

T3 : Transfert thermique

1 Différents modes de transferts thermiques

1.1 Conduction (ou diffusion), sujet principal de ce chapitre

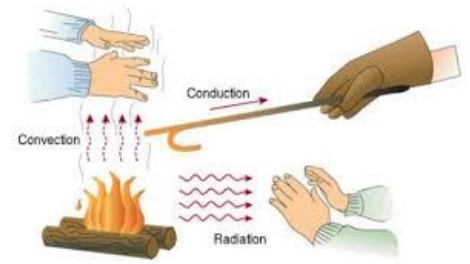
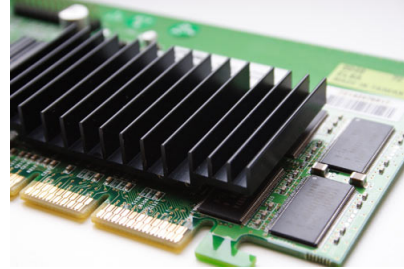
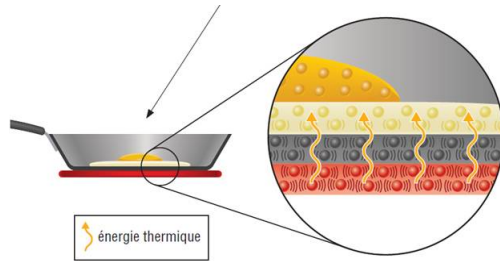


FIGURE 1 – Mise à profit de la conduction thermique pour chauffer un système (gauche) ou au contraire pour le refroidir (droite).

def : Conduction thermique : transport d'énergie de proche en proche sans transport global de matière.

★ Si température inhomogène : transport spontané du chaud vers le froid.

→ À l'équilibre : température homogène.

★ Conduction plus efficace dans les milieux denses. En particulier, la conduction thermique est faible dans l'air, et absente dans le vide !

★ Conduction plus efficace dans métaux, bons conducteurs électriques, que dans les isolants électriques car les électrons libres participent plus facilement au transport de l'énergie.

★ Origine microscopique : transfert d'énergie cinétique entre particules proches.

1.2 Convection, cf mécanique des fluides

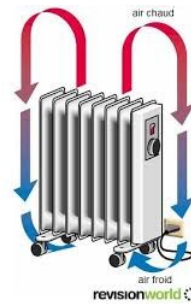
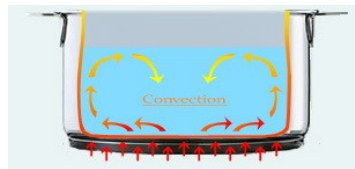


FIGURE 2 – La convection naturelle domine les transferts thermiques dans les fluides comme l'eau ou l'air.

def : La convection thermique est due à un déplacement macroscopique de matière et n'existe donc que dans les fluides.

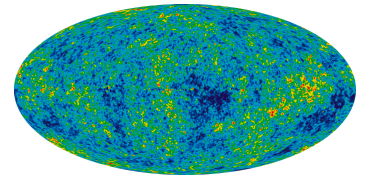
La convection naturelle se produit spontanément dans un fluide dans lequel existe un gradient de température. Elle est liée au fait que la densité d'un fluide (gaz ou liquide) diminue lorsque sa température augmente, autrement dit, plus il est chaud, plus il devient léger. L'air chaud dans une maison tend toujours à s'amasser au plafond !

1.3 Rayonnement, cf dernière section du chapitre

def : Tout corps émet un rayonnement électromagnétique appelé rayonnement thermique, dépendant principalement de sa température. Contrairement à la conduction et à la convection, ce transport d'énergie n'a pas besoin de milieu matériel pour se propager, il se propage aussi dans le vide car c'est une onde électromagnétique.

ex : ampoule à filament, soleil, fond diffus cosmologique :

Le fond diffus cosmologique est un rayonnement électromagnétique très homogène observé dans toutes les directions du ciel et dont le pic d'émission est situé dans le domaine des micro-ondes, équivalent à un corps noir de 3 K. Anticipé dès 1948 et **découvert par hasard en 1964**, il résulte de l'expansion brutale de l'Univers juste après le Big-Bang.

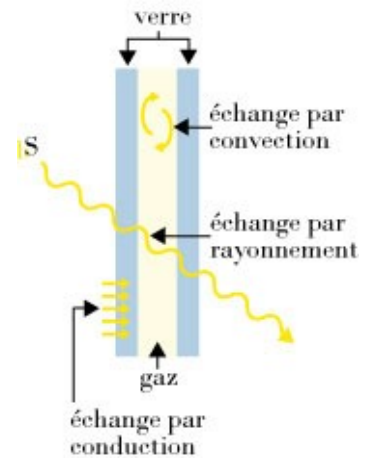


1.4 Situation réelle

En situation réelle, l'ensemble des trois types de transfert thermique peuvent intervenir conjointement !

Par exemple, dans le cas du transfert à travers une fenêtre :

- ★ conduction à travers le verre,
- ★ convection dans l'air ainsi que dans le gaz d'un double vitrage,
- ★ rayonnement visible transmis mais rayonnement infrarouge réfléchi.



1.5 Approche intuitive de l'équation de diffusion

question : Considérons la température $T(x, t)$ en un point x d'un barreau calorifugé. Pourquoi varierait-elle dans le temps ? Faire le lien entre le signe de différentes dérivées partielles de $T(x, t)$.

