X 2022 PC - Etude de l'étude de l'hélium superfluide métastable

Merci de signaler les erreurs éventuelles à pchoche2020@gmail.com.
Ce corrigé a été relu par Séverine Mensch

1 L'hélium liquide à basse température

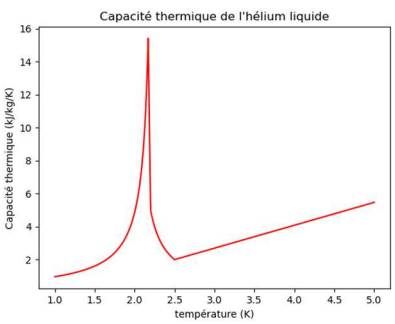
Q1 On applique le premier principe entre t et $t+dt$ au système fermé constitué de la masse m d'hélium liquide. L'évolution étant isobare :

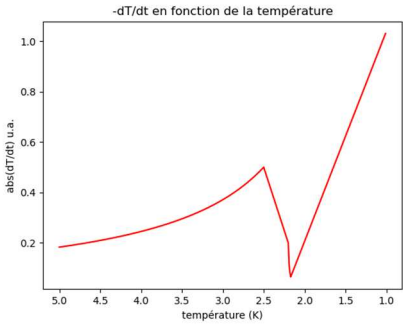
$$dH = P_{th}dt$$

Cependant : $$dH = mc_p(T)\,dT$$

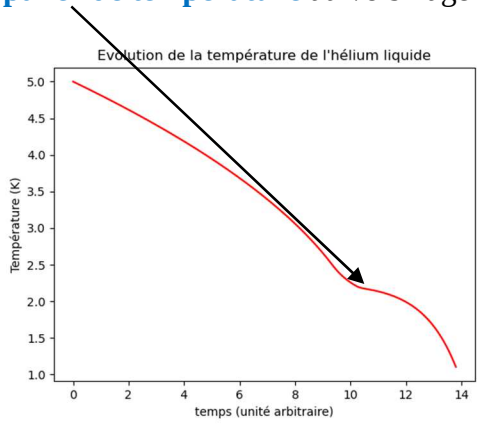
On en déduit : $$\frac{dT}{dt} = \frac{P_{th}}{mc_p(T)}$$

Au cours du refroidissement, c_p diminue d'abord, avant une augmentation brutale, laquelle s'accompagne donc d'une diminution marquée de $\left|\frac{dT}{dt}\right|$. Il s'en suit une deuxième étape, à partir de 2,17K, au cours de laquelle la capacité thermique diminue brutalement et donc $\left|\frac{dT}{dt}\right|$ augmente significativement.

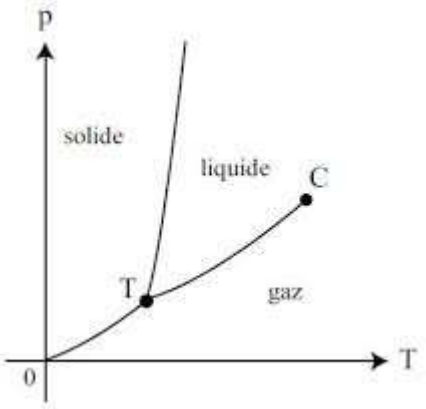


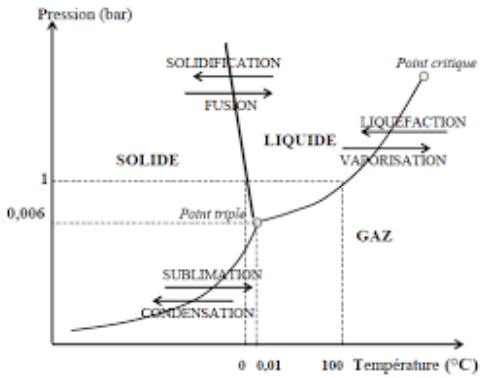


On observe ainsi **un quasi-palier de température** au voisinage de T_λ.



Q2 Le diagramme d'état (p,T) d'un corps pur est constitué de trois domaines (solide/liquide/vapeur, ci-dessous à gauche) dont les frontières ont des pentes généralement **positives** (l'eau est une exception, à droite, avec une courbe de coexistence solide/liquide qui admet une pente négative, tout au moins au-dessous d'une certaine pression).

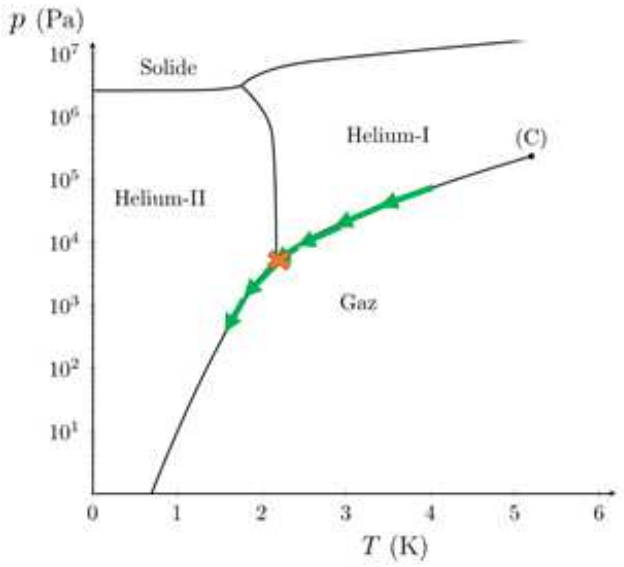




Dans le cas de l'hélium, il faut prendre en compte un **point triple Hélium liquide II / Hélium liquide I / Gaz** et un point triple **Solide / Hélium liquide II / Hélium liquide I**. En d'autres termes, **il n'y a pas de point triple solide/liquide/gaz**.

