

TDO4 : Interféromètre de Michelson - Correction

ex1 : En lame d'air, le faisceau incident est focalisé sur les miroirs pour obtenir de nombreux angles d'incidence et donc de nombreux ordres d'interférence visibles sur l'écran. Une lentille de courte focale en entrée permet un angle d'incidence i plus grand. Pour une grande image, l'écran doit être loin de la sortie, donc il faut une lentille de sortie de grande distance focale.

ex2 : En coin d'air, l'interféromètre est éclairé en onde plane incidente. Comme les franges sont localisées au voisinage des miroirs, on place une lentille en sortie puis l'écran dans le plan conjugué des miroirs par cette lentille.

1 Exo-type : lame d'air

2. Les franges localisées à l'infini.
3. Il faut un faisceau incident focalisé sur les miroirs par une lentille de courte focale.
4. Cf cours pour montrer $\delta = 2e \cos(i)$. Puis schéma sortie avec lentille pour remarquer $i \simeq \rho/f'$ qui donne alors $\delta \simeq 2e(1 - (\rho/f')^2/2)$.
5. Comme la frange centrale est brillante, alors $p_0 = 2e/\lambda$ entier. Donc pour le n -ième anneau brillant : $p_n = p_0 - n$. Alors $\rho_n = f' \sqrt{n\lambda/e}$. $\rho_1 = 2,5 \text{ cm}$.
6. Cf cours : antioïncidences pour $2e\Delta\lambda/\lambda_m^2 = q + 1/2$ avec $q \in \mathbb{Z}$, puis $e = \frac{(q + 1/2)\lambda_m^2}{2\Delta\lambda}$. AN : $e = 145 \text{ } \mu\text{m} + q \times 2$

2 Exo-type : coin d'air

2. Les franges sont localisées au voisinage des miroirs.
3. On éclaire par un faisceau incident parallèle en incidence normale.
4. Sur le miroir, $i = \lambda/(2\alpha) = 3 \text{ mm}$.
5. Formule de conjugaison $1/D + 1/d = 1/f'$ donne $D = f'd/(d - f')$. Puis $\gamma = -D/d = -f'/(d - f') = -4$. Donc sur l'écran $i' = |\gamma|i = 1,2 \text{ cm}$.
6. En éclairage par un doublet de raies proches, le contraste oscille régulièrement en s'éloignant du centre de la figure : alternance de coïncidence et antioïncidences. Mais en pratique, ces alternances sont trop éloignées pour être observables dans les conditions de ce montage.

En effet, la première antioïncidence est à distance sur l'écran de la frange centrale $x = |\gamma|\lambda^2/(4\alpha\Delta\lambda) = 5,8 \text{ m}$.

Antioïncidences régulièrement espacées sur l'écran de $\Delta x = |\gamma|\lambda^2/(2\alpha\Delta\lambda) = 11,6 \text{ m}$ Très supérieur à taille de l'écran. Donc en pratique, pas observable en coin d'air.

7. Une frange bien contrastée, cernée par quelques franges colorées puis de blanc d'ordre supérieur.

3 Bande passante d'un filtre (**)

1. La longueur de cohérence L_c est reliée au temps de cohérence τ_c (durée typique d'un train d'onde) d'une onde par $L_c = c \cdot \tau_c$. Pour observer des interférences, il faut $|\delta| < L_c$.

Cf fin du cours chapitre O1 pour montrer que $L_c = \lambda^2/\Delta\lambda$.

2. Au centre de la figure d'interférence, $\delta = 2e$. Donc quand x varie, e aussi et on observe une alternance de luminosité par interférences. Mais si e augmente trop, le contraste va diminuer car $|\delta|$ va finir par atteindre et dépasser L_c .

D'après l'énoncé, le miroir parcourt une distance totale $\Delta x_{tot} = |x_2 - x_1|$ en $\Delta t_{tot} = 5 \text{ min}$.

