

## Révisions de PCSI : optique

Données : Relations de conjugaison des lentilles minces :

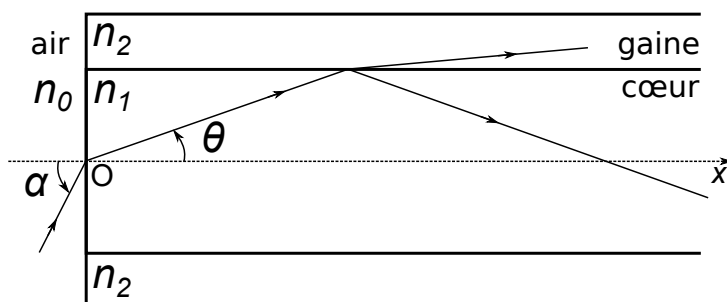
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}, \quad \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2, \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}}$$

### 1 Proche du cours

#### 1.1 Problème : Propagation dans une fibre optique

Appliquer les lois de Descartes. Établir la condition de réflexion totale.

Une fibre optique cylindrique d'axe ( $Ox$ ) est constituée d'un cœur transparent d'indice de réfraction  $n_1$  entouré d'une gaine transparente d'indice de réfraction  $n_2$  inférieur à  $n_1$ . L'information est propagée dans la fibre par les rayons qui restent confinés dans le cœur. Un rayon qui passe du cœur à la gaine est donc considéré comme perdu. L'objectif de l'exercice est de déterminer la condition en entrée de fibre pour une transmission d'information à longue distance.



Pour alléger les écritures, on s'autorise ici à appliquer les lois de Snell-Descartes pour des angles non orientés, donc toujours positifs.

[Conseil : avancer le plus possible le calcul littéral avant d'introduire des fonctions trigonométriques réciproques. L'expression du résultat sera ainsi moins difficile à simplifier.]

1. On considère un rayon dans le cœur faisant un angle  $\theta$  avec l'axe ( $Ox$ ). Montrer qu'il restera dans le cœur si cet angle  $\theta$  est inférieur à un angle  $\theta_0$  qu'on exprimera en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .
2. La face d'entrée est plane et normale à l'axe ( $Ox$ ). Soit  $\alpha$  l'angle que fait dans l'air (indice  $n_0$ ) le rayon lumineux incident avec ( $Ox$ ). Déterminer en fonction de  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_0$  l'angle d'incidence  $\alpha_0$  correspondant à l'angle réfracté  $\theta_0$  dans la fibre.
3. Application numérique : pour  $n_0 = 1,00$ ,  $n_1 = 1,50$  et  $n_2/n_1 = 0,99$ , calculer  $\alpha_0$  et  $\theta_0$ .
4. Calculer  $\alpha_0$  pour une fibre d'indices  $n_1 = 1,456$  (silice) et  $n_2 = 1,410$  (silicone). Permet-elle de collecter plus de lumière incidente ?
5. Même question dans le cas d'une fibre à base d'arséniure de gallium pour laquelle  $n_1 = 3,9$  et  $n_2 = 3,0$  ? Commentaires. [Vu le résultat trouvé, il est nécessaire de le commenter même si l'énoncé ne le demande pas.]