2 Bilan thermique global

2.1 Flux thermique et densité de flux thermique

def : Pour un transfert thermique δQ à travers une surface orientée pendant dt , le **flux thermique** est $\phi_Q = \delta Q/dt$, en $J.s^{-1} = W$, homogène à une puissance.

analogie : « Débit d'énergie », analogie avec $\phi_N = \delta N/dt$, $D_m = \delta m/dt$, $i = \delta q/dt$, etc.

prop : Pendant dt , transfert $\delta Q = \phi_Q \cdot dt$.

rq : C'est une grandeur dite « algébrique », son signe dépend de l'orientation de la surface, comme l'intensité électrique. On le décompose parfois en une différence de termes positifs : $\phi_Q = \phi_{\text{entrant}} - \phi_{\text{sortant}}$.

def : vecteur **densité de flux thermique** $\vec{j}_Q$ tel qu'à travers une surface orientée $\vec{dS}$ au niveau de d'un point M : $d\phi_Q = \vec{j}_Q(M) \cdot \vec{dS}$. Donc j_Q en $J.s^{-1}.m^{-2} = W.m^{-2}$.

analogie : densité de courant (électrique) $\vec{j}$ en $A.m^{-2}$ (cf cours E1), intensité lumineuse I en $W.m^{-2}$ (cf E4), etc.

prop : ★ Cas quelconque¹ : $\phi_Q = \iint_{M \in S} \vec{j}_Q(M) \cdot \vec{dS}$, ★ Cas où $\vec{j}_Q$ homogène sur S et dans le même sens : $\phi_Q = j_Q \cdot S$.

rq : Le sens de $\vec{j}_Q$ indique la direction du transfert thermique.

2.2 Terme de source

ex : Un système peut aussi échanger de l'énergie par réaction chimique ou nucléaire.

def : On appelle **puissance volumique produite** $\mathcal{P}_V$ ou p la grandeur telle que l'énergie reçue algébriquement δQ_{prod} pendant dt dans le volume dV est $\delta Q_{\text{prod}} = \mathcal{P}_V \cdot dV \cdot dt$. Unité de $\mathcal{P}_V$: $J.s^{-1}.m^{-3} = W.m^{-3}$.

★ Si $\mathcal{P}_V$ uniforme, l'énergie reçue sur un volume V est : $\delta Q_{\text{prod}} = \mathcal{P}_V \times V \times dt$. Sinon, $\delta Q_{\text{prod}} = \int_{M \in V} \mathcal{P}_V(M) d\tau \cdot dt$.

rq : C'est une grandeur algébrique, de signe positif si de l'énergie est effectivement reçue par le système (réaction exothermique), et négatif si de l'énergie est consommée (réaction endothermique).

1. CE : Exprimer le flux thermique à travers une surface en utilisant le vecteur $\vec{j}_Q$.

2.3 Bilan global dans un solide

Considérons un solide de volume V , masse volumique ρ , de capacité thermique massique c , reçoit une puissance volumique $\mathcal{P}_V$.

rappel : Pour un solide incompressible indilatable, $dU = dH = CdT$, et $\delta W_p = 0$.

prop : Bilan thermique global dans un système macroscopique Σ :

$$\frac{dU}{dt} = \rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = \phi_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} + \mathcal{P}_V \cdot V \quad (1)$$

« variation temporelle de U » = « puissance entrante par parois » + « puissance apportée par réaction »

| démo : Utiliser le premier principe de la thermodynamique.

prop : Bilan thermique global en régime stationnaire dans un système macroscopique Σ sans réaction :

$$\phi_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} = 0 \quad (2)$$

« ce qui entre » = « ce qui sort » (analogie **loi des nœuds**).

2.4 Exo-type : noyau terrestre

La Terre est assimilée à une sphère de centre O et de rayon R . Au centre, un noyau sphérique de rayon $a < R$ est le siège de réactions nucléaires générant une puissance volumique p . Pour $a < r < R$ le milieu a une conductivité thermique λ , une masse volumique μ et une capacité thermique massique c . On se place en régime permanent.

1. Choisir la base d'étude et écrire le vecteur densité de flux thermique en un point M ($a < r < R$) en exploitant la symétrie du système.
2. Effectuer un bilan global sur un volume bien choisi pour en déduire que la densité de flux est de la forme $j(r) = A/r^2$ où A est une constante à exprimer en fonction des données du problème.
3. Déterminer l'équation différentielle sur la température $T(r)$ pour $a < r < R$. On note T_R la température de surface de la Terre. En déduire alors complètement $T(r)$ en fonction des données.

3 Bilan thermique local

3.1 Bilan local unidimensionnel pour un solide

2

prop : **équation de conservation de l'énergie** (1D cartésien)

$$\frac{\partial j_Q}{\partial x}(x, t) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \mathcal{P}_V(x, t) \quad (3)$$

prop : **équation de conservation de l'énergie** (1D cylindrique)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot j_Q)}{\partial r}(r, t) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \mathcal{P}_V(x, t) \quad (4)$$

prop : **équation de conservation de l'énergie** (1D sphérique)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \cdot j_Q)}{\partial r}(r, t) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \mathcal{P}_V(x, t) \quad (5)$$

| démo : À l'aide d'un bilan global sur une tranche de solide d'épaisseur dx (cartésien) ou une tranche d'épaisseur dr (cylindrique et sphérique), en déduire l'équation de bilan local à l'aide du premier principe de la thermodynamique.

interprétation : Comme pour la conservation de particule : si par exemple $j_{Qx}(x) > j_{Qx}(x + dx)$ ($\partial j / \partial x < 0$), alors $\phi_{\text{entrant}} > \phi_{\text{sortant}}$ donc $T(x, t)$ augmente avec t ($\partial T / \partial t > 0$).