Pour un corps pur « normal », lors d'un refroidissement le long de la ligne de coexistence avec la phase gazeuse, lorsque le point triple est franchi, on passe d'un équilibre **liquide / gaz** à un équilibre **solide / gaz**. On s'attend à une discontinuité de masse volumique de la phase condensée lors de ce franchissement.

Dans le cas de l'hélium, on passe d'un équilibre **hélium liquide I / gaz** à un équilibre **hélium liquide II / gaz**, sans que la phase solide n'apparaisse à l'équilibre avec la phase gazeuse. Par ailleurs, d'après la **figure 1-b**, la transition entre les deux phases de l'hélium liquide se produit **sans discontinuité de masse volumique**.



Q3 Le modèle de l'**écoulement parfait** consiste à négliger tout phénomène diffusif :

- diffusion de quantité de mouvement : on néglige la **viscosité** :
  - l'écoulement est ainsi régi par l'**équation d'Euler** ;
  - cette équation est complétée par des conditions aux limites qui imposent à la **composante normale de la vitesse** de s'annuler sur une paroi fixe (mais la composante tangentielle peut être non nulle) ;
  - autour d'un corps, un écoulement parfait a un **nombre de Reynolds qui tend vers l'infini** ;

- diffusion d'énergie cinétique microscopique : on néglige les échanges thermiques diffusifs :
  - l'évolution d'une particule de fluide est **adiabatique** ;
  - comme tout phénomène diffusif est négligé, l'évolution est aussi **réversible**, donc **isentropique** ;

Q4 Sous la température T_λ, d'après la **figure 1-b**, la masse volumique de l'hélium liquide est de l'ordre de : $\rho = 145 kg.m^{-3}$

En attribuant à chaque atome le volume a^3 : $\boxed{a = \left(\frac{m_{He}}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}}$

Soit : $a \simeq \left(\frac{7.10^{-27} kg}{1,5.10^{2} kg.m^{-3}} \right)^{\frac{1}{3}}$ donc $\boxed{a \simeq 3,5.10^{-10} m}$

Un atome d'hélium d'énergie cinétique $E_c \simeq 3k_B T$ est non relativiste et a une quantité de mouvement de norme : $p = \sqrt{2 m_{He} E_c}$ soit $p = \sqrt{6 m_{He} k_B T}$

On déduit de la **relation de de Broglie** la longueur d'onde de de Broglie de l'atome d'hélium :

$$\Lambda = \frac{h}{p} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Lambda = \frac{h}{\sqrt{6 m_{He} k_B T}}}$$

Si la température diminue, la longueur d'onde de Broglie de l'atome d'hélium augmente, ce qui va dans le sens d'**effets quantiques plus prononcés** (au sens où les fonctions d'onde des différents atomes « se superposent »). Avec le critère retenu, les effets quantiques se manifestent à une température inférieure à :

$$\boxed{T_c = \frac{h^2}{6 a^2 m_{He} k_B}}$$

AN $$T_c = \frac{\left(7.10^{-34}\,J.s\right)^2}{6\times\left(3,5.10^{-10}\,m\right)^2\times\left(7.10^{-27}\,kg\right)\times\left(1,4.10^{-23}\,J.K^{-1}\right)}$$

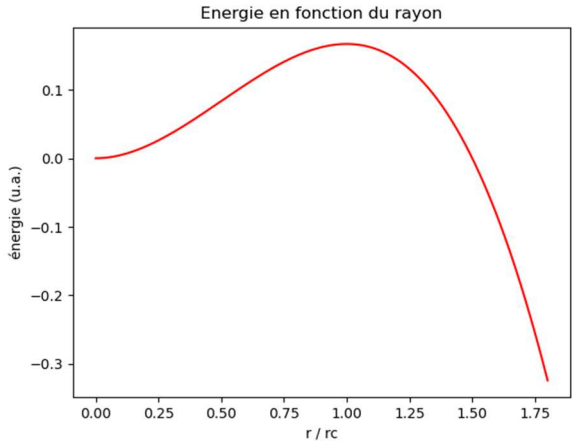
Soit : $$\boxed{T_c = 7K}$$

On retrouve un **ordre de grandeur** cohérent avec la température T_λ .

2 Etats métastables et cavitation

2.1 Métastabilité et cavitation

Q5 L'énergie surfacique de tension superficielle est γ et l'aire de l'interface entre les deux phases est celle d'une sphère, donc $4\pi r^2$, d'où le second terme. Ce terme est positif car une augmentation de l'aire de l'interface a un coût énergétique.



