

Révisions de PCSI : optique - Correction

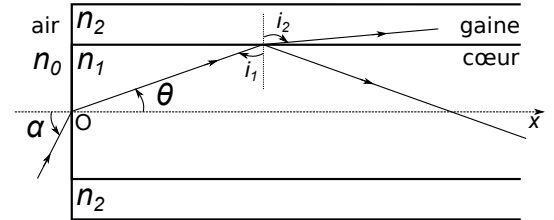
1 Proche du cours

1.1 Problème : Propagation dans une fibre optique

[★ **ERREUR LA PLUS FRÉQUENTE** : ne pas remarquer que θ n'est PAS l'angle d'incidence au niveau du dioptre cœur/gaine !

★ TOUS les angles impliqués dans l'application de la loi de Snell-Descartes DOIVENT ABSOLUMENT être définis, le plus simple étant par un schéma.]

[Il faut toujours citer le nom d'une loi avant de l'appliquer. De plus, il faut ici aussi citer le dioptre où on l'applique car il y en a plusieurs !]



- ★ Expression de l'angle limite i_L au dioptre gaine/cœur : Au dioptre gaine/cœur, la loi de Snell-Descartes donne : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$. On prendra dans la suite des angles non-orientés i_1 et i_2 positifs. Comme $n_2 < n_1$, il y a réflexion totale si $i_1 \geq i_L = \arcsin(n_2/n_1)$. [Pour s'en souvenir, penser que ça correspond à $i_2 \rightarrow \pi/2$.]

★ Relier i_L à θ_0 : Or, $\theta_0 + i_L = \pi/2$ d'après le triangle formé par la normale, le rayon, et l'axe.

★ Résolution si on connaît des formules sur les fonctions trigo réciproques :

$$\text{Donc } \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arccos\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

★ Résolution si on est astucieux : La condition de réflexion totale donne : $n_2/n_1 = \sin(i_L)$. Or, $\theta_0 + i_L = \pi/2$. Donc $n_2/n_1 = \sin(\pi/2 - \theta_0) = \cos(\theta_0)$, qui donne directement $\theta_0 = \arccos(n_2/n_1)$. [C'est plus simple si on introduit la fonction trigo réciproque au dernier moment !]

- D'après la loi de Snell Descartes à l'interface air/cœur :

$$\begin{aligned} n_0 \sin(\alpha_0) &= n_1 \sin(\theta_0) = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_L\right) \\ &= n_1 \cos i_L = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 i_L} = n_1 \sqrt{1 - n_2^2/n_1^2} \end{aligned}$$

Donc $\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}\right)$. [Ceux qui introduisent tôt les fonctions trigo réciproques restent parfois bloqués ici sur des formules immondes difficiles à simplifier.]

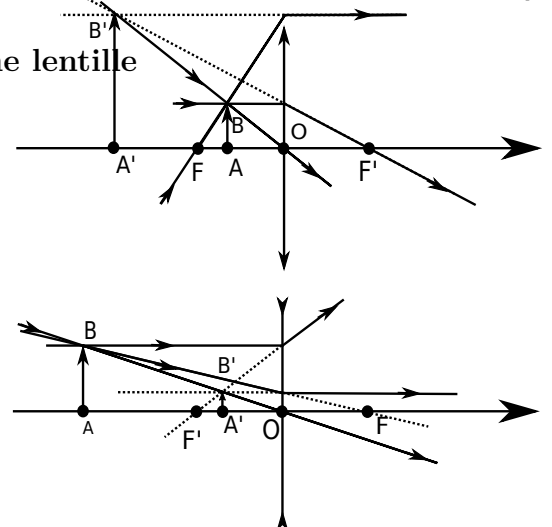
- [La valeur d'un angle peut se donner en radian, unité la plus pratique en trigo. Pas besoin de perdre du temps à la convertir en degrés.] $\alpha_0 = 0,21 \text{ rad}$ ($= 12^\circ$). $\theta_0 = 0,14 \text{ rad}$ ($= 8^\circ$). Remarquons que la propagation dans la fibre n'a lieu que pour de faibles incidences, on récolte peu de lumière.
- $\alpha_0 = 0,372 \text{ rad}$ ($= 21,3^\circ$). α_0 est plus grand pour cette fibre, elle récolte donc beaucoup plus de lumière que la précédente.
- Cette fois, $\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2,5 > 1$, donc l'équation n'a pas de solution pour α_0 . On en conclut qu'il n'existe pas d'angle d'incidence α tel qu'on atteigne la limite de propagation. Ainsi, cette fibre collecte et propage toute la lumière incidente ! [Mais ces matériaux sont beaucoup plus chers, et aussi plus difficile à traiter et conserver.]