2. CE : Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes.

3.2 Bilan local tridimensionnel

prop : **équation de conservation de l'énergie (3D)**

$$\operatorname{div}(\vec{j}_Q) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \mathcal{P}_V(x, t) \quad (6)$$

3.3 Influence de la géométrie sur un bilan en régime stationnaire sans source

prop³ : En régime stationnaire sans apport volumique d'énergie (pas de réaction chimique ou nucléaire) :

- ★ Pour une diffusion unidimensionnelle selon x dans un système de section constante, $\vec{j}_Q = \text{cte} \cdot \vec{u}_x$,
- ★ Pour une diffusion à géométrie cylindrique, $\vec{j}_Q(r) = (\text{cte}/r) \cdot \vec{u}_r$,
- ★ Pour une diffusion à géométrie sphérique, $\vec{j}_Q(r) = (\text{cte}/r^2) \cdot \vec{u}_r$.

démo à partir d'un bilan global : Choisir judicieusement la forme du système auquel appliquer un bilan thermique global.

démo à partir d'un bilan local : Utiliser le formulaire des expressions de div.

4 Loi de Fourier et équation de diffusion

4.1 Loi de Fourier

objectif : relier vecteur $\vec{j}_Q$ aux inhomogénéité de T .

- ★ Sens spontané de flux : fort T vers faible T .
- ★ DL de j_Q : ordre 0 nul, donc en dT/dx à ordre le plus bas.

loi : **loi de Fourier** 1D cartésien selon $\vec{u}_x$:

$$j_{Qx} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (7)$$

avec $\lambda > 0$, **conductivité thermique** en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ou $\text{kg.m.s}^{-3}.\text{K}^{-1}$.

rq : λ est parfois notée κ , lettre grecque « kappa » qui ressemble à la lettre latine K.

interprétation : si $T(x)$ croissant, $\partial T/\partial x > 0$ donc $j_{Qx} < 0$, flux vers $x < 0$, donc vers $T(x)$ faible.

analogie : avec loi de Fick : $j_{Nx} = -D \cdot \partial n/\partial x$.

matériau	λ à 300 K ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
cuivre	4.10^2
acier	$\simeq 50$
béton	$\simeq 1$
eau	0,6
air à 1 bar	$2,6.10^{-2}$

ODG⁴ : $\lambda_{\text{métaux}} \gg \lambda_{\text{isolants}}$ et $\lambda_{\text{phase cond.}} \gg \lambda_{\text{gaz}}$.

loi : **loi de Fourier** 3D :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (8)$$

3. CE : Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie. Utiliser la conservation du flux thermique sous forme locale ou globale en l'absence de source interne.

4. CE : Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, métaux.

4.2 Équation de diffusion

prop : équation de diffusion 1D sans source :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9)$$

analogie : diffusion de particules : $\partial n / \partial t = D \cdot \partial^2 n / \partial x^2$.

démo⁵ : Combiner la loi de Fourier et l'équation de conservation de l'énergie.

def : Coefficient de diffusion thermique $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

matériau	D à 300 K ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
cuivre	$1,2 \cdot 10^{-4}$
acier	$\simeq 10^{-5}$
béton	$\simeq 5 \cdot 10^{-7}$
eau	$1,4 \cdot 10^{-7}$
air à 1 bar	$2 \cdot 10^{-5}$

ODG : $D_{\text{métaux}} > D_{\text{isolants}}$ et $D_{\text{phase cond.}} > D_{\text{gaz}}$.

prop : équation de diffusion 3D sans source :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \Delta T \quad (10)$$

où Δ est l'opérateur laplacien scalaire : $\Delta = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}})$

démo : Combiner la loi de Fourier et l'équation de conservation de l'énergie en utilisant la définition du laplacien scalaire : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f))$.

4.3 Analyse dimensionnelle

prop⁶ : $D \simeq L^2 / \tau$ soit $L \simeq \sqrt{D\tau}$.

exo : Cylindre de moteur en acier, épaisseur $e = 5 \text{ mm}$, diffusivité thermique $D = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Pour un moteur tournant à 3000 tours/min, justifier que la transformation du mélange air-carburant sur un cycle peut être considérée adiabatique.

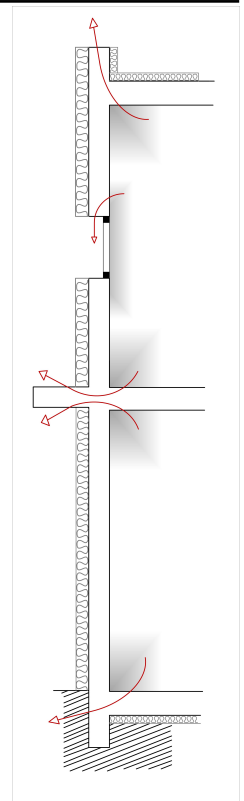
5. CE : Établir une équation de la diffusion thermique.

6. CE : Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.

5 Régime stationnaire : notion de résistance thermique



FIGURE 3 – Photo et image infrarouge d'un bâtiment partiellement isolé.



5.1 Modélisation de transfert thermique à travers une paroi uniforme

Pour une paroi plane loin de ses bords, on peut la considérer comme un système 1D cartésien.