On déduit de l'expression de l'énergie :

$$\frac{d\Delta E}{dr} = 4\pi r^2\left(p - p_{sat}\right) + 8\pi\gamma r \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\Delta E}{dr^2} = 8\pi r\left(p - p_{sat}\right) + 8\pi\gamma$$

La dérivée première s'annule en $r = 0$, mais aussi en : $$\boxed{r_c = \frac{2\gamma}{p_{sat} - p}}$$

La dérivée seconde y vaut : $\frac{d^2\Delta E}{dr^2}\left(r = r_c\right) = -8\pi\gamma < 0$ (alors qu'elle vaut $8\pi\gamma > 0$ en $r = 0$). Il s'agit donc bien d'un maximum en $r = r_c$.

A cette valeur du rayon : $\Delta E = 4\pi\left(p_{sat} - p\right)\left(-\frac{r_c^3}{3} + \frac{\gamma}{p_{sat} - p} r_c^2\right)$

Soit : $\Delta E = 4\pi \frac{2\gamma}{r_c}\left(-\frac{r_c^3}{3} + \frac{r_c^3}{2}\right)$

Finalement : $\boxed{\Delta E^* = \frac{4\pi}{3}\gamma r_c^2}$ ou $\boxed{\Delta E^* = \frac{16\pi\gamma^3}{3\left(p_{sat} - p\right)^2}}$

L'**état métastable** correspond à $r = 0$ (absence de bulle de gaz) et il faut apporter (au moins) l'énergie ΔE^* pour franchir l'état (instable) $r = r_c$, à partir duquel il y a rupture de métastabilité.

Q6 Par analogie avec la **loi d'Arrhenius**, on peut proposer une probabilité de franchissement de la barrière d'énergie potentielle, donc de cavitation, de la forme :

$$\boxed{\Gamma = \Gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right)}$$

Une **distribution de Boltzmann** des fluctuations d'énergie ΔE permet de montrer que la probabilité $P\left(\Delta E > \Delta E^*\right)$ est effectivement proportionnelle à $\exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right)$.

Q7 A faible température, l'hélium liquide peut être très pur (introduction de cette partie), donc ΔE^* **est plus élevé**, ce qui implique, d'après **Q6**, que Γ est plus faible. Cet effet est renforcé par l'augmentation de $\frac{1}{T}$, lorsque T diminue, dans le facteur $\exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right)$.

Q8 Pour que la cavitation ait lieu entre *t* et *t*+*dt* (probabilité $\Sigma\left(t+dt\right) - \Sigma\left(t\right)$), elle doit se produire pendant la durée *dt* (probabilité $\Gamma V dt$), alors qu'elle n'a pas eu lieu entre 0 et *t* (probabilité $1 - \Sigma\left(t\right)$). Ces deux « événements » étant indépendants :

$$\boxed{\Sigma\left(t+dt\right) - \Sigma\left(t\right) = \left(1 - \Sigma\left(t\right)\right)\Gamma V dt}$$

On en déduit : $\frac{d\Sigma}{1-\Sigma} = \Gamma V dt$

Cette équation s'intègre en : $-\ln\frac{1-\Sigma\left(t\right)}{1-\Sigma\left(0\right)} = \Gamma V t$

On en déduit : $\boxed{\Sigma\left(t\right) = 1 - \exp\left(-\Gamma V t\right)}$

Q9 La pression de cavitation est déduite de : $\Gamma V\tau = \ln 2$

D'où : $$\Gamma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E^*}{k_B T}\right) V\tau = \ln 2$$

Ainsi : $$\Delta E^* = -\ln\left(\frac{\ln 2}{\Gamma_0 V\tau}\right).k_B T$$

Donc : $$\frac{4\pi}{3}\gamma r_c^2 = -\ln\left(\frac{\ln 2}{\Gamma_0 V\tau}\right).k_B T$$

Soit : $$\frac{16\pi}{3}\frac{\gamma^3}{\left(p_{sat}-p_c\right)^2} = -\ln\left(\frac{\ln 2}{\Gamma_0 V\tau}\right).k_B T$$

Par conséquent : $$\boxed{p_c = p_{sat} - \sqrt{\frac{16\pi\gamma^3}{3k_B T \ln\left(\frac{\Gamma_0 V\tau}{\ln 2}\right)}}}$$

Si la température diminue, cette pression peut s'annuler et devenir **négative**.

A une température tendant vers 0, la pression précédente tendrait vers $-\infty$.

Pour maximiser $|p_c|$ avec $p_c < 0$, il faut choisir un **petit volume** et une durée τ faible.