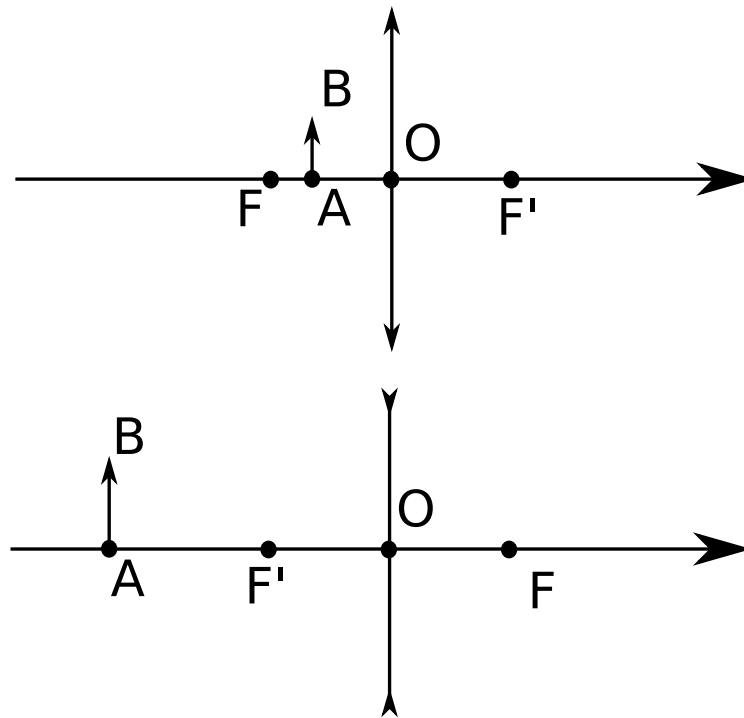
Une impulsion lumineuse arrive à  $t = 0$ , au point O sur la fibre précédente de longueur  $L$ , sous la forme d'un faisceau conique convergent d'axe  $Ox$  et de demi-angle au sommet  $\alpha_i < \alpha_{\max}$ .

6. Quel rayon sortira en premier de la fibre ? Déterminer la durée  $\tau_{\min}$  qu'il met à parcourir la fibre.
7. Quel rayon sortira en dernier ? Déterminer la durée  $\tau_{\max}$  qu'il met à parcourir la fibre en fonction de  $L$ ,  $n_1$ ,  $c$  et  $\alpha_i$ .
8. Calculer l'élargissement temporel  $\Delta t$  de cette impulsion à la sortie de la fibre, avec  $L = 10$  m et  $\alpha_i = 8^\circ$ .

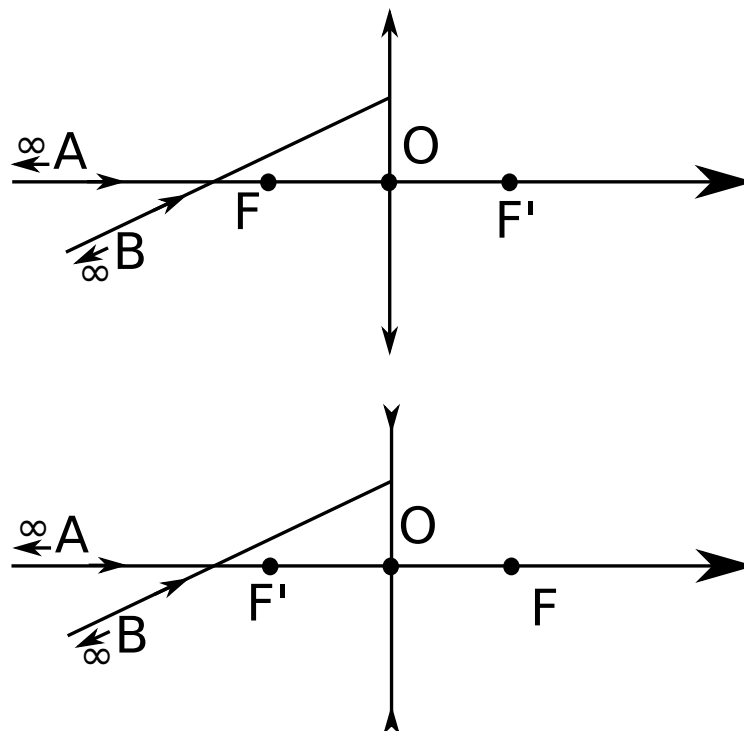
#### 1.2 Détermination graphique de la position d'image par une lentille

Tracé de rayons.

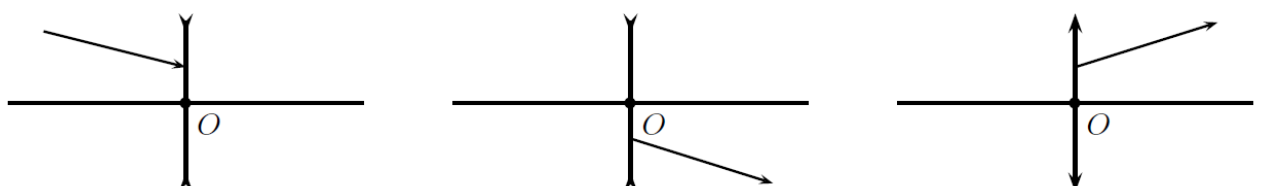
Pour chacune des deux configurations suivantes, déterminer graphiquement la position de de l'image de l'objet AB. Sans calcul, préciser dans chaque cas le signe du grandissement  $\gamma$  ; et la comparaison de  $|\gamma|$  à 1.