5.1.1 Régime stationnaire 1D cartésien

Considérons un matériau homogène de conductivité thermique λ , siège de diffusion thermique 1D selon (Ox) . Section S , conditions aux limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$.

prop⁷ : En régime stationnaire, le profil de température $T(x)$ dans le matériau est une fonction affine et ne dépend pas du matériau. Et le flux thermique est proportionnel à la différence de température, et dépend du matériau.

exo de cours : Déterminer $T(x)$, j et ϕ en régime stationnaire. Réponses : $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} \cdot x + T_1$, $j = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$,

$\phi = jS = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{L}$, comparer son signe à celui de $T_1 - T_2$.

5.1.2 Analogie avec les circuits électriques : loi d'Ohm

rappel : Loi d'Ohm⁸ en convention récepteur : $U = V_1 - V_2 = R \cdot I$, $R = (V_1 - V_2)/I$.

def : Résistance thermique $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$

★ ϕ de même signe que $T_1 - T_2$ donc $R_{th} > 0$.

★ Pour une différence $T_1 - T_2$ donnée, R_{th} grand veut dire faible transfert ϕ . Donc **pour isoler, il faut R_{th} grand**.

5.2 Expressions de résistance thermique

5.2.1 Résistance thermique d'un système calorifugé latéralement

Considérons un solide de longueur L , section S , conductivité thermique λ . Alors $\phi = j \cdot S = (S\lambda/L)(T_1 - T_2)$.

prop⁹ : $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$. analogie avec résistance électrique $R = L/(\gamma S)$, cf chapitre *Électromagnétisme*.

7. CE : Utiliser la loi de Fourier.

8. CE : Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique.

9. CE : Exprimer une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel.

5.2.2 Résistance thermique d'une autre géométrie

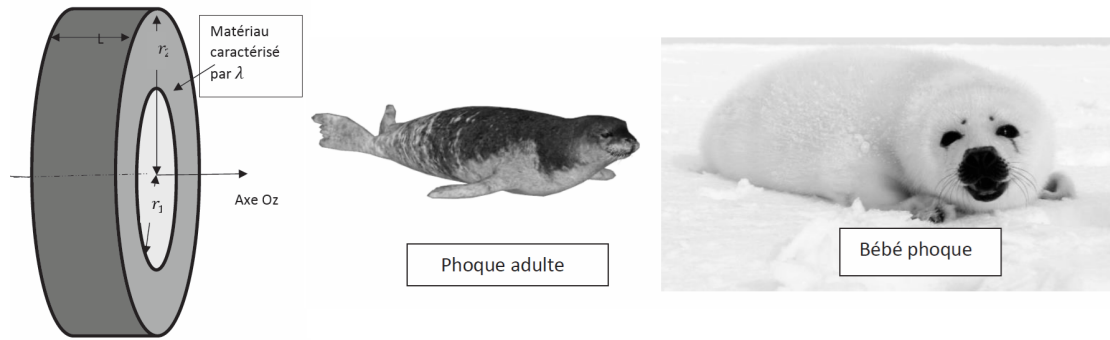


FIGURE 4 – Modélisation d'un phoque par un système unidimensionnel cylindrique. Pour le bébé phoque, on prend en compte une épaisseur supplémentaire de duvet isolant.

exo1 : Considérons une gaine cylindrique (par exemple gaine de câble électrique ou couche de graisse d'un phoque) solide de longueur L , rayon intérieur R_1 et rayon extérieur R_2 , de conductivité thermique λ . Elle est soumise à une température T_1 sur la face intérieure, et T_2 à l'extérieur. Démontrer que la résistance thermique encore définie de manière générale par $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$ vaut ici $R_{th} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda L}$.

exo2 : Considérons une gaine sphérique (par exemple croûte terrestre) entre le rayon intérieur R_1 et le rayon extérieur R_2 , de conductivité thermique λ . Elle est soumise à une température T_1 sur la face intérieure, et T_2 à l'extérieur. Démontrer que la résistance thermique encore définie de manière générale par $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$ vaut ici $R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.

5.3 Modélisation de transfert thermique à travers une paroi uniformément isolée

5.3.1 Intérêt d'une isolation

exo-type : Mur béton d'épaisseur $e_1 = 15,0$ cm, $\lambda_1 = 1,5$ W.m⁻¹.K⁻¹, hauteur $H = 3$ m, longueur $L = 5$ m. À l'intérieur de la pièce, on plaque un isolant en laine de verre $e_2 = 10,0$ cm, $\lambda_2 = 0,040$ W.m⁻¹.K⁻¹. Extérieur $T_1 = 5,0^\circ\text{C}$, intérieur $T_2 = 20,0^\circ\text{C}$.

1. Déterminer le flux thermique à travers le mur sans et avec isolant.
2. Déterminer la température de contact entre l'isolant et le béton.

Réponses¹⁰ : 2250 W ; 87 W ; 5,6°C.

5.3.2 Association série et diviseur de tension

rappel et analogie : formules et démos.

5.4 Modélisation de transfert thermique à travers une paroi avec pont thermique

5.4.1 Influence d'un pont thermique

exo-type : On reprend le mur isolé de l'exo précédent mais cette fois, on prend aussi en compte le flux thermique par le plancher en béton qui donne sur un balcon non isolé. Pour simplifier, on considère simplement une hauteur $h = 20$ cm de béton supplémentaire soumis à même différence de température.

1. Déterminer le flux thermique.
2. Justifier le terme de « pont thermique ».

Réponses : flux supplémentaire de 150 W.