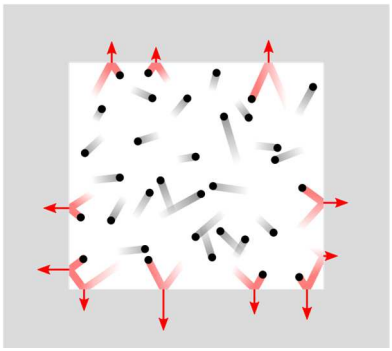
2.2 Pression négative

Q10 La pression exercée par un gaz parfait sur une paroi peut s'interpréter en termes de **transfert de quantité de mouvement** au cours de chocs molécules / paroi. Dans le cadre d'un modèle très simplifié, la vitesse d'une molécule appartient à $\left\{-u\vec{e}_x, u\vec{e}_x, -u\vec{e}_y, u\vec{e}_y, -u\vec{e}_z, u\vec{e}_z\right\}$, ces six valeurs étant équiprobables. On note n la densité volumique de molécules e masse m. En considérant que la normale à la paroi (orientée du gaz vers la paroi) est $\vec{e}_z$, la quantité de mouvement cédée pendant la durée dt par les molécules à un élément de paroi d'aire dS est :

$$-\frac{1}{6}ndSudt\left(-mu\vec{e}_z - \left(mu\vec{e}_z\right)\right) = \frac{1}{3}nmu^2 dSdt\vec{e}_z$$

Ce transfert de quantité de mouvement est associé à une force $\frac{1}{3}nmu^2 dS\vec{e}_z = \frac{1}{3}nmu^2\vec{dS}$ exercée sur la paroi.

On en déduit la **pression cinétique** : $\boxed{P = \frac{1}{3}nmu^2}$ toujours positive.



Q11 A basse température, l'énergie d'agitation thermique est faible et elle peut être dominée (en valeur absolue) par l'**énergie d'interaction attractive** entre molécules.

Dans l'équation d'état du **gaz de Van der Waals**, la contribution des interactions attractives apparaît dans le terme de « pression interne » $-a\frac{N^2}{V^2}$:

$$p=\frac{Nk_BT}{V-Nb}-a\frac{N^2}{V^2}$$

La pression (totale) devient donc négative à une température inférieure à :

$$\boxed{T^*=\frac{a}{k_B}\frac{N}{V^2}(V-Nb)}$$

Q12 En supposant la sève incompressible, la pression est donnée par la **loi de Pascal**, soit en fonction de l'altitude z :

$$\boxed{p(z)=p_0-\rho g z}$$

Elle devient négative au-delà de : $\boxed{z_c=\frac{p_0}{\rho g}}$ AN $\boxed{z_c=10m}$

Il existe des arbres de plus grande hauteur et une pression négative est donc envisageable.

3 Etude expérimentale des états métastables de l'hélium

3.1 Mesure de ρ par interférométrie

Q13 On représente une évolution sinusoïdale de moyenne temporelle p_{sat} et d'amplitude δp. L'état est métastable sur des demi-périodes pendant lesquelles $p < p_{sat}$. La durée caractéristique d'un état métastable est donc :

$$\frac{1}{2f} = 5.10^{-7} s$$

Au cours de cette durée, l'onde sonore se propage sur :

$$\delta x = \frac{c}{2f} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\delta x \simeq 10^{-4} m}$$

Si $\delta p > p_{sat}$, la pression devient négative dans l'hélium pendant une fraction de (demi-)période.

Q14 D'après la relation de Clausius-Mossoti : $\rho = \frac{3m_{He}}{4\pi\alpha}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2+2}$

Si $n = 1+\varepsilon$ avec $|\varepsilon| << 1$: $\frac{(n-1)(n+1)}{n^2+2} = \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{3+2\varepsilon+\varepsilon^2}$

A l'ordre 1 en ε : $\frac{(n-1)(n+1)}{n^2+2} \simeq \frac{2}{3}\varepsilon$

Ainsi : $\rho \simeq \frac{m_{He}}{2\pi\alpha}(n-1)$

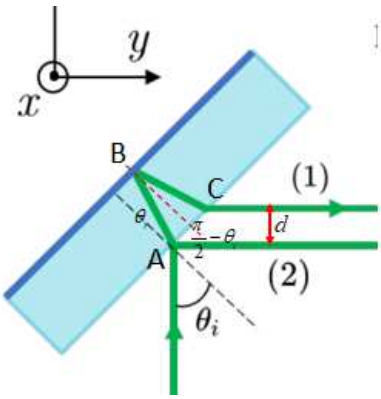
On en déduit, par différenciation logarithmique : $\boxed{\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta n}{n-1}}$

Q15 Un rayon incident est divisé en deux rayons qui empruntent des chemins différents et il s'agit donc d'un **diviseur d'amplitude**.

Q16 En s'appuyant sur la figure ci-dessous : $d = AC\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$

Cependant : $AC = 2e\tan\theta_r$

On en déduit : $d = 2e\dfrac{\sin\theta_r}{\cos\theta_r}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_i\right)$ soit $d = 2e\dfrac{\sin\theta_r}{\cos\theta_r}\cos\theta_i$



Cependant : $\cos\theta_r = \sqrt{1-\sin^2\theta_r}$

D'après la deuxième loi de Snell-Descartes de la réfraction : $\sin\theta_i = n_v \sin\theta_r$