1.2 Détermination graphique de la position d'image par une lentille

Cas 1 : image de même sens donc $\gamma > 0$. Image agrandie donc $|\gamma| > 1$.

Cas 2 : image de même sens donc $\gamma > 0$. Image rétrécie donc $|\gamma| < 1$.

[Deux indices permettent de remarquer que le cas 2 concerne une lentille divergente : flèches inversées dans schéma de la lentille, et F' avant la lentille.]



1.3 Condition de projection sur un écran

1. L'énoncé propose d'introduire la « distance » (donc suggère une grandeur positive) x , donc plutôt choisir $x = -\overline{OA}$.

$$\text{Donc } D = -\overline{OA} + \overline{OA'} = x + \overline{OA'}.$$

$$\text{Puis } 1/f' = 1/\overline{OA'} - 1/\overline{OA} = 1/\overline{OA'} + 1/x = 1/(D - x) + 1/x.$$

Qui se réarrange en l'équation du second degré : $x^2 - Dx + Df' = 0$. Elle n'accepte de solution réelle que si $\Delta = D(D - 4f') \geq 0$, qui donne $f' \leq D/4$.

2. Pour $\Delta > 0$, les solutions sont $x_{\pm} = (D/2) \pm \sqrt{D(D - 4f')}/2$.

3. L'image est agrandie si $|\gamma| = |\overline{OA'}/\overline{OA}| > 1$, soit $(D - x)/x > 1$, donc $D/2 > x$. Ce qui correspond à la solution

$$x_- = (D/2) - \sqrt{D(D - 4f')}/2.$$

[Une justification graphique élégante serait aussi acceptée.]

1.4 Savoir-faire en labo d'optique

3. Une lentille convergente de distance focale faible focalise beaucoup le faisceau. Si le faisceau incident est parallèle, l'image sera sur le plan focal image où il faudra placer l'écran.
4. On est quasiment dans la situation contraire. En plaçant une lentille convergente à une distance légèrement supérieure à sa distance focale, l'image sera éloignée (et même à l'infini dans la limite où l'objet est dans le plan focal objet), agrandie et renversée.
5. Placer la lentille contre votre livre préféré (fonctionne aussi avec vos magnifique polys de TP) et l'éloigner légèrement. On est en mode loupe car $|\overline{OA}| < f'$, donc image non renversée et virtuelle. Puis on éloigne la lentille de l'objet observé jusqu'à observer un retournement de l'image. Ce phénomène arrive quand $|\overline{OA}|$ devient plus grand que f' . Ainsi, vous avez une estimation rapide de la distance focale.

1.5 Profondeur de champ d'un appareil photographique

① A' = image de A → on connaît tous les rayons reliant A et A' !

②

plan focal image

tâche de B' sur le capteur

tracé de construction

cellules de côté ϵ

Rappel : 2 rayons arrivant // sur une lentille convergente se croisent dans le plan focal image.

tâche de B, plus petite

③ Critère : tâche de B < longueur côté détecteur ϵ

④ Savoir-faire : construire la profondeur de champ dans une situation donnée

profondeur de champ

profondeur de champ

Pour déterminer graphiquement la profondeur de champ il faut chercher les 2 objets dont les images donnent une tâche de ϵ sur le capteur.

Plus le diaphragme est fermé, plus la profondeur de champ est grande.

1.6 Problème : Focométrie d'un objectif d'appareil photo

1. (a) [Question pas très judicieuse car quasi-évidente. Cependant, paraphraser le texte ne rapportera aucun point. Donc soit répondre par un calcul, soit par l'absurde, cf par exemple la réponse qui suit.]

