

CHANGEMENTS DE REFERENTIEL DYNAMIQUE DANS UN REFERENTIEL NON GALILEEN

Typographie : les vecteurs sont notés en gras>.

Indications et objectifs.

Les exercices 1 à 5 font intervenir un référentiel galiléen en translation pure, les suivants en rotation pure. L'exercice 3 est une résolution de problème qu'il convient donc absolument de chercher. Les exercices 3 et 7 sont un peu plus difficiles car peu guidés. Dans ce dernier il faut prendre des initiatives pour aboutir à des équations du mouvement linéaires.

Exercice 1. Pendule dans un chariot (**)

Sur un chariot se déplaçant le long d'une droite horizontale d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération (algébrique) a , on suspend à l'extrémité d'un fil de longueur l une masse m .

- a. Ecrire l'équation du mouvement du pendule dans le référentiel lié au chariot.
- b. Donner la ou les positions d'équilibre du pendule.

Un passager de ce chariot étudie les petites oscillations du pendule au voisinage de son équilibre stable. On néglige les frottements.

- c. Quelle période mesure-t-il ? Proposer une application pratique de ce phénomène.

Réponses : b) $\tan\theta = -a/g$; c) $T = 2\pi/\omega$ avec $\omega^2 = g/(l(1+(a/g)^2)^{1/2})$

Exercice 2. Fermeture d'une porte de voiture (**).

Une voiture prend une accélération constante $a = \gamma \mathbf{u}_x$. La portière AB est restée ouverte, avec un angle initial $\theta_0 = \pi/2$. Elle est modélisée par une plaque homogène de masse m , de largeur $2a$ et de hauteur h . Son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation (Az) est $J = \frac{4ma^2}{3}$. La liaison est supposée pivot parfaite.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

2. Exprimer littéralement le temps nécessaire à la fermeture de la portière. On donne $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = 2,6$.

3. Estimer numériquement cette durée pour une voiture prenant une vitesse de 30 km.h⁻¹ en 5,0 s.

Réponses : 1) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3\gamma}{4a}\theta = 0$; 2) $\tau = 2,6\sqrt{\frac{2a}{3\gamma}}$

Exercice 3. Risque de basculement d'une caisse (***)

Un camion contient dans sa cargaison une caisse homogène de hauteur h à section carrée de côté a . Le transporteur étourdi ne l'ayant pas attachée, on étudie le risque que la caisse se renverse. Le camion arrive avec une vitesse V_0 sur un feu qui vient de passer au rouge. Le conducteur freine brutalement avec une décélération supposée constante.

Exprimer la distance de freinage minimale pour que la caisse ne bascule pas.

Données numériques : $h=2,0m$; $a=1,0m$; $V_0= 40 \text{ km/h}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

Indication : on pourra raisonner sur une situation correspondant au tout début du basculement et conclure.

Exercice4 : Résolution de problème :le port de la ceinture de sécurité ().**

Selon le principe d'inertie, un corps qui n'est soumis à aucune force est en mouvement rectiligne uniforme. C'est pourquoi un automobiliste qui ne porte pas de ceinture lors d'une collision est projeté contre le tableau de bord ou le pare-brise. Par contre, l'énergie acquise par le corps d'un conducteur attaché est évacuée par la ceinture de sécurité et la zone déformable du véhicule.

La force intervenant lors d'une collision à 30km/h seulement représente à peu près 20 fois le poids de l'automobiliste (environ 1500 kg). Il est dès lors impossible de se retenir par les bras. Les meilleurs haltérophiles soulèvent tout au plus environ 250 kg.