On mesure approximativement sur le graphe une durée $\Delta t \simeq 50 \text{ s}$ entre le maximum de contraste et une diminution notable d'un côté. Cela correspond à un déplacement de $\Delta x = \Delta x_{tot} \Delta t / \Delta t_{tot} = 0,013 \text{ mm}$.

Comme $|\delta| = 2 \cdot \Delta x$, alors $\Delta\lambda = \lambda^2/(2\Delta x) = 12 \text{ nm}$

4 Doublet du mercure (**)

1. Cf cours pour $\Delta\lambda = \lambda^2/(2\Delta e)$.
2. Δe est à extraire du graphe, cf méthode exo précédent.

5 Mesure de l'indice de l'air

Traduction de l'énoncé : variation d'ordre de $|\Delta p| = 9,5$. On en déduit n , cf exo précédent.

6 Rayon des anneaux

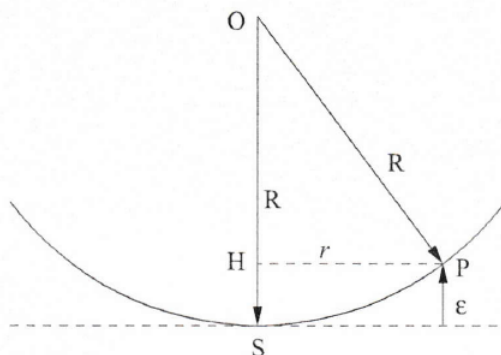
1. Vert.
2. $p = 2e/\lambda = 4029,3$ a priori ni entier ni demi-entier. Mais, avec le bon nombre de chiffres significatifs, $p = 4,010^3$, on ne peut pas conclure si p est entier ou demi-entier.
3. Cf exo de cours.
4. Les anneaux convergent vers le centre et y meurent. Le nombre total d'anneaux visibles diminue.
5. Vu l'incertitude sur e (bien supérieure à λ), les calculs de p sont imprécis à plus d'une unité près, on ne peut donc pas être assez précis pour calculer si l'interférence au centre est constructive ou destructive!

7 Spectre cannelé en lame d'air (**)

1. Franges circulaires.
2. Les anneaux convergent vers le centre et y meurent. Le nombre total d'anneaux visibles diminue.
3. Cf méthode exo TDO3 qui donne un encadrement de e .
4. Si tourner de 2π translate de $\ell = 0,500$ mm. Alors, atteindre le contact optique à partir de e se fait en tournant d'un angle $\varphi = 2\pi e/\ell$. AN : angle très petit difficile à atteindre!

8 Mesure du rayon de courbure d'un miroir déformé (***)

Voici l'allure des miroirs après repliage (les proportions ne sont pas respectées).



Le système se comporte donc comme un coin d'air sphérique. Comme on fait l'observation sur M'_1 , la différence de marche est, comme dans le coin d'air $\delta = 2\varepsilon$. On lit sur la figure

$$\varepsilon = HS = R - OH = R - \sqrt{R^2 - r^2}$$

Comme R est de l'ordre de la dizaine de mètres et r de l'ordre de quelques centimètres, on peut faire le développement limité

$$\varepsilon = R \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right] \approx R \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right]$$

$$\text{soit } \varepsilon \approx \frac{r^2}{2R}$$

L'ordre d'interférences vaut donc

$$p(r) = \frac{r^2}{\lambda_0 R}$$

Les franges brillantes sont observées lorsque p est un entier. Au centre de la figure, on est au contact optique d'après l'énoncé, donc $p = 0$ et on a bien une tache brillante. Le rayon mesuré sur l'écran est égal à r multiplié par 4,0 (agrandissement). Pour les franges visibles, de $k = 0$ à 4, on a donc

$$k = \frac{\left(\frac{r_k}{4}\right)^2}{\lambda_0 R} \text{ soit } r_k^2 = 16\lambda_0 R k$$

Dressons le tableau des valeurs de r_k^2 en fonction de k .