Si f' était supérieure à AO , alors l'image serait virtuelle.

- (b) Cf cours pour schéma d'une image réelle d'un objet réel.

- (c) On a $1/\overline{OA'} - 1/\overline{OA} = 1/f'$. Qui se reformule en

$$f' = \frac{\overline{OA}\overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} \quad (1)$$

[L'énoncé demande l'expression de f' , donc il faut aussi encadrer l'expression, pas seulement l'application numérique.]

Application numérique :

$$f' = \frac{(-35) \cdot 46,5}{-35 - 46,5} = 20 \text{ cm} \quad (2)$$

2. (a) Démo de cours pour aboutir à l'équation du second degré $p^2 + Dp + Df' = 0$ qui possède des solutions réelles si son discriminant est positif. Ce qui implique $D_{\min} = 4f'$.

- (b) Les deux solutions sont :

$$p_1 = -\frac{D}{2} - \frac{\sqrt{D(D - 4f')}}{2} \quad (3)$$

$$p_2 = -\frac{D}{2} + \frac{\sqrt{D(D - 4f')}}{2} \quad (4)$$

- (c) $d = p_2 - p_1 = \sqrt{D(D - 4f')}$ donne $d^2 = D^2 - 4Df'$. Puis $f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$.

- (d) On obtient $f' = 20 \text{ cm}$. [Il faut remarquer sur la copie qu'on tombe bien sur la même valeur de f' que précédemment !]

3. Pour un objet donné, une plus grande distance focale implique une image plus grande, cf figure 1. Ainsi, augmenter f' permet de zoomer, au détriment d'un plus grand encombrement de l'objectif. Ainsi, l'image a correspond à $f' = 200 \text{ mm}$, l'image b à $f' = 70 \text{ mm}$.

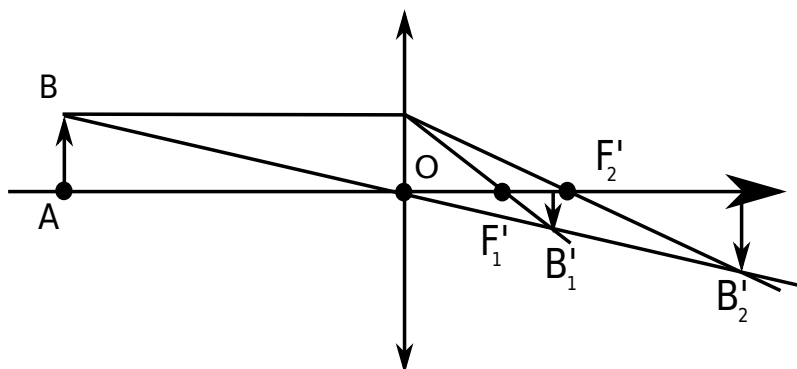
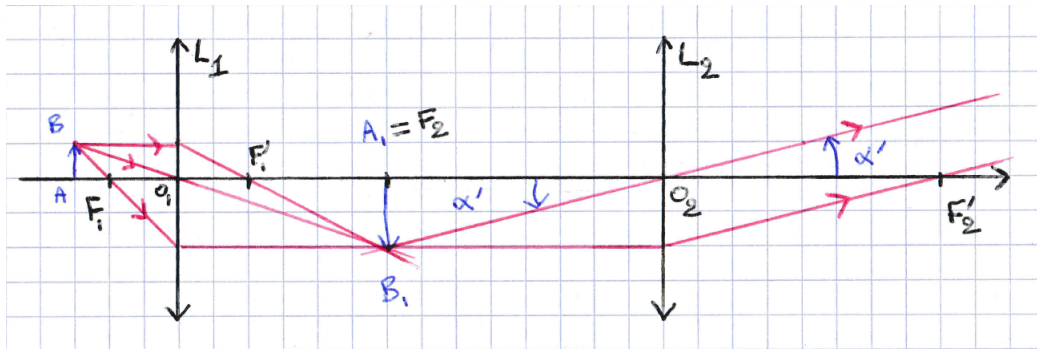


FIGURE 1 – Explication de l'influence de la distance focale sur le zoom.