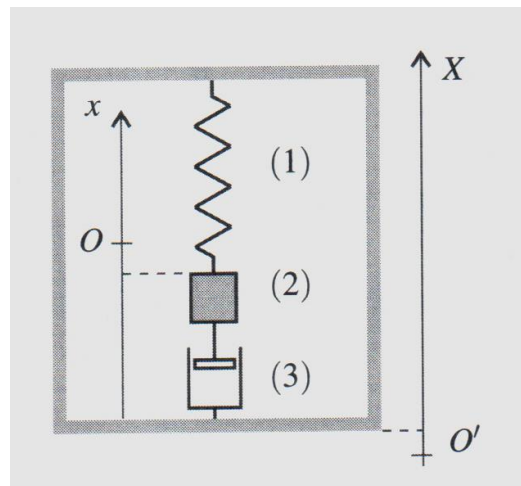


En vous basant sur un raisonnement physique détaillé, estimer la force à laquelle est soumis le conducteur lors d'une collision à 30 km.h⁻¹.

Exercice 5. Sismomètre (adapté Mines-Ponts PSI 2001) ().**

Les vecteurs sont notés en gras.

Le principe d'un sismomètre est schématisé par la figure ci-dessous. Un ressort (1) de masse négligeable, dont la réponse en élongation, linéaire, est caractérisée par une raideur k , est suspendu à un boîtier rigide lié au sol. Un solide (2), de masse m , est accroché à l'autre extrémité du ressort. Une partie de ce solide est solidaire d'un amortisseur (3) exerçant sur (2) la force de frottement fluide $\mathbf{f} = -h\mathbf{v}$, où h est une constante et $\mathbf{v}$ la vitesse de translation de (2) par rapport au boîtier.



Le passage d'une onde sismique provoque un mouvement du boîtier par rapport à un référentiel galiléen qui est repéré par sa coordonnée $X(t)$ le long de l'axe ($O'X$). Le mouvement de (2) par rapport au boîtier est repéré par sa coordonnée $x(t)$ sur une axe (Ox) fixe par rapport au boîtier dont l'origine O correspond au point d'attache de (2) dans sa position d'équilibre en l'absence de mouvement du boîtier. L'axe (Ox), comme l'axe ($O'X$), est vertical ascendant ; On étudie le mouvement de $x(t)$ de (2) provoqué par le mouvement du boîtier $X(t)$.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement suivante liant les variables $x(t)$ et $X(t)$. On introduira

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre du sismomètre et, par définition, $\tau = \sqrt{2} \frac{m}{h}$ la constante de temps relative à l'amortissement.

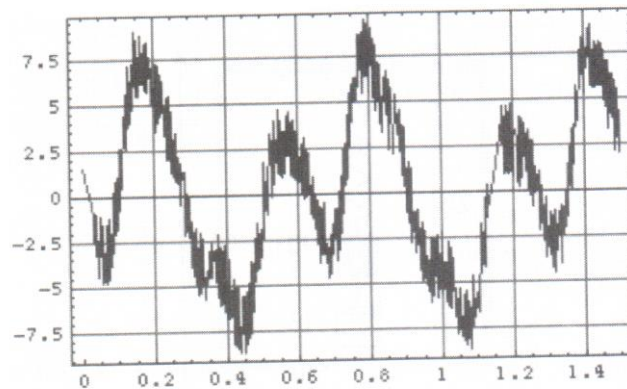
2. On considère une sonde sismique sinusoïdale et de pulsation ω . Etablir la fonction de transfert mécanique $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{x}{X}$.

3. On suppose désormais que $\omega_0\tau = 1$. Montrer que la fonction de transfert mécanique peut s'écrire :

$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\sqrt{2} \frac{\omega_0}{\omega}}$. Préciser le type de filtre et sa bande passante.

4. En déduire le gain $G_1(\omega)$ et la phase pour $\omega < \omega_0$?

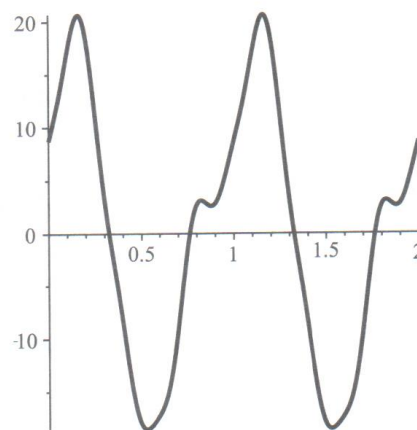
La pulsation propre du sismomètre étant $\omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$, cet appareil détecte une onde sismique sous la forme d'une fonction $x(t)$ périodique reproduite ci-dessous. L'amplitude est en unité arbitraire les abscisses en seconde.