k	0	1	2	3	4
$r_k^2 (\times 10^{-4} \text{ m}^2)$	0	2,26	4,84	6,76	9,00

Le coefficient de régression linéaire vaut 0,9991 ce qui valide le modèle. Le coefficient directeur vaut

$$16\lambda_0 R = 2,251 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ donc } R = \frac{2,251 \cdot 10^{-4}}{16\lambda_0} = 24 \text{ m}$$

9 Estimation des cannelures en lame d'air (**)

- En lumière blanche, la longueur de cohérence est de l'ordre du micromètre, donc inférieure à la différence de marche ici. Donc les anneaux sont brouillés.
- (a) Une cannelure correspond à une interférence destructive donc $p = k + 1/2$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme au centre de

la figure, $\delta = 2e$, alors $\lambda_{\text{can}} = \frac{2e}{k + 1/2}$.

- Les valeurs négatives de k correspondraient à $\lambda_{\text{can}} < 0$ impossible. Donc la plus grande valeur est pour $k = 0$, donc $\lambda_{\text{can}}(\text{max}) = 4e = 4,00 \mu\text{m}$, dans l'infrarouge. Les cannelures dans le visible sont (limite pour $k = 2$) :

k	2	3	4
$\lambda_{\text{can}} \text{ (nm)}$	800	571	444

- (a) $2e / (k + 1/2)$

(b)

Voici quatre variantes de réponses à la question, une variante nécessite le préambule `import math as m`.

```

1 ##### v1
2 liste_can_v1 = []
3 n = 0                                     # initialisation k
4 while lambda_can(n) > lambda_max :       # tant que lambda dans l'IR,
5     n += 1                               # on ne la conserve pas.
6 while lambda_can(n) >= lambda_min :      # tant qu'elle est dans le visible,
7     liste_can_v1.append(lambda_can(n))   # on la conserve.
8     n += 1
9
10 ##### v2
11 liste_can_v2 = []
12 n = 0                                     # initialisation k
13 while lambda_can(n) >= lambda_min :      # tant que > lambda_min,
14     if lambda_can(n) <= lambda_max :     # si dans le visible,
15         liste_can_v2.append(lambda_can(n)) # on la conserve.
16     n += 1
17
18 ##### v3
19 kmin = m.ceil(2*e/lambda_max-1/2)       # l'entier suivant (partie entiere superieure)
20 kmax = m.floor(2*e/lambda_min-1/2)      # l'entier precedent (partie entiere), on aurait pu utiliser
21     int()
22 liste_can_V3 = [lambda_can(k) for k in range(kmin,kmax+1)] # le +1 pour garder kmax
23
24 ##### v4
25 liste_can_V4 = []
26 for k in range(int(2*e/lambda_min-1/2) + 1): # tant que > lambda_min,
27     if lambda_max >= lambda_can(k) >= lambda_min : # si dans le visible,
28         liste_can_V4.append(lambda_can(k)) # on la conserve.

```

- On trouve une épaisseur $e = 2,34 \mu\text{m}$.

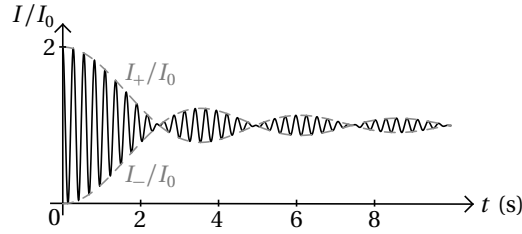
10 Largeur spectrale d'un filtre (**)

- L'interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air, les franges sont donc localisées à l'infini. Pour observer de manière nette la figure d'interférences, il faut donc positionner l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente. Ainsi, en utilisant une lentille de focale $f' = 50 \text{ cm}$, l'écran doit être placé à 50 cm après la lentille.

La figure d'interférences est composée d'une alternance de franges circulaires concentriques brillantes et sombres.