Pour chacune des deux configurations suivantes, déterminer graphiquement la position de de l'image de l'objet AB situé à l'infini.



Compléter la marche des rayons lumineux incidents ou émergents des lentilles de la figure 7.



### 1.3 Condition de projection sur un écran

Établir et connaître la condition  $D \geq 4f'$  pour former l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.

On souhaite projeter une image réelle d'un objet réel sur un écran à l'aide d'une lentille convergente de distance focale  $f'$ .

1. L'objet et l'écran sont distants de  $D$ . On appelle  $x$  la distance qui sépare l'objet de la lentille. Écrire une relation de conjugaison et en déduire que pour que l'image existe, il faut que  $f'$  soit plus petite que  $D/4$ .
2. Montrer qu'on peut alors choisir deux positions différentes de la lentille.
3. On aimerait produire une image agrandie de l'objet. Laquelle des deux positions choisir ?

### 1.4 Savoir-faire en labo d'optique

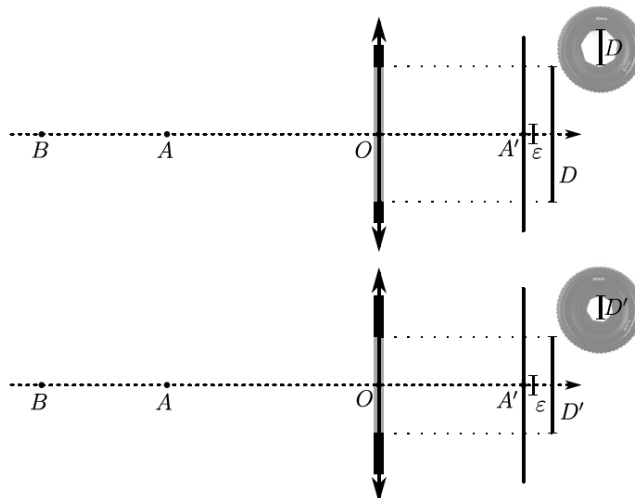
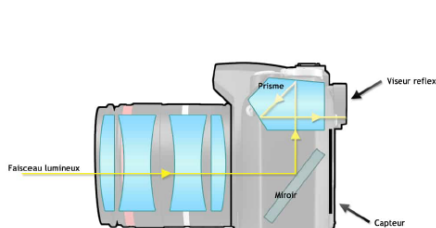
Exercice en lien avec les TP.

1. Un collègue vous prête une lentille dont les bords sont plus fins que le centre. Est-ce une lentille divergente ou convergente ?
2. Les lunettes de votre collègue présentent des bords plus épais que le centre, est-il myope ou hypermétrope ?
3. Vous souhaitez beaucoup focaliser un faisceau incident approximativement parallèle. Faut-il une lentille divergente ou convergente ? De petite ou grande distance focale ? Où placer un écran pour observer l'image ?
4. Vous souhaitez faire une image agrandie d'un petit objet sur un écran éloigné (mais peu importe le sens de l'image). Quel est l'ordre de grandeur de la distance focale à utiliser ? Où placer la lentille ?
5. Vous souhaitez estimer rapidement l'ordre de grandeur de la distance focale d'une lentille convergente. Vous avez à votre disposition un exemplaire papier de *Les suppliantes et Les sept contre Thèbes* (ESCHYLE). Comment procéder ?

### 1.5 Profondeur de champ d'un appareil photographique

Étudier l'influence du diaphragme sur la formation de l'image d'un appareil photographique. Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné d'un appareil photographique

On modélise un appareil photo par une lentille mince et un capteur CCD sur lequel la photographie se forme. En réalité l'appareil est composé de différentes lentilles et bagues qui permettent de modifier la position du point focal image effectif. L'ouverture angulaire de la lentille est limitée par un diaphragme dont le diamètre  $D$  peut être modifié par l'utilisateur. Le capteur CCD est composé de cellules carrées de longueur  $\varepsilon$ .