[Remarquer que les distances focales extrêmes 70 mm et 200 mm sont indiquées dans le nom de l'objectif « 70-200f » !]

1.7 Problème : Étude d'un microscope

1.7.1 L'objectif



1. L'image est donc agrandie, réelle, renversée.
2. $1/f'_1 = 1/\overline{O_1A_1} - 1/\overline{O_1A}$ donne :

$$\overline{O_1A_1} = \frac{f'_1 \cdot \overline{O_1A}}{f'_1 + \overline{O_1A}} = \frac{1 \times (-1,5)}{1 - 1,5} = 3 \text{ cm} \quad (5)$$

$$3. \gamma_1 = \overline{A_1B_1}/\overline{AB} = \overline{O_1A_1}/\overline{O_1A} = \frac{f'_1}{f'_1 + \overline{O_1A}} = -2$$

$|\gamma_1| > 1$ donc l'image est agrandie. $\gamma_1 < 0$ donc renversée.

$\gamma_1 < 0$, donc $\overline{O_1A_1}$ et $\overline{O_1A}$ de signes opposés. Or l'objet est réel, donc l'image est réelle.

1.7.2 L'oculaire

4. Pour une observation sans accommoder, L_2 doit produire une image à l'infini. Pour cela, l'objet doit être dans son plan focal objet. Donc il faut placer F_2 en A_1 .
5. Voir schéma.
6. [Remarquer que $\alpha' > 0$. On utilise le triangle $O_2A_1B_1$.]

$$\tan \alpha' \simeq \alpha' = \frac{A_1B_1}{f'_2} = a|\gamma_1|/f'_2 = 0,25.$$

1.7.3 Efficacité du microscope

7. $\alpha = a/d_{PP} = 0,02$.
8. $G = \alpha'/\alpha = (a|\gamma_1|/f'_2)/(a/d_{PP}) = |\gamma_1| \cdot d_{PP}/f'_2 = 12,5$.

On trouve $G > 1$, ce qui veut dire que l'objet observé est grossi par rapport à une observation directe à l'œil.

2 Plus difficile

2.1 Lentille plate de Veselago (**)

Réponses : Le rayon réfracté se situe alors du même côté de la normale que le rayon incident ; $OA' = d\sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 i_1}{1 - \sin^2 i_1}}$, OA' dépend de i_1 , il n'y a pas stigmatisme ; si l'on se place à l'ordre 1 en i_1 , alors on peut écrire que $OA' \simeq |n|d$, il y a bien stigmatisme pour les petits angles, l'invariance par translation impose que B' soit dans le même plan de front que A' , il y a aplanétisme ; il faut que $e > |n|d$ et pour le second objet $e > |n|d_1$, A'_1 se situe en $|n|d_1$, l'image de l'objet A_1B_1AB est $A'B'A'_1B'_1$, il y a renversement longitudinal et dilatation longitudinale de l'objet ; $A'B'$ se situe à la distance $e - |n|d$ du dioptré plan $\mathcal{P}_{n,1}$, son image se situe donc de l'autre côté à la distance $\frac{e}{|n|} - d$, l'image de A_1B_1 est située en $\frac{e}{|n|} - d_1$, il n'y a plus de renversement longitudinal et les rayons convergent, l'image définitive est bien une image réelle de même taille que l'objet, le dispositif a des similitudes avec une lentille convergente mais il n'est pas complètement équivalent, on le voit en particulier sur le grandissement mais aussi sur le fait que si $e < |n|d$ alors l'image définitive est virtuelle, quand l'objet se situe au-delà de la distance $\frac{e}{|n|}$ de la lentille son image est virtuelle pour une lentille traditionnelle, la condition était $d < f$ (trop près de la lentille).

2.2 Lentille plate de Fresnel (**)

Réponses : On note J le sommet du prisme et J' le point d'intersection des deux normales aux dioptrés d'entrée et de sortie de celui-ci. On note J'' l'intersection des rayons incident et émergent. Attention, la figure 1 est représentée proche d'un cas particulier (on pourrait croire que les rayons (1) et (4), par exemple, sont parallèles mais ce n'est pas forcément le cas !