- La différence de marche en un point M situé à l'infini dans une direction repérée par l'angle i est $\delta_M = 2e \cos(i)$ où e est l'épaisseur de la lame d'air. Le détecteur est placé au point focal image de la lentille, il correspond donc à l'image d'un point à l'infini dans la direction $i = 0$. La différence de marche en D est donc $\delta_D = 2e$.

L'épaisseur de la lame d'air est variée à vitesse constante v_0 grâce au moteur, on a donc $e(t) = e_0 + v_0 t$ avec e_0 l'épaisseur initiale du coin d'air. Il est dit dans l'énoncé que l'interféromètre est initialement au contact optique donc $e_0 = 0$. Finalement, la différence de marche au niveau du détecteur est $\delta_D = 2v_0 t$.

FIGURE 1 – Enveloppes $I_{\pm}$ du signal mesuré par le détecteur en D .

3. La composante de la source comprise entre ν et $\nu + d\nu$ peut être supposée quasi monochromatique d'intensité dI_0 , de telle sorte que les ondes passant dans l'interféromètre sont cohérentes. L'intensité au niveau du détecteur s'écrit alors :

$$dI(D) = dI_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_D \right) \right).$$

On a donc :

$$dI(D) = dI_0 (1 + \cos(4\pi \frac{\nu}{c} v_0 t)).$$

4. Deux ondes émises par des sources possédant des fréquences différentes sont supposées incohérentes, les intensités sont additives.

La lumière sortant du filtre constitue la source éclairant l'interféromètre. Cette source polychromatique est découpée en sources élémentaires dont le spectre correspond à une tranche de largeur infinitésimale de fréquences comprises entre ν et $\nu + d\nu$. Pour une même source élémentaire, les ondes passant dans l'interféromètre sont cohérentes donnant une intensité $dI(D)$ au niveau du détecteur. Entre deux sources élémentaires différentes, les ondes émises sont considérées de fréquences différentes et donc incohérentes. Leurs intensités se somment.

Ainsi, l'intensité lumineuse totale au niveau du détecteur $I(D)$ est la somme des intensités $dI(D)$ obtenues avec les différentes sources élémentaires :

$$I(D) = \sum_i dI_{0,i} (1 + \cos(4\pi \frac{\nu_i}{c} v_0 t)),$$

où la somme porte sur l'ensemble des sources élémentaires. On adopte ici une description continue où $dI_0 = A d\nu$ pour $\nu \in [\nu_m - \Delta\nu/2, \nu_m + \Delta\nu/2]$ et nulle sinon. La somme est remplacée par une intégrale, l'intensité totale s'écrit donc :

$$I(D) = \int_{\nu_m - \Delta\nu/2}^{\nu_m + \Delta\nu/2} A \left(1 + \cos \left(4\pi \frac{\nu}{c} v_0 t \right) \right) d\nu.$$

Calculons l'expression de l'intensité $I(D)$:

$$\begin{aligned} I(D) &= A\Delta\nu + \frac{A}{4\pi v_0 t/c} \left[\sin \left(4\pi \frac{\nu}{c} v_0 t \right) \right]_{\nu_m - \Delta\nu/2}^{\nu_m + \Delta\nu/2} \\ &= A\Delta\nu + \frac{A}{4\pi v_0 t/c} \left(\sin \left(4\pi \frac{\nu_m + \Delta\nu/2}{c} v_0 t \right) - \sin \left(4\pi \frac{\nu_m - \Delta\nu/2}{c} v_0 t \right) \right) \\ &= A\Delta\nu + \frac{A}{2\pi v_0 t/c} \sin \left(2\pi \frac{\Delta\nu}{c} v_0 t \right) \cos \left(4\pi \frac{\nu_m}{c} v_0 t \right) \\ &= A\Delta\nu \left(1 + \text{sinc} \left(2\pi \frac{\Delta\nu}{c} v_0 t \right) \cos \left(4\pi \frac{\nu_m}{c} v_0 t \right) \right) \\ I(D) &= I_0 \underbrace{\left(1 + \text{sinc} \left(2\pi \frac{\Delta\nu}{c} v_0 t \right) \right)}_{\text{terme lent}} \underbrace{\cos \left(4\pi \frac{\nu_m}{c} v_0 t \right)}_{\text{terme rapide}} \end{aligned}$$

où sinc est la fonction sinus cardinal définie par $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