1. Sur les figures ci-dessus la photographie a fait sa mise au point sur un objet A sur l'axe optique. Le point A' représente l'image de A par la lentille. Déterminer graphiquement la position du point focal objet F et image F' de la lentille.
2. On s'intéresse maintenant à la profondeur de champ, c'est à dire la plage de netteté autour du point A. Représenter graphiquement la zone éclairée à la surface du capteur par les rayons issus de B pour les deux configuration. On remarquera en particulier que les bords de cette zone correspondent au point passant par les bords du diaphragme.
3. Proposer un critère sur la taille de la zone éclairée par les rayons issus de B par rapport à  $\varepsilon$  pour que l'image de B soit nette pour le capteur.
4. Comparer la profondeur de champ dans les deux configurations. Conclure.

## 1.6 Problème : Focométrie d'un objectif d'appareil photo

*Étude d'un instrument d'optique à une lentille.*



FIGURE 1 – Objectif TAMRON 70-200f/2.8 monté sur un Nikon D200.

La *focométrie* est la mesure de distances focales de lentilles. Cet exercice s'intéresse à l'objectif TAMRON 70-200f/2.8 assimilé à une lentille mince convergente notée  $L$ . On note  $O$  son centre,  $f'$  sa distance focale,  $AB$  un objet perpendiculaire à l'axe optique,  $A'B'$  son image par  $L$ , les points  $A$  et  $A'$  étant sur l'axe optique.

1. Méthode des points conjugués. On place un objet  $AB$  réel à 35 cm devant la lentille  $L$ , l'image  $A'B'$  réelle de cet objet se forme sur un écran situé à 46,5 cm après la lentille.
  - (a) Dédurre de cette observation que  $f'$  est inférieure à 35 cm.
  - (b) Effectuer un schéma du dispositif avec tracé des rayons lumineux de construction (ce schéma n'est pas à l'échelle car on ne connaît pas encore  $f'$ ).
  - (c) À l'aide d'une formule de conjugaison, exprimer  $f'$  en fonction de  $\overline{OA}$  et  $\overline{OA'}$  puis effectuer l'application numérique.
2. Méthode de Bessel. On fixe la distance  $D$  entre un objet  $AB$  et l'écran. On déplace  $L$  entre l'objet  $AB$  et l'écran pour former l'image  $A'B'$  de  $AB$  sur l'écran. On note  $p = \overline{OA}$ .
  - (a) Montrer qu'il existe une valeur minimale  $D_{\min}$  de  $D$  pour réussir à former une image. Donner l'expression de  $D_{\min}$  en fonction de  $f'$  ?
  - (b) Dans ce cas, établir qu'il existe deux positions distinctes repérées par  $p_1$  et  $p_2$  (avec  $p_1 < p_2$ ) permettant d'obtenir une image sur l'écran. On exprimera  $p_1$  et  $p_2$  en fonction de  $D$  et  $f'$ .
  - (c) Soit  $d = p_2 - p_1$  la distance entre les deux positions possibles de la lentille pour obtenir une image. Exprimer la distance focale en fonction de  $D$  et  $d$ .
  - (d) On mesure  $D = 90 \pm 1$  cm et  $d = 30 \pm 1$  cm. En déduire  $f'$  sans calculer son incertitude.
3. La distance focale de l'objectif TAMRON 70-200f/2.8 peut être ajustée de 70 à 200 mm. La figure 2 comprend une image prise avec  $f' = 70$  mm, l'autre avec  $f' = 200$  mm. Expliquer à l'aide d'un schéma simple quelle image correspond à quelle focale.



FIGURE 2 – Deux photographies prises du même endroit par un TAMRON 70-200f/2.8 pour deux réglages différents de distance focale.

## 1.7 Problème : Étude d'un microscope

*Étude d'un instrument d'optique à deux lentilles.*

Le but d'un microscope est de produire, à partir d'un petit objet à distance finie, une image à l'infini pour observation par un œil normal au repos.