D'où : $\cos\theta_r = \sqrt{1-\dfrac{1}{n_v^2}\sin^2\theta_i}$

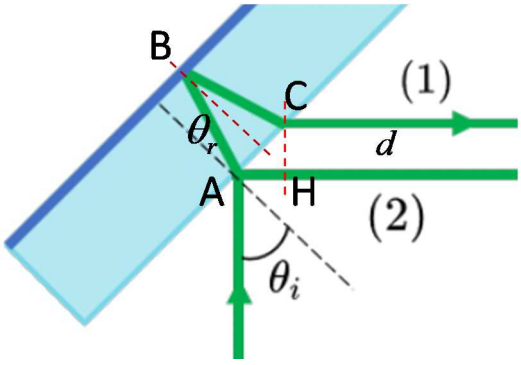
Ainsi : $d = 2e\dfrac{n_v\sin\theta_r}{\sqrt{n_v^2-\sin^2\theta_i}}\cos\theta_i$

En utilisant de nouveau la deuxième loi de Snell-Descartes relative à la réfraction :

$$d = 2e\frac{\sin\theta_i}{\sqrt{n_v^2-\sin^2\theta_i}}\cos\theta_i$$

Finalement : $\boxed{d = e\dfrac{\sin 2\theta_i}{\sqrt{n_v^2-\sin^2\theta_i}}}$

Q17 Il s'agit d'établir l'expression de la différence de marche dans le cas d'une lame mince en réflexion (figure ci-dessous).



La différence de marche s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta_{1/2} &= [\infty ABC\infty'] - [\infty AH\infty'] \\ &= \left([\infty A] + [AB] + [BC] + [C\infty']\right) - \left([\infty A] + [AH] + [H\infty']\right) \\ &= [AB] + [BC] - [AH] + \left([C\infty'] - [H\infty']\right)\end{aligned}$$

La dernière parenthèse est nulle par application du principe du retour inverse de la lumière et du théorème de Malus.

Il reste donc : $\delta_{1/2} = n_v\left(AB + BC\right) - AH$

Cependant : $AB = BC = \dfrac{e}{\cos\theta_r}$ et $AH = 2e\tan\theta_r \sin\theta_i$

Ainsi : $AH = 2n_v e\dfrac{\sin^2\theta_r}{\cos\theta_r}$

D'où : $\delta_{1/2} = 2n_v e\dfrac{1-\sin^2\theta_r}{\cos\theta_r}$ donc $\delta_{1/2} = 2n_v e\cos\theta_r$

On en déduit le déphasage introduit sur le chemin (1) par rapport au chemin (2) :

$$\Phi_{1/2}\left(\theta_i\right) = -\frac{4\pi}{\lambda} n_v e\cos\theta_r$$

Soit : $\boxed{\Phi_{1/2}\left(\theta_i\right) = -\dfrac{4\pi}{\lambda} e\sqrt{n_v^2 - \sin^2\theta_i}}$ pour la première lame.

De même : $\boxed{\Phi_{1/2}\left(\theta_i\right) = \dfrac{4\pi}{\lambda} e\sqrt{n_v^2 - \sin^2\theta_i'}}$ pour la deuxième lame.

En l'absence d'onde sonore, il n'y a donc pas de déphasage entre les deux faisceaux lorsqu'ils sont recombinés.

Q18 Si les deux lames ne sont pas parallèles :

$$\delta\Phi = \frac{4\pi}{\lambda} n_v e\left(\sqrt{n_v^2 - \sin^2\theta_i'} - \sqrt{n_v^2 - \sin^2\theta_i}\right)$$

Soit, en supposant l'écart au parallélisme assez faible :

$$\delta\Phi = -\frac{4\pi}{\lambda} n_v e\frac{2\sin\theta_i\cos\theta_i}{2\sqrt{n_v^2 - \sin^2\theta_i}}\delta\theta$$

D'où : $\boxed{\delta\Phi = -2\pi \frac{d}{\lambda} \delta\theta}$

Q19 La différence de phase s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \int_{-A(x,z)}^{A(x,z)} \frac{2\pi}{\lambda} \delta n.dy \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \int_{-A(x,z)}^{A(x,z)} \delta n\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right).dy \\ &= \frac{4\pi}{\lambda} \int_{0}^{A(x,z)} \delta n\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right).dy\end{aligned}$$

3.2 Mesure de la fréquence Brillouin

Q20a Dans domaine de l'approximation conique du faisceau gaussien, ce dernier a une demi-ouverture angulaire : $\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_{\min}}$

On en déduit : $\boxed{w_{\min} = \frac{\lambda}{\pi\theta_0}}$

AN $w_{\min} = \frac{10^{-6} m}{7\pi.10^{-2} rad}$ soit $\boxed{w_{\min} = 5.10^{-6} m}$

Dans **Q13**, on a évalué la longueur caractéristique du domaine métastable à $\delta x \simeq 10^{-4} m$. On a donc : $\frac{\delta x}{w_{\min}} = 20$ ce qui permet d'avoir une résolution spatiale du domaine d'hélium liquide métastable qui semble assez limitée (20 « pixels » !).

Q20b La **longueur de Rayleigh** du faisceau gaussien est :

$\boxed{L_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}}$ soit $\boxed{L_R \simeq 8.10^{-4} m}$

La région métastable est observée au voisinage du plan du waist du faisceau. L'étendue spatiale de la région étudiée est environ 8 fois plus faible que la longueur de Rayleigh. Il est donc raisonnable de considérer que l'on se trouve dans le domaine d'approximation cylindrique du faisceau.