10. CE : Utiliser des associations de résistances thermiques.

5.4.2 Association parallèle et diviseur de courant

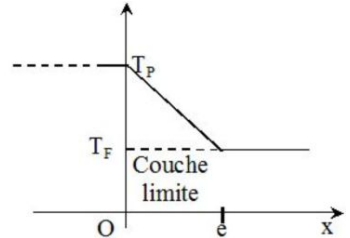
| rappel et analogie : formules et démos.

6 Régime stationnaire : cas d'un solide en contact avec un fluide

6.1 Conditions aux limites à l'interface fluide-solide : relation de Newton

Considérons un solide dans l'espace $x < 0$ à température T_p en contact avec un fluide (espace $x > 0$) à température T_F loin des bords (à $x \rightarrow +\infty$). Au cœur du fluide, les transferts thermiques sont principalement assurés par convection, et non pas par conduction. Mais la viscosité du fluide restreint la convection dans une fine zone d'épaisseur e au contact du solide, zone appelée « couche limite », où la diffusion domine les transferts thermiques.

Même si le transfert entre fluide et solide est complexe (conducto-convectif), le flux thermique est tout de même proportionnel à la différence de température ($T_p - T_F$).



prop : **relation de Newton à l'interface solide-fluide** :

$$j_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h \cdot (T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}}) \quad (11)$$

où h est le **coefficient de transfert conducto-convectif** en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

ODG :

interface	solide/gaz (convection naturelle)	solide/gaz (convection forcée)	solide/liquide (convection naturelle)	solide/liquide (convection forcée)
h ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$)	5 - 30	10 - 300	50-1000	300 - 10000

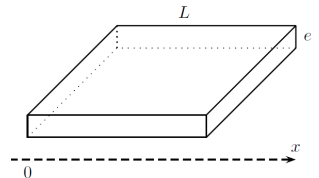
6.2 Résistance thermique d'une interface solide-fluide

prop : $R_{\text{th}} = \frac{1}{hS}$. démo : Relation de Newton $j = h(T_1 - T_2)$, donc $\phi = hS(T_1 - T_2)$.

rq : on peut donc prendre en compte aussi les interfaces solide/fluides dans les exercices de résistance thermique.

6.3 Application à un système de refroidissement

Afin de refroidir un microprocesseur, on utilise un radiateur à ailettes. Chacune des ailettes est un parallélépipède d'épaisseur e , largeur ℓ et longueur L , dont le métal a une conductivité thermique λ . Le microprocesseur se situe à l'abscisse $x = 0$ et doit être maintenu à la température T_M .



L'air, grâce à la convection, est supposé à la température constante T_A . La densité de flux thermique de l'aillette à la température $T(x)$ vers l'air est régi par : $\varphi = h(T(x) - T_A)$.

- Effectuer un bilan en régime permanent sur une tranche d'épaisseur dx pour démontrer l'équation différentielle $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T(x) - T_A) = 0$. Donner l'expression de δ et son unité.
- Donner la solution générale pour $T(x)$.
- Dans l'hypothèse $L \gg \delta$ de sorte qu'on puisse considérer l'aillette comme infinie et imposer $T(x \rightarrow +\infty) = T_A$, déterminer $T(x)$.
- Proposer deux méthodes pour déterminer la puissance thermique évacuée par cette ailette.

7 Rayonnement thermique

Les lois de Wien et Stefan doivent être fournies par un énoncé. Elles ne sont pas à connaître par cœur mais il faut savoir les exploiter.

Historiquement, ce sont des lois phénoménologiques, mais la quantification des échanges d'énergie introduite par Planck en 1900 permet de les démontrer.

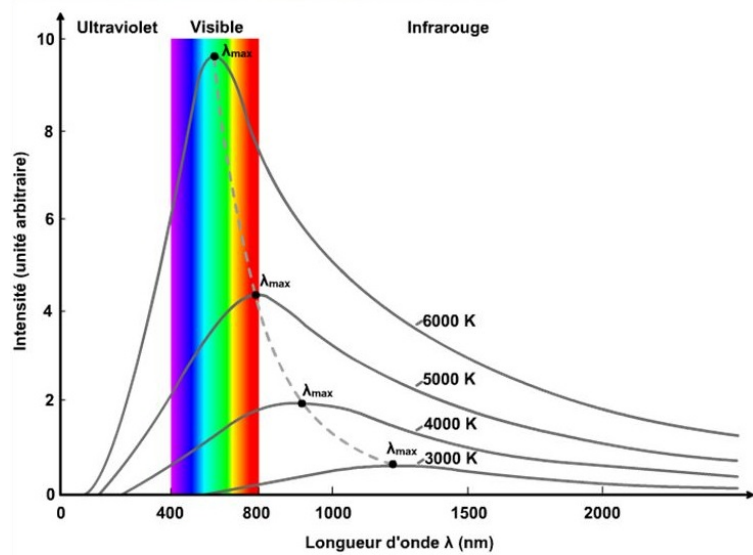


FIGURE 5 – Spectre de rayonnement thermique pour différentes températures.

modèle du corps noir : **Un corps noir absorbe TOUT le rayonnement incident** (donc ni réflexion, ni diffusion). À l'équilibre thermique, il émet un rayonnement ne dépendant que de sa température T . En réalité, aucun corps n'est exactement un corps noir, mais ce modèle donne en pratique une bonne idée du rayonnement thermique par un corps quelconque.