L'application d'un algorithme de transformée de Fourier à $x(t)$ permet de calculer les amplitudes et les phases des cinq premiers termes de sa DSF.

5. Comment devrait-on procéder pour en déduire l'excitation $X(t)$?

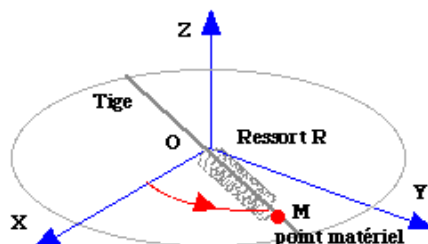
On reconstitue l'excitation et on obtient la représentation graphique suivante où les abscisses sont en secondes :



6. Commenter. Comment devrait-on modifier les caractéristiques du sismomètre pour que l'enregistrement de $x(t)$ permette de déduire directement $X(t)$?

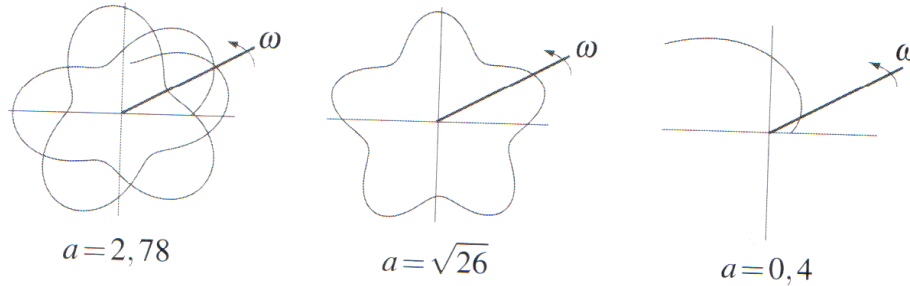
Exercice 6. Ressort tournant (**).

Une perle assimilable à un point matériel M de masse m coulisse dans un plan horizontal sur une tige représentée par un axe (Ox_m) . On néglige les frottements. Ce point est élastiquement lié au point O origine de la tige par un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . La tige est astreinte à tourner autour de l'axe vertical (Oz) à une vitesse angulaire ω_0 constante. On note R_g , le référentiel galiléen lié au repère (O, X, Y, Z) et R le référentiel lié à la tige dont le repère est (O, x, y, z) , (Ox) étant confondu avec la tige. On pose $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $a = \frac{\omega}{\omega_0}$. A l'instant initial le ressort n'est ni comprimé, ni tendu et la perle a une vitesse nulle par rapport à la tige.



1. Etablir l'équation du mouvement satisfaite par l'abscisse $x(t)$ du point M .

On donne l'allure des trajectoires de M pour différentes valeurs du paramètre a :



- Commenter l'allure de ces trajectoires. A quelle(s) condition(s) sur a la trajectoire de la perle est-elle fermée ?

Dans la suite on suppose que $a > 1$.

- Montrer que le ressort est toujours tendu.
- Déterminer la force que la tige exerce sur la perle.

Réponses : 1) $\ddot{x} + (a^2 - 1)\omega_0^2 x = a^2 \omega_0^2 l_0$; 3) résoudre et montrer que $x(t) > l_0$;

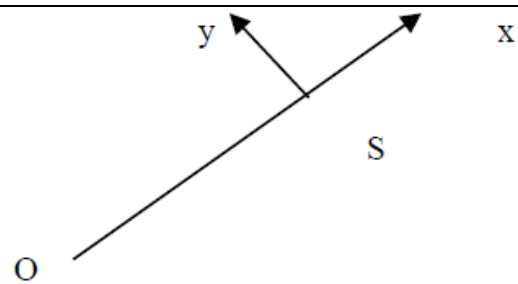
Exercice 7. Impesanteur.

On introduira toute notation utile en la définissant clairement.