Le graphique de $I(D)/I_0$ fait apparaître une oscillation rapide entre deux enveloppes (figure 1) d'équations :

$$I_{\pm}(t) = I_0 \left(1 \pm \text{sinc} \left(2\pi \frac{\Delta\nu}{c} v_0 t \right) \right).$$

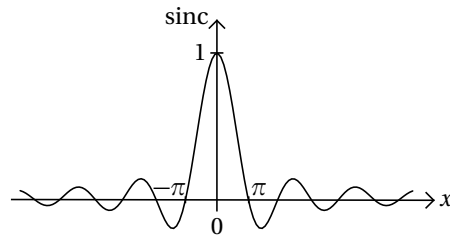


FIGURE 2 – Représentation graphique de la fonction sinus cardinal.

[rq1 : On obtient les équations des enveloppes en mettant le terme rapide à ± 1 .]

[rq2 : Il est utile de faire apparaître la fonction sinus cardinal afin d'interpréter la forme de l'intensité en fonction de la différence de marche. Cette fonction est représentée sur la figure 2.

On retiendra les valeurs remarquables suivantes :

- $\text{sinc}(0) = 1$;
- $\text{sinc}(x) = 0$ si et seulement si $x = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$.

5. En supposant $\Delta\nu \ll \nu_m$, on peut identifier dans l'expression de l'intensité $I(D)$:

- un terme oscillant rapidement dont la période temporelle est $T = c/2\nu_m v_0$;
 - un terme évoluant lentement sous forme d'une fonction sinus cardinal correspondant à l'enveloppe du signal.
- Ce terme s'annule périodiquement résultant en un brouillage périodique des franges.

Ainsi, ν_m est liée à l'oscillation rapide observée sur la figure 1. La pseudo-période de l'oscillation mesurée sur la figure est $T = 0,27$ s. On en déduit la valeur de la fréquence centrale du filtre :

$$\nu_m = \frac{c}{2Tv_0} = 5,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz.}$$

[rq3 : Afin de faire une mesure relativement précise de la période des oscillations sur la figure fournie, il faut mesurer la durée d'un grand nombre de période et diviser le résultat par le nombre de périodes considérées.]

La largeur spectrale du filtre $\Delta\nu$ est reliée à l'écart entre deux brouillages des franges. En effet, la fonction sinus cardinal s'annule lorsque l'argument est un multiple non nul de π , il y a donc brouillage de la figure d'interférences lorsque $2\pi\Delta\nu v_0 t/c = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$. On en déduit que l'intervalle de temps entre deux brouillages est $\Delta t = c/2\Delta\nu v_0$. On mesure sur la figure $\Delta t = 2,5$ s, on en déduit la largeur fréquentielle du spectre de la source :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2\Delta t v_0} = 6,010^{13} \text{ Hz.}$$

[rq4 : On peut aussi repérer l'instant t_1 du premier brouillage de la figure d'interférences correspondant à la première annulation de la fonction sinus cardinal lorsque l'argument de la fonction vaut π . La largeur spectrale s'en déduit :

$$2\pi \frac{\Delta\nu}{c} v_0 t_1 = \pi \quad \implies \quad \Delta\nu = \frac{c}{2t_1 v_0}.]$$

À partir des valeurs trouvées, on en déduit la longueur d'onde centrale ainsi que la largeur spectrale en longueur d'onde :

$$\lambda_m = \frac{c}{\nu_m} = 5,4 \cdot 10^2 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = c \frac{\Delta\nu}{\nu_m^2} = 58 \text{ nm.}$$