Une des limites du modèle du corps noir est que la plupart des corps réfléchit une partie de la lumière incidente.
def : L'**albédo** (ou albedo) α d'un corps est le rapport entre la puissance réfléchie par celui-ci et la puissance incidente.
prop : Un corps noir a $\alpha = 0$, un miroir parfait a $\alpha = 1$.
ODG :

matériau	corps noir	asphalte	herbe	nuage	neige fraîche	miroir parfait
albédo	0	0,04 - 0,12	0,25	0,50 - 0,80	0,75 à 0,90	1

7.1 Propriétés du rayonnement thermique du corps noir

prop : **À une longueur d'onde donnée, l'intensité émise augmente avec T .**
prop : **Loi de Wien** : le maximum λ_m de rayonnement à température T est donné par $\lambda_m \cdot T = 2898 \text{ }\mu\text{m.K}$. Donc λ_m diminue quand T augmente.
ex : Un corps humain (environ 310 K) émet surtout dans l'infrarouge (donc invisible à l'œil). Un solide chauffé à 1000 K commence à émettre du rouge en quantité notable (donc nous apparaît rougeoyant). Une étoile à 5000 K émet beaucoup de visible, donc apparaît blanche.

prop : Le flux surfacique $\varphi(T)$ émis (donc en W.m^{-2}) au niveau de sa surface par un corps noir à température T est donné par la **loi de Stefan** $\varphi(T) = \sigma \cdot T^4$ avec la constante de Stefan $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$.

7.2 Application 1 : température terrestre sans atmosphère, influence de l'albédo

On assimile le Soleil et la Terre à deux corps noirs. On note T_S la température de surface du Soleil, R_S son rayon, R_T le rayon de la Terre et d la distance Terre-Soleil. Objectif : déterminer la température de surface T_T de la Terre en l'absence d'atmosphère.¹¹
Données : $T_S = 5,8 \cdot 10^3 \text{ K}$, $R_S = 6,97 \cdot 10^5 \text{ km}$, $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$, $d = 1,44 \cdot 10^8 \text{ km}$.

1. Exprimer le flux total émis par le Soleil en fonction de sa température.

2. Exprimer la portion de ce flux reçue par la Terre.

3. Écrire une relation traduisant l'équilibre thermique de la Terre et en déduire sa température de surface.

11. CE : Exploiter les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan.

4. Que vaut la température de surface si on prend en compte un albédo moyen de 0,3 ?

rq : On trouve une température légèrement inférieure à la température moyenne terrestre. On a négligé l'effet de serre de l'atmosphère.

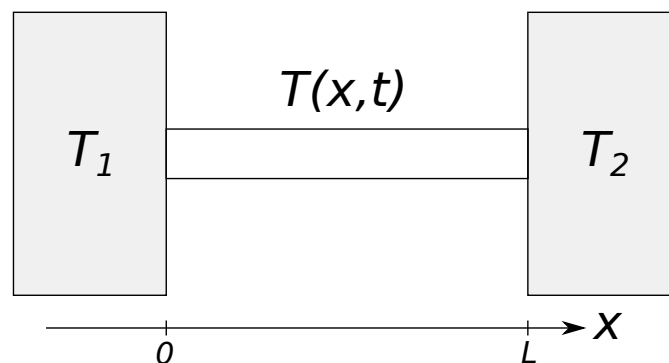
7.3 Application 2 : influence de l'effet de serre

On reprend le modèle précédent en considérant l'atmosphère qu'on supposera transparente dans le domaine du visible/UV (rayonnement solaire) et absorbante dans le domaine des infrarouges (rayonnement terrestre). On notera φ_a le flux surfacique émis par chaque face de l'atmosphère, φ_S celui émis par le Soleil au niveau de la Terre, et φ_T pour la Terre.¹²

1. Écrire une relation traduisant l'équilibre thermique de la Terre, et une pour l'atmosphère.
2. En déduire une relation entre les flux totaux ϕ_T et ϕ_S .
3. En déduire la température de surface de la Terre.

8 Résolution numérique de l'équation de diffusion

8.1 Position du problème



Considérons une barre métallique de longueur L dont une des extrémités ($x = 0$) est reliée à une source de chaleur de température T_1 constante et l'autre ($x = L$) à une source de chaleur de température T_2 constante avec $T_1 < T_2$. La barre est initialement à la température T_1 et on néglige les pertes sur les côtés de la barre. On note $T(x, t)$ la température de la barre au point d'abscisse x au temps t . Le but de l'exercice est de déterminer l'évolution temporelle du profil de température dans la barre¹³.

Données : coefficient de diffusion thermique $D = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $L = 1 \text{ m}$, $T_1 = 20^\circ\text{C}$ et $T_2 = 200^\circ\text{C}$. L'évolution de $T(x, t)$ est régie par l'équation de diffusion dite « équation de la chaleur », une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

8.2 Résolution par méthode des différences finies

def : la **méthode des différences finies** est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

On découpe donc l'espace en $N + 1$ points ($\{x_0, x_1, \text{etc}\}$) séparés par un pas de discrétisation $dx = x_{k+1} - x_k$. On cherche alors à obtenir à chaque instant t_i une liste représentant le profil spatial de température : $[T(x_0, t_i), T(x_1, t_i), \dots, T(x_N, t_i)]$ avec les extrémités constantes $T(x_0, t_i) = T_1$ et $T(x_N, t_i) = T_2$.

12. CE : Analyser quantitativement l'effet de serre en s'appuyant sur un bilan énergétique dans le cadre d'un modèle à une couche.