Q21a Pour la lumière dans l'hélium liquide, d'indice optique supposé suffisamment proche de 1 : $\boxed{\left\|\vec{k_i}\right\| = \frac{\omega_i}{c}}$

Pour le son dans l'hélium liquide : $\boxed{\left\|\overrightarrow{q_B}\right\| = \frac{\Omega_B}{v}}$

Q21b La **conservation de l'impulsion** {photon incident + phonon → photon diffusé} s'écrit :

$$\hbar\overrightarrow{k_1} + \hbar\overrightarrow{q_B} = \hbar\overrightarrow{k_2} \qquad \text{(A)}$$

La **conservation de l'énergie** de {photon incident + phonon → photon diffusé} implique :

$$\hbar\omega_1 + \hbar\Omega_B = \hbar\omega_2 \qquad \text{(B)}$$

Q21c On déduit de (1) : $\overrightarrow{k_2} - \overrightarrow{k_1} = \overrightarrow{q_B}$

D'où : $\overrightarrow{k_2}^2 + \overrightarrow{k_1}^2 - 2\overrightarrow{k_1}.\overrightarrow{k_2} = \overrightarrow{q_B}^2$

Soit, d'après **Q21a** : $\left(\frac{\omega_2}{c}\right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2 - 2\frac{\omega_1\omega_2}{c^2}\cos\theta = \frac{\Omega_B^2}{v^2}$ (C)

Cependant (B) implique : $\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 = \Omega_B^2$

Donc : $\left(\frac{\omega_2}{c}\right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2 - 2\frac{\omega_1\omega_2}{c^2} = \frac{\Omega_B^2}{c^2}$ (D)

On retranche membre à membre (D) de (C) : $2\frac{\omega_1\omega_2}{c^2}\left(1-\cos\theta\right) = \frac{\Omega_B^2}{v^2} - \frac{\Omega_B^2}{c^2}$

Cependant : $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega$ et $v << c$

D'où : $4\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \simeq \frac{\Omega_B^2}{v^2}$

Finalement : $\boxed{\Omega_B = 2\omega\frac{v}{c}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Pour un angle de diffusion $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$: $f_B \simeq 2f\frac{v}{c}\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda}$

D'où : $f_B \simeq 1,4\times\frac{200 m.s^{-1}}{10^{-6} m}$ soit $\boxed{f_B \simeq 3.10^8 Hz}$

On a donc effectivement : $\boxed{f_B << f = \frac{c}{\lambda} = 3.10^{14}\,Hz}$

Q22 On reporte l'expression $\underline{\rho_1}\left(\vec{r},t\right) = \underline{\delta\rho}\exp\left(i\left(\Omega_B t - \vec{Q}.\vec{r}\right)\right)$ dans l'équation de propagation, d'où : $\left(-\Omega_B^2 - \Gamma'\left(-Q^2\right)i\Omega_B + v^2Q^2\right)\underline{\rho_1} = 0$

On en déduit la relation de dispersion : $Q^2 = \frac{\Omega_B^2}{v^2 + i\Gamma'\Omega_B}$

Ainsi : $Q^2 = \frac{\Omega_B^2}{v^2\left(1 + i\frac{\Gamma'\Omega_B}{v^2}\right)}$

et au premier ordre : $\boxed{Q \simeq \frac{\Omega_B}{v}\left(1 - i\frac{\Gamma'\Omega_B}{2v^2}\right)}$

de la forme : $Q = a - ib$ en identifiant : $\boxed{a \simeq \frac{\Omega_B}{v}}$ et $\boxed{b \simeq \frac{\Gamma'\Omega_B^2}{2v^3}}$

Q23 La pression strictive est négative et quadratique en l'amplitude du champ : le fluide est « attiré » vers les régions de pressions plus faibles, qui sont celles où le champ électrostatique est plus intense. L'effet de cette pression est donc de **contracter le milieu**.

La force volumique a pour expression : $\boxed{-\overrightarrow{grad}\,p_{st} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e\overrightarrow{grad}\left(\vec{E}^2\right)}$

Q24 Etant donné l'expression du champ électrique :

$$< \vec{E}.\vec{E} >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*\right) \quad \text{soit} \quad < \vec{E}.\vec{E} >= \frac{1}{2}\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^*_{1,0}(z)$$

Ainsi : $\boxed{p_{st} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0\gamma_e\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^*_{1,0}(z)}$

Q25 En superposant les deux champs électriques :

$$< \vec{E}.\vec{E} >=< \vec{E_1}.\vec{E_1} > + < \vec{E_2}.\vec{E_2} > +2 < \vec{E_1}.\vec{E_2} >$$

La moyenne étant réalisée sur une durée $\tau >> \frac{2\pi}{\omega_2}$, mais telle que $\tau << \frac{2\pi}{\Omega}$:

$$\boxed{< \vec{E}.\vec{E} >= \frac{1}{2}\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^*_{1,0}(z) + \frac{1}{2}\underline{\vec{E}}_{2,0}(z).\underline{\vec{E}}^*_{2,0}(z) + \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^*_{2,0}(z)\exp\left(i\left(\Omega t - qz\right)\right)\right)}$$