La version la plus simple d'un microscope est constituée de deux lentilles convergentes. La première, l'objectif, produit une image intermédiaire agrandie de l'objet. À partir de cette image intermédiaire, la seconde lentille, l'oculaire, produit une image finale à l'infini observable par un œil au repos.

### 1.7.1 L'objectif

L'objectif est réalisé par une lentille  $L_1$  placée en  $O_1$  de distance focale  $f'_1 = \overline{O_1F'_1} = 1,0$  cm. On notera AB l'objet plan transverse observé avec A sur l'axe,  $\overline{O_1A} = -1,5$  cm,  $\overline{AB} = a = 0,50$  cm.

1. En respectant l'échelle, construire graphiquement l'image  $\overline{A_1B_1}$  de AB à travers  $L_1$ . Prévoir de laisser un peu de place à droite pour y ajouter ensuite une deuxième lentille. L'image est-elle agrandie ou rétrécie ? Réelle ou virtuelle ? De même sens ou renversée ?
2. Vérifier par le calcul la position de  $A_1$ .
3. Exprimer le grandissement  $\gamma_1$  de l'objectif en fonction de  $f'_1$  et  $\overline{O_1A}$ . Puis application numérique. Déduire de cette valeur si l'image est agrandie/rétrécie, réelle/virtuelle, de même sens/renversée.

### 1.7.2 L'oculaire

4. Où faut-il placer l'oculaire  $L_2$  pour qu'un œil normal au repos puisse observer l'image  $\overline{A'B'}$  de  $\overline{A_1B_1}$  par  $L_2$  sans accommoder ?
5. On place  $L_2$  à cet endroit. On donne  $f'_2 = 4,0$  cm. Déterminer graphiquement où se trouve l'image  $\overline{A'B'}$ .
6. On note  $\alpha'$  l'angle sous lequel on voit  $\overline{A'B'}$ . On se place dans les conditions de Gauss où les angles sont suffisamment petits pour utiliser les approximations suivantes :  $\sin(x) \simeq x$  et  $\tan(x) \simeq x$ . Exprimer  $\alpha'$  en fonction de  $\gamma_1$ ,  $a$  et  $f'_2$ . Application numérique.

### 1.7.3 Efficacité du microscope

7. Pour un œil normal, le punctum proximum  $d_{PP} \simeq 25$  cm correspond à la distance minimale objet-œil où on peut encore accommoder. L'angle maximal sous lequel on voit l'objet AB à l'œil nu est noté  $\alpha$ . Donner son expression en fonction des données. Application numérique.
8. On appelle « grossissement commercial » du microscope la quantité  $G = \alpha'/\alpha$ . L'exprimer en fonction de  $\gamma_1$ ,  $d_{PP}$  et  $f'_2$ . Calculer sa valeur.

## 2 Plus difficile

### 2.1 Lentille plate de Veselago (\*\*)

En 1968, le physicien russe VICTOR VESELAGO a conduit des études théoriques dans le cadre d'une optique de DESCARTES où les milieux pourraient être d'indice négatif. Il a montré qu'avec de tels milieux, il était possible de réaliser une lentille convergente parfaitement plate. En 2000, le premier matériau possédant un indice négatif a été créé, on parle de *métamatériau*. Ce matériau est un diélectrique classique (verre de silice) dans lequel on a inséré des fils conducteurs selon une structure périodique, voir la photographie de la figure 3. Ce matériau s'est montré efficace pour des longueurs d'onde  $\lambda \simeq 1$  cm. Son indice de réfraction a été mesuré à  $n = -2,7$ . À l'heure actuelle, aucun métamatériau n'a été réalisé pour le domaine visible  $\lambda \simeq 0,5 \mu\text{m}$ . Seul un matériau d'indice  $n = -0,3$  a été obtenu pour  $\lambda \simeq 2 \mu\text{m}$ .