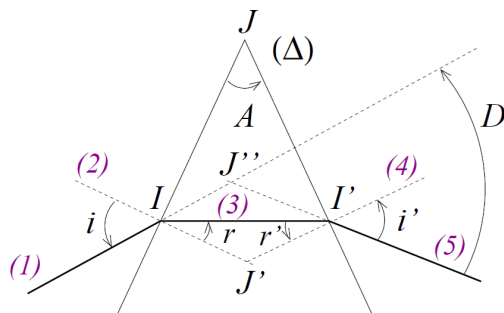


FIGURE 1 – Déviation par un prisme

Dans le triangle (JIJ') , la somme des angles est π (en tournant dans le sens trigonométrique). Ainsi, $\pi = \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - r' + A$ d'où $A = r + r'$. La déviation D est définie par l'énoncé de façon positive (déviation absolue). Cela veut dire qu'on doit l'orienter dans le sens trigonométrique sur la figure pour être en accord ! Pour expliciter D , il y a plusieurs façons de faire. On peut traduire que la somme des angles dans le quadrilatère $(IJ'I'J'')$ vaut 2π (sachant que l'angle au sommet J'' est $\pi - D$ et celui en J' est $\pi - A$) : $2\pi = \pi - D + i + \pi - A + i'$

d'où $D = i + i' - A$. On peut raisonner par relation de CHASLES angulaire : on construit l'angle de rotation total D en sens trigonométrique pour passer de (5) à (1) en composant des rotations successives en passant par (4), (3) et (2). On tourne de i' pour passer de (5) à (4), puis de $-r'$ pour passer de (4) à (3), puis de $-r$ pour passer de (3) à (2) et enfin de i pour passer de (2) à (1). Ainsi, $D = i' - r' - r + i$ d'où $D = i + i' - A$. Les formules générales du prisme s'écrivent finalement avec les conventions d'orientation adoptées et en ajoutant les deux relations issues des lois de DESCARTES de la réfraction : $r + r' = A$, $D = i + i' - A$, $\sin i = n \sin r$, $\sin i' = n \sin r'$. L'angle i étant supposé faible, r l'est donc aussi et la relation $r' = A - r$ montre que r' est aussi petit devant l'unité. Par conséquent, i' l'est aussi ! Finalement, on peut reprendre les équations précédentes après linéarisation aux petits angles : $r + r' = A$, $D = i + i' - A$, $i = nr$, $i' = nr'$. Il ne reste qu'à éliminer r et r' grâce aux formules de Descartes linéarisées, d'où $i + i' = nA$, puis $D = (n - 1)A$. Attention, comme toujours pour un prisme, les rayons sont déviés vers la base du prisme ! Une simulation numérique permettrait de voir que la formule précédente, déterminée aux petits angles, marche encore bien pour des angles de 20° ! On aura l'occasion de se servir de ce résultat lors de l'étude du dispositif interférométrique des biprismes de FRESNEL... Comme le montre la figure 2, un faisceau incident parallèle à l'axe coupe celui-ci en F' .

