h
39
40 # Creation de la figure "vide"
41 fig = plt.figure(figsize=(18,5))
42 line, = plt.plot([],[])
43 # On precise les limites du trace en abscisse et en ordonnee
44 plt.xlim(zmin,zmax)
45 plt.ylim(-300,300)
46 def animate(i):
47     # C'est ici que l'on rafraichit, pour chaque date t, la figure a tracer
48     t = tmin+i*dt
49     y = paquetdondes(Z,t)
50     line.set_data(Z,y.real)  # attention on doit tracer la partie reelle
51     return line,
52 # Trace de l'animation
53 ani = animation.FuncAnimation(fig,animate,frames=nt,blit=True,interval=10,repeat=False,save_count
       =1500)
54 writergif = animation.PillowWriter(fps=30)
55 #ani.save("etalement1paquetdondes.gif",writer=writergif)  # au cas ou on souhaite enregistrer l'
       animation produite
56 plt.show()
```

6.2.3 Questions sur le code et les résultats

Le code précédent peut être simplifié si on souhaite calculer le profil spatial à un instant donné, plutôt que produire une animation de la propagation.

1. Lignes 20-21, savoir écrire une fonction calculant l'amplitude du spectre à pulsation donnée pour une enveloppe gaussienne.
2. Lignes 24-29, reconnaître la relation de dispersion.
3. Lignes 32-38, reconnaître le calcul de $s(x,t)$ par calcul approché de l'intégrale.
4. Des extraits des animations ont été fournis en fin de partie 5.7. Questions habituelles : y-a-t-il dispersion ? Faire le lien avec les expressions de v_φ et v_g, etc.