Le dernier terme peut s'écrire : $\left|\underline{\vec{E}}_{1,0}(z)\right|\left|\underline{\vec{E}}_{2,0}(z)\right|\cos\left(\Omega t - qz + \varphi_1 - \varphi_2\right)$

Q26 D'après l'énoncé, on peut négliger les dérivées selon z des deux premiers termes et du produit $\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^{*}_{2,0}(z)$. Il reste donc :

$$\overrightarrow{grad} < \vec{E}.\vec{E} > \simeq \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^{*}_{2,0}(z)\overrightarrow{grad}\left(\exp\left(i\left(\Omega t - qz\right)\right)\right)\right)$$

Soit : $$\overrightarrow{grad} < \vec{E}.\vec{E} > \simeq -iq\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^{*}_{2,0}(z)\exp\left(i\left(\Omega t - qz\right)\right)\right)\overrightarrow{u_z}$$

On en déduit la **force volumique** de pression strictive :

$$\boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e\overrightarrow{grad} < \vec{E}.\vec{E} > \simeq -\frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e iq\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^{*}_{2,0}(z)\exp\left(i\left(\Omega t - qz\right)\right)\overrightarrow{u_z}\right)}$$

Puis le terme de forçage :

$$div\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e\overrightarrow{grad} < \vec{E}.\vec{E} >\right) \simeq -\frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e iq\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^{*}_{2,0}(z)\,div\left(\exp\left(i\left(\Omega t - qz\right)\right)\overrightarrow{u_z}\right)\right)$$

Soit : $$\boxed{div\,\vec{f} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e q^2\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^{*}_{2,0}(z)\exp\left(i\left(\Omega t - qz\right)\right)\right)}$$

Q27 On reporte sa représentation complexe $-\frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e q^2\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^{*}_{2,0}(z)\exp\left(i\left(\Omega t - qz\right)\right)$ dans l'équation de propagation, ainsi que la représentation complexe $\rho_0 + \underline{\delta\rho}\exp\left(i\left(\Omega t - qz\right)\right)$ de la masse volumique, d'où :

$$\left(-\Omega^2 - \Gamma'\left(-q^2\right)i\Omega + v^2q^2\right)\underline{\delta\rho} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e q^2\underline{\vec{E}}_{1,0}(z).\underline{\vec{E}}^{*}_{2,0}(z)$$

On retrouve l'expression demandée en posant :

$$\eta(q,\Omega) = \frac{q^2}{\Omega^2 - \left(v^2 + i\Gamma'\Omega\right)q^2}$$

En posant $\Gamma_B = q^2\Gamma'$ et $\Omega_B = qv$: $$\boxed{\eta(q,\Omega) = \frac{q^2}{\Omega^2 - i\Gamma_B\Omega - \Omega_B^2}}$$

Q28 On déduit de l'expression de I_2 :

$$\frac{dI_2}{dz} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left(\underline{\vec{E}}_{2,0}\frac{d\underline{\vec{E}}^*_{2,0}}{dz} + \underline{\vec{E}}^*_{2,0}\frac{d\underline{\vec{E}}_{2,0}}{dz}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left(-\underline{\vec{E}}_{2,0}\frac{i\omega_2\gamma_e}{4c\rho_0}\underline{\vec{E}}^*_{1,0}\underline{\delta\rho} + \underline{\vec{E}}^*_{2,0}\frac{i\omega_2\gamma_e}{4c\rho_0}\underline{\overrightarrow{E_{1,0}}}\,\underline{\delta\rho}^*\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\left(-\underline{\vec{E}}_{2,0}.\frac{i\omega_2\gamma_e}{4c\rho_0}\underline{\vec{E}}^*_{1,0}\frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e\eta(q,\Omega)\underline{\vec{E}}_{1,0}.\underline{\vec{E}}^*_{2,0} + \underline{\vec{E}}^*_{2,0}.\frac{i\omega_2\gamma_e}{4c\rho_0}\underline{\overrightarrow{E_{1,0}}}\frac{1}{2}\varepsilon_0\gamma_e\eta^*(q,\Omega)\underline{\vec{E}}_{2,0}.\underline{\vec{E}}^*_{1,0}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0^2\gamma_e^2\omega_2}{16\rho_0}i\left(-\underline{\vec{E}}_{2,0}.\underline{\vec{E}}^*_{1,0}\eta(q,\Omega)\underline{\vec{E}}_{1,0}.\underline{\vec{E}}^*_{2,0} + \underline{\vec{E}}^*_{2,0}.\underline{\overrightarrow{E_{1,0}}}\eta^*(q,\Omega)\underline{\vec{E}}_{2,0}.\underline{\vec{E}}^*_{1,0}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0^2\gamma_e^2\omega_2}{16\rho_0}i\left(-\underline{\vec{E}}_{2,0}.\underline{\vec{E}}^*_{1,0}\eta(q,\Omega)\underline{\vec{E}}_{1,0}.\underline{\vec{E}}^*_{2,0} + \underline{\vec{E}}^*_{2,0}.\underline{\overrightarrow{E_{1,0}}}\eta^*(q,\Omega)\underline{\vec{E}}_{2,0}.\underline{\vec{E}}^*_{1,0}\right)$$