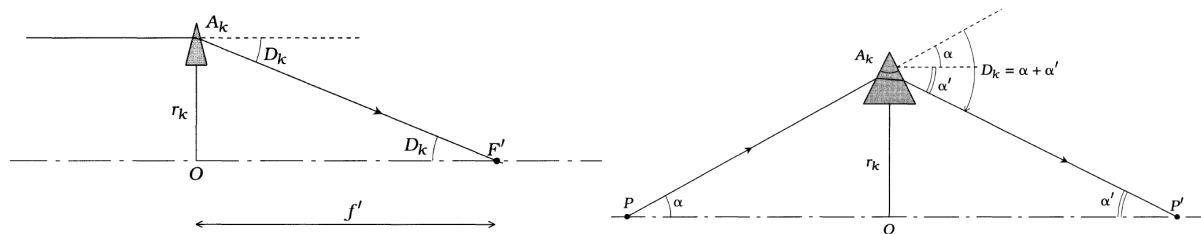


FIGURE 2 – Marche des rayons

Dans le cas des petits angles, $D_k = r_k/f'$ impose $A_k = \frac{r_k}{(n-1)f'}$. On examine le cas d'un rayon issu d'un point P de l'axe assez loin des prismes pour pouvoir encore utiliser le résultat de la première question aux petits angles d'incidence sur chaque prisme (c'est analogue à une approximation de GAUSS de l'optique paraxiale). On travaille avec des angles absolu : $\alpha = \frac{r_k}{OP} = -\frac{r_k}{OP'}$ et $\alpha' = \frac{r_k}{OP'}$. Alors, $D_k = \alpha + \alpha' = \frac{r_k}{OP'} - \frac{r_k}{OP}$. Or, $D_k = (n-1)A_k = \frac{r_k}{f'}$ d'où $\frac{1}{OP'} - \frac{1}{OP} = \frac{1}{f'}$. La lentille de FRESNEL constituée de la succession de petits prismes (arrangés en cercles... ou bien cercles prismatiques) vérifie dans ce cas la formule de conjugaison de DESCARTES et se comporte comme une lentille mince. Elle est utilisée notamment dans les optiques des phares marins (figure 3), ainsi que dans les rétroprojecteurs car elle permet de fortement condenser la lumière. Son inconvénient majeur est son fort effet dispersif. De plus, elle n'est pas stigmatique même en lumière monochromatique parce que deux rayons passant par un même prisme ne peuvent arriver au même point (l'angle de déviation étant le même).

2.3 Nombre d'images entre deux miroirs plans (**)

Réponses : les points images de O se situent tous sur un cercle de rayon CO . Par symétrie, par rapport à un miroir, l'angle est identique de chaque côté du miroir pour former l'image de O . Finalement, cela revient à provoquer une rotation de deux fois l'angle. Or, l'angle par rapport à chacun des deux miroirs est de 10° , les images se situent toutes en décalé de 20° . Comme le point O est sur la bissectrice, c'est exactement la même chose pour une première réflexion sur ($M1$) que pour une réflexion sur ($M2$). On aura donc $360/20 = 18$ images d'où la réponse b).

2.4 Lentilles successives (***)

Réponses : Soit A un point de l'axe optique et A' son image par la lentille $\mathcal{L}_n$ (peu importe dans le calcul que ces points soient réels ou virtuels). On a $\alpha_n = -\frac{y_n}{O_n A'}$ et $\alpha_{n-1} = -\frac{y_n}{O_n A}$ puisque l'on est dans les conditions de GAUSS. En utilisant la relation de conjugaison de la lentille, multipliée par y_n , on tire $-\frac{y_n}{O_n A} + \frac{y_n}{O_n A'} = \frac{y_n}{f'}$ soit $\alpha_{n-1} - \alpha_n = \frac{y_n}{f'}$. Par ailleurs, on lit sur la figure de l'énoncé $\alpha_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{a}$ et $\alpha_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{a}$. En combinant les équations précédentes, on trouve la relation de récurrence $y_{n+1} + y_{n-1} + \left(\frac{a}{f'} - 2\right) y_n = 0$. On pourrait résoudre cette récurrence et obtenir y_n mais l'énoncé propose une approche dans un cas simplifié ($a \ll f'$). Considérons les y_n comme les valeurs que prend une fonction inconnue $y(x)$ aux points $x = na$. En effectuant un développement limité d'ordre 2, on obtient $y_{n\pm 1} \simeq y_n \pm a \frac{dy}{dx} \Big|_{x_n} + \frac{a^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x_n}$. On reporte alors ceci dans la relation de récurrence, d'où $a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x_n} + \frac{a}{f'} y(x_n) = 0$. Dans l'approximation des milieux continus, la référence à x_n devient superflue et on tire l'équation différentielle : $\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$ avec $k = \frac{1}{\sqrt{a f'}}$. La solution de cette équation différentielle classique est $y(x) = y_0 \cos[k(x - x_0)]$ pour un rayon passant par (x_0, y_0) . On constate que le rayon est canalisé par la succession de lentilles : on parle de stabilité périscopique et cela a été utilisé dans les périscopes de sous-marins et dans les endoscopes médicaux. Maintenant, on privilégie les fibres optiques ou les petites caméras électroniques.