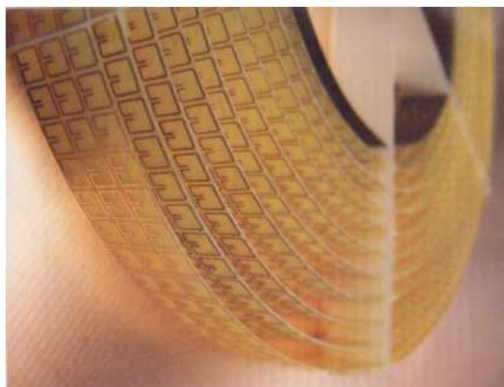


FIGURE 3 – Métamatériau

On considère le schéma de la figure 4 où un objet  $AB$  est placé à la distance  $d$  d'une lame à face parallèles d'épaisseur  $e$ , d'indice  $n < 0$  avec  $|n| > 1$ . La lame de métamatériau possède une hauteur très grande devant son épaisseur. On considère un rayon lumineux qui aborde ce milieu depuis  $A$  sous l'angle d'incidence  $i_1$ .

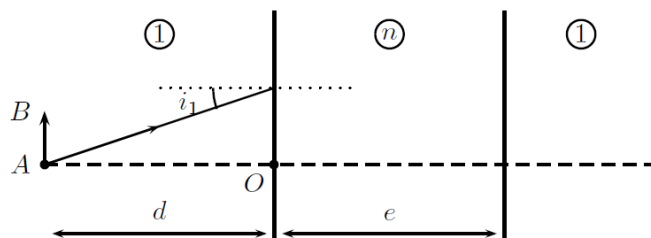


FIGURE 4 – Lentille plate de VESELAGO

1. La loi de la réfraction étant de DESCARTES étant toujours valable, quelle est la particularité du rayon réfracté par le dioptré plan  $\mathcal{P}_{1,n}$  lorsque le milieu est d'indice négatif ?
2. On suppose que l'image  $A'$  de  $A$  par le dioptré plan  $\mathcal{P}_{1,n}$  est située dans le milieu d'indice  $n < 0$ . Déterminer la distance  $OA'$  en fonction de  $d$ ,  $n$  et  $i_1$ . En déduire que le dioptré plan  $\mathcal{P}_{1,n}$  n'est pas stigmatique.
3. Montrer qu'en se plaçant dans les conditions le GAUSS, le stigmatisme est assuré. Que vaut alors la distance  $OA'$  ? Où se situe l'image  $B'$  de  $B$  ? Quelle propriété présente donc le dioptré plan  $\mathcal{P}_{1,n}$  ?

Dans la suite, on se place dans les conditions de GAUSS.

4. À quelle condition sur l'épaisseur  $e$  de la lentille de VESELAGO, l'image  $A'B'$  se situe-t-elle dans le métamatériau ? On suppose pour la suite que cette condition est aussi réalisée aussi pour un objet  $A_1B_1$  situé à la distance  $d_1 > d$  en arrière de  $AB$  par conséquent. Où se situe l'image de  $A_1B_1$  par rapport à  $A'B'$  ? On considère maintenant un objet constitué par  $A_1B_1AB$ . Que peut-on dire de son image dans le métamatériau ?
5. Pour une épaisseur  $e$  respectant la condition vue à la question précédente, déterminer la position de l'image définitive  $A''B''$  de  $AB$  par la lentille de VESELAGO. A-t-on bien réalisé l'équivalent d'une lentille convergente traditionnelle ?

## 2.2 Lentille plate de Fresnel (\*\*)

Pour le moment, on ne considère qu'un prisme ( $\Delta$ ) en verre d'indice  $n$  et d'angle au sommet  $A$ , plongé dans l'air d'indice unité. Un rayon arrive avec un angle d'incidence  $i$  sur le dioptré d'entrée puis traverse le prisme (voir figure 5 où les angles d'incidence, de réfraction et  $A$  sont orientés dans le sens trigonométrique). La déviation globale absolue du rayon par le prisme, qui se fait vers sa base, est notée  $D$ .