13. CE numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.

La dérivée partielle d'ordre 1 en temps est approchée comme dans la méthode d'Euler explicite. Mais la dérivée partielle d'ordre 2 en position suit le schéma suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \simeq \frac{T(x, t + dt) - T(x, t)}{dt} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T(x + dx, t) + T(x - dx, t) - 2T(x, t)}{(dx)^2}$$

méthode numérique : Résoudre l'équation de la diffusion à une dimension par une méthode des différences finies :

- Choisir un pas de temps dt et un pas d'espace dx ,
- Initialiser la liste du profil spatial avec les valeurs initiales,
- Pour chaque pas de temps :
 - ★ pour chaque point, calculer la nouvelle valeur à l'aide des valeurs voisines.
 - ★ stocker le nouveau profil spatial.

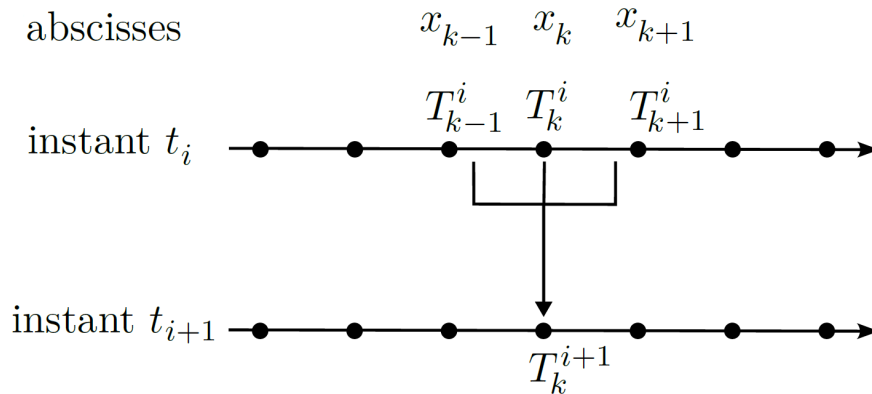


FIGURE 6 – Pour déterminer la température T_k^{i+1} en x_k à l'instant t_{i+1} , il faut connaître les températures à l'instant précédent t_i en x_k et en ses voisins x_{k-1} et x_{k+1} .

exo :

1. Tracer l'allure qualitative du profil de température $T(x, t)$ à différents instants.
2. Détermination de la relation de récurrence temporelle. La résolution numérique par méthode d'Euler explicite nécessite une relation qui détermine le profil à $t + dt$ à partir du profil à t .
 - (a) À l'aide d'un développement limité au premier ordre en dt , exprimer $\frac{\partial T}{\partial t}(x, t)$ en fonction de $T(x, t + dt)$, $T(x, t)$ et dt .
 - (b) À l'aide de développements limités au deuxième ordre en dx , exprimer $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$ en fonction de $T(x + dx, t)$, $T(x, t)$, $T(x - dx, t)$ et dx .
 - (c) Appliquer les approximations précédentes à l'équation de la chaleur pour obtenir la relation suivante :

$$T(x, t + dt) \simeq T(x, t) + \left(\frac{dt \cdot D}{(dx)^2} \right) \cdot (T(x + dx, t) + T(x - dx, t) - 2T(x, t))$$

Remarquer que la température à un endroit x donné à un instant $t + dt$ donné dépend des températures précédentes (à t) en x mais aussi juste à côté en $x \pm dx$.