Les champs électriques sont colinéaires, d'où : $\left(\underline{\vec{E}}_{2,0}.\underline{\vec{E}}^*_{1,0}\right)\left(\underline{\vec{E}}_{1,0}.\underline{\vec{E}}^*_{2,0}\right) = \left|\underline{\vec{E}}_{1,0}\right|^2\left|\underline{\vec{E}}_{2,0}\right|^2$

Par conséquent : $\frac{dI_2}{dz} = \frac{\varepsilon_0^2\gamma_e^2\omega_2}{16\rho_0}i\left(\eta^*(q,\Omega)-\eta(q,\Omega)\right)\left|\underline{\vec{E}}_{1,0}\right|^2\left|\underline{\vec{E}}_{2,0}\right|^2$

Ce qui est proportionnel à : $\boxed{i\omega_2\left(-\eta(q,\Omega)+\eta^*(q,\Omega)\right)I_1I_2 = 2\omega_2\,\mathrm{Im}\left(\eta(q,\Omega)\right)I_1I_2}$

D'après **Q27** : $\mathrm{Im}\left(\eta(q,\Omega)\right) = \frac{q^2\Gamma_B\Omega}{\left(\Omega^2-\Omega_B^2\right)^2+\left(\Gamma_B\Omega\right)^2}$

Ou encore : $\mathrm{Im}\left(\eta(q,\Omega)\right) = \frac{1}{\Gamma'}\frac{\Gamma_B^2\Omega}{\left(\Omega^2-\Omega_B^2\right)^2+\left(\Gamma_B\Omega\right)^2}$

Avec les approximations suggérées : $\mathrm{Im}\left(\eta(q,\Omega)\right) = \frac{1}{\Gamma'\Omega_B}\frac{\Gamma_B^2}{4\Delta\Omega^2+\left(\Gamma_B\right)^2}$

Soit : $\mathrm{Im}\left(\eta(q,\Omega)\right) = \frac{1}{\Gamma'\Omega_B}\frac{\left(\frac{\Gamma_B}{2}\right)^2}{\Delta\Omega^2+\left(\frac{\Gamma_B}{2}\right)^2}$

Il y a donc un problème de signe (l'un des signes de l'équation (10) serait-il inexact ?). On retrouve effectivement une expression : $\boxed{\frac{dI_2}{dz} = -g_\infty\frac{\left(\frac{\Gamma_B}{2}\right)^2}{\Delta\Omega^2+\left(\frac{\Gamma_B}{2}\right)^2}I_1I_2}$ **mais avec les calculs précédents, on obtient un g_∞ négatif !**

Q29 Si $I_1(z)$ est quasiment uniforme : $\frac{dI_2}{dz} \simeq -KI_2(z)$ avec $K = g_\infty \frac{\left(\frac{\Gamma_B}{2}\right)^2}{\Delta\Omega^2 + \left(\frac{\Gamma_B}{2}\right)^2} I_1$

$I_2(z)$ est donc de la forme : $I_2(z) = I_2(0)\exp(-Kz)$

L'onde 2 se propage **selon les *z* décroissants** et il s'agit donc ici d'une **amplification**.

A la résonance, K est maximum et l'amplification est plus prononcée.

Hors résonance, on peut supposer K faible, donc $I_2(z)$ quasiment uniforme.

On fait varier la pulsation ω_2 jusqu'à obtenir l'amplification la plus marquée de $I_2(z)$.

Q30 On veut obtenir : $\exp(g_\infty I_1 \delta) = 1 + 10^{-2}$

Soit : $g_\infty I_1 \delta \simeq 10^{-2}$

On en déduit : $\boxed{I_1 \simeq 10^{12} W.m^{-2}}$

Cette intensité est très élevée ! Il faut probablement utiliser un **laser impulsionnel** concentrant une énergie non négligeable sur une durée très brève. Il faut aussi utiliser une optique permettant de focaliser fortement le faisceau.

Q31 La durée de l'impulsion laser doit être inférieure à la durée de vie de l'état métastable, soit : $\tau_l < \frac{\delta}{v} \simeq 20ns$

Plus la durée de l'impulsion est courte, plus **le spectre est large**.

Ici, la résolution spectrale serait de l'ordre de $\frac{1}{\tau_l} \simeq 50MHz$, que l'on peut comparer à $f_B \simeq 300MHz$. La résolution spectrale est d'autant plus limitée que l'impulsion est courte.

Q32 On déduit de l'expression de la célérité : $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) = v^2$

Cependant : $v = f_B(\rho)\lambda$

On a ainsi : $\boxed{p(\rho) = p_{sat} + \int_{\rho(p_{sat})}^{\rho} f_B^2(\rho')\lambda^2 d\rho'}$

(ce qui suppose cependant d'observer à $\theta = Cte$).