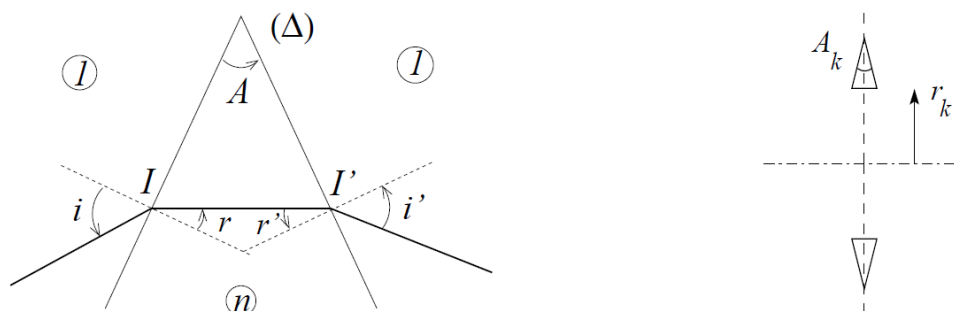


FIGURE 5 – Prismes

1. Obtenir l'expression de  $A$  en fonction de  $r$  et  $r'$  et démontrer que  $D = i + i' - A$ .
2. Le prisme possède un angle au sommet  $A \ll 1$  et est utilisé sous incidence quasi-normale ( $i \ll 1$ ). Déterminer la déviation  $D$  approchée en fonction de  $n$  et  $A$ .
3. Des petits prismes du type précédent sont répartis, dans un même plan, de part et d'autre de l'axe  $Ox$  (sur la figure 5, seuls deux prismes sont représentés mais il y en a aussi d'autres sur la ligne en pointillés). Les prismes sont régulièrement espacés, le  $k^e$  étant à la distance  $r_k$  de l'axe. Ils sont orientés de façon à rabattre vers l'axe un faisceau parallèle. On désigne par  $A_k$  l'angle au sommet du  $k^e$  prisme et  $A_k \ll 1$ .
4. Que doit valoir  $A_k$  pour qu'un faisceau parallèle à  $Ox$  vienne converger en un même point  $F'$  défini par  $\overline{OF'} = f'$  ?
5. Que se passerait-il alors pour un faisceau issu d'un point  $P$  de l'axe défini par  $\overline{OP} = x$  et pas trop près des prismes ?

## 2.3 Nombre d'images entre deux miroirs plans (\*\*)

Deux miroirs ( $M1$ ) et ( $M2$ ) forment entre eux un angle de  $\alpha = 20^\circ$ . Un objet est placé en  $O$ , sur la bissectrice formée par l'angle entre les deux miroirs. Combien d'images de  $O$  peuvent-elles être vues en tout (incluant le point  $O$  lui-même) ? On fait l'hypothèse que l'œil peut être placé entre les miroirs et peut observer les réflexions. Voir le schéma de la figure 6.

Proposition de réponses : a) 36    b) 18    c) 1    d) 9

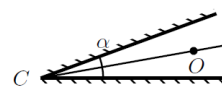


FIGURE 6 – Dièdre de deux miroirs

## 2.4 Lentilles successives (\*\*\*)

→ Demander aux meilleurs 5/2 pour savoir comment passer d'une relation de récurrence à une équation différentielle dans la limite  $a \ll f'$ .

On considère une succession de lentilles convergentes minces identiques de même axe optique  $Oz$ , de distance focale  $f' > 0$ , équidistantes de  $a$  avec  $a \ll f'$ . On se limite ici à des rayons se propageant dans un plan méridien (plan contenant l'axe  $Oz$ ) et on suppose valable l'approximation de GAUSS. Un rayon qui vient traverser la lentille de rang  $n$  est parfaitement déterminé par sa distance algébrique  $y_n$  à l'axe à la sortie de la lentille et par l'angle orienté  $\alpha_n$  qu'il fait avec  $Oz$ , voir le schéma de la figure 13.

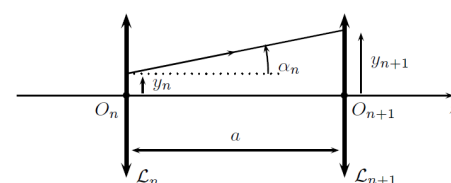


FIGURE 13 – Succession de lentilles identiques

1. Trouver une relation de récurrence pour la suite  $y_n$  faisant intervenir  $a$  et  $f'$ .
2. En déduire l'équation différentielle donnant accès à l'équation des rayons lumineux dans le système. La résoudre.
3. Quel peut être l'intérêt d'un tel dispositif ?