- (d) Dédire de la relation précédente, illustrée figure 6, deux subtilités à prendre en compte dans le code. Une concernant la température sur les bords, une concernant la nécessité d'une nouvelle liste temporaire.
3. Résolution. Appliquer la relation précédente pour résoudre le problème et afficher la courbe du profil de température le long de la barre toutes les 10 minutes sur une période de 4 heures. Pour cela, discrétiser le problème en prenant un pas de temps de 1 seconde, et 101 points sur la barre. Le code à compléter est donné ci-dessous.
 - (a) Discrétisation spatiale. Compléter les lignes définissant le pas spatial dx et la liste `L_x` des positions.
 - (b) Relation de récurrence. Compléter la ligne utilisant la relation de récurrence pour compléter la liste `L_T_temp` par la méthode `append`.
 - (c) Tracer les graphes. Compléter la ligne permettant le tracé du graphe toutes les 10 minutes, en utilisant une condition astucieuse sur la variable d'itération `i`.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 # Donnees du problemes
4 D = 1e-5
5 L = 1
6 T1 = 20
7 T2 = 200
8
9 # Discretisation spatiale
10 n_x = 101                                # Nb de points de la barre
11 dx = .....                               # Pas spatial
12 L_x = .....                             # Liste des positions de la barre.
13
14 # Discretisation temporelle
15 dt = 1                                    # L'enonce impose un pas temporel de 1 s.
16 n_t = 4*3600                             # Nb d'instants (4h=4*3600s)
17 t = 0                                    # Temps initial
18
19 # Initialisations de liste de temperature
20 L_T = [T1]*n_x                           # Initialement, barre a T1 ...
21 L_T[-1] = T2                             # ... sauf un bout a T2
22
23 # Coefficient pratique
24 c = D*dt/(dx**2)
25
26 # Resolution
27 plt.figure()
28 plt.plot(L_x,L_T)                       # Tracer T(x) initial.
29 for i in range(n_t):                   # Pour chaque instant :
30     L_T_temp = [T1]                   # T(x) temporaire pour ce t initialisee a T1 a gauche,
31     for k in range(1,n_x-1):          # Pour chaque position suivante, sauf au bout :
32         L_T_temp.append(.....)        # Equation de la chaleur
33     L_T_temp.append(T2)               # Extremite a T2
34     L_T[:] = L_T_temp[:]              # Copie complete dans la liste L_T
35     if (.....):                      # Toutes les 10 minutes = 600 s...
36         plt.plot(L_x,L_T)            # ... tracer T(x)
37 plt.xlabel('Position x (m)'); plt.ylabel('temperature T (degre C)')
38 plt.title('Propagation de la chaleur')
39 plt.show()

```

8.3 Résultats

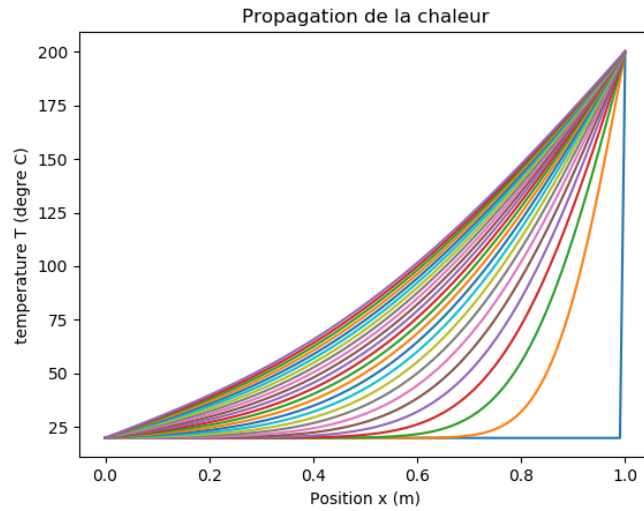


FIGURE 7 – Profil de température $T(x)$ dans la barre à différents instants : de $t = 0$ en bas à droite, puis les courbes de plus en plus proches de la diagonale. La discontinuité de température initialement très marquée tend à se lisser au cours du temps sous l'effet de la diffusion thermique. Aux temps longs, on retombe sur un profil affine comme déjà démontré.

8.4 Choix des pas de temps et d'espace

★ Pour une bonne précision, il faut choisir des pas d'espace et de temps suffisamment petits : $dx \ll L$ et $dt \ll L^2/D$ (durée caractéristique de diffusion sur la longueur totale la barre).

★ Mais il faut aussi satisfaire une condition plus contraignante. Le pas de temps doit aussi être suffisamment ¹⁴ petit devant le temps caractéristique de diffusion sur le pas dx : $dt < \frac{dx^2}{2D}$.

8.5 Variante du code

★ Utiliser les tableaux `numpy` plutôt que les listes de `Python` peut simplifier l'écriture et accélérer certaines parties du code.

★ On peut aussi représenter le problème sous forme matricielle (cf *CCINP 2015*).

★ Adapter le code pour une diffusion en 2D ne pose pas de problème particulier, il suffit de remarquer qu'un point en (x_k, y_k) a désormais quatre voisins si le maillage est rectangulaire (cf *CCINP 2017* pour l'équation de Poisson).

14. Le facteur $1/2$ n'est pas exigible et provient d'une étude de la stabilité du schéma numérique.

9 Analogie entre phénomènes de diffusion/conduction

Les différents phénomènes de diffusion/conduction présentent de fortes analogies :

- ★ diffusion de particules (chapitre *T2*),
- ★ diffusion thermique (chapitre *T3*),
- ★ conduction électrique (chapitres *Électromagnétisme*),
- ★ viscosité (chapitres *Mécanique des Fluides*),
- ★ mécanique quantique (chapitre *Mécanique Quantique*).

diffusion de particules	diffusion thermique	conduction électrique
densité de courant de particules $\vec{j}_N$ en $\text{s}^{-1}.\text{m}^{-2}$	densité de flux thermique $\vec{j}_Q$ en $\text{J}.\text{s}^{-1}.\text{m}^{-2} = \text{W}.\text{m}^{-2}$	densité de courant de charges $\vec{j}$ en $\text{C}.\text{s}^{-1}.\text{m}^{-2} = \text{A}.\text{m}^{-2}$
flux de particules $\phi_N = \vec{j}_N \cdot \vec{S}$ en s^{-1}	flux thermique $\phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{S}$ en $\text{J}.\text{s}^{-1} = \text{W}$	intensité électrique $I = \vec{j} \cdot \vec{S}$ en $\text{C}.\text{s}^{-1} = \text{A}$
particules N	température T en K	potentiel électrique V en V
loi de Fick $\vec{j}_N = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(n)$	loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)$	loi d'Ohm locale + électrostatique $\vec{j} = -\gamma \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(V)$
coefficient de diffusion D en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$	conductivité thermique λ en $\text{W}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	conductivité électrique γ en $\text{A}.\text{m}^{-1}.\text{V}^{-1} = \Omega^{-1}.\text{m}^{-1} = \text{S}.\text{m}^{-1}$
conservation de N $\text{div}(\vec{j}_N) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$	conservation de H $\text{div}(\vec{j}_Q) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$	conservation de Q $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Concernant la notion de résistance en régime stationnaire :

diffusion thermique	conduction électrique
flux thermique $\phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{S}$ en $\text{J}.\text{s}^{-1} = \text{W}$	intensité électrique $I = \vec{j} \cdot \vec{S}$ en $\text{C}.\text{s}^{-1} = \text{A}$
différence de température $T_1 - T_2$ en K	différence de potentiel $V_1 - V_2$ en V
résistance thermique $R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{L}{\lambda S}$ en $\text{K}.\text{W}^{-1}$	résistance électrique $R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{L}{\gamma S}$ en $\text{V}.\text{A}^{-1} = \Omega$