Un satellite S est en mouvement circulaire à une distance r_0 du centre de la Terre.

- Déterminer sa vitesse angulaire ω dans le référentiel géocentrique.

Un cosmonaute lâche un outil à proximité de (S). On se place dans le référentiel R_S d'origine O (centre de la Terre) qui tourne avec (OS). On introduit l'axe (Sx) parallèle à (OS) et l'axe (Sy) perpendiculaire au précédent dans le plan du mouvement. On étudie le mouvement de l'outil dans RS . On posera $\vec{SM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



- Etablir les équations du mouvement.
- Donner la forme de la trajectoire selon les conditions initiales : $y(0) = a$, $\frac{dy}{dt}(0) = v_0$ ou $x(0) = a$, $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$, toutes les autres valeurs étant nulles.

Exercice 8. Une théorie de la formation de la Lune (Extrait Mines-Ponts 2023).

L'origine de la Lune a été soumise à de nombreuses hypothèses. Des hypothèses les plus folkloriques aux hypothèses les plus sérieuses, l'origine de la Lune est toujours soumise à controverses, malgré un consensus important de la communauté scientifique sur la théorie de l'impact.

La théorie de la fission est introduite par l'astronome Georges Darwin, fils du célèbre biologiste, à la fin du XIX^{ème} siècle. Dans cette théorie Darwin suppose que, lorsque la Terre était encore en formation et liquide, sa rotation a suffi à la déformer et à en expulser une partie. Ce morceau expulsé de la Terre serait à l'origine de la Lune. Darwin imaginait même que le grand océan pacifique était le vestige de cet évènement.

On a représenté sur la figure 2 ci-après les différentes phases de cette théorie : 1. La Terre non déformée, 2. La Terre déformée par rotation, 3. La création d'un bourrelet pré-lunaire et l'expulsion de la Lune et 4. La Lune créée.

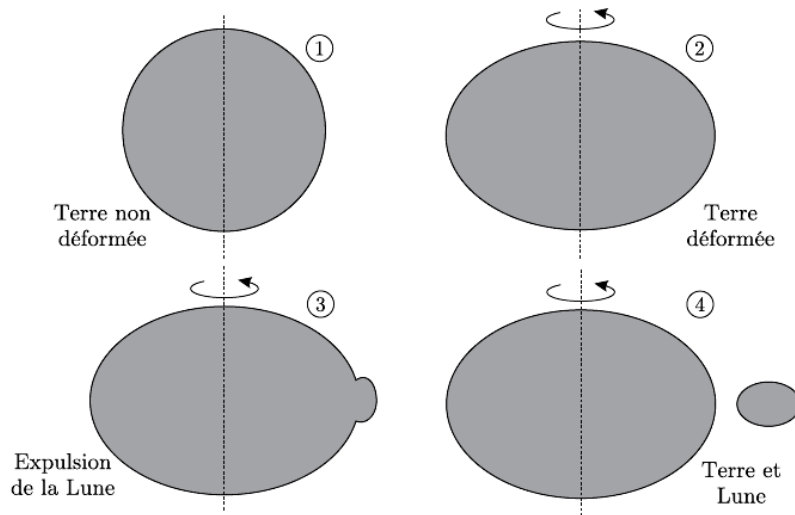


FIGURE 2 – Étapes de la formation de la Lune dans la théorie de Darwin de la fission.

- 15. Expliquer en quoi la plus faible densité de la Lune par rapport à la Terre est un argument en faveur de la théorie de la fission.

On étudie un morceau de roche terrestre de masse m , posé sur la surface de la Terre. On se place dans le référentiel terrestre non galiléen en coordonnées sphériques $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_\phi)$. On rappelle que la latitude d'un point de la surface terrestre est l'angle entre le rayon de la Terre en ce point et le plan de l'équateur, lui-même orthogonal à l'axe de rotation terrestre.

- 16. Rappeler le nom et l'expression générale de chacune des forces d'inertie. On précisera clairement la signification des différentes grandeurs introduites.
- 17. Réaliser un bilan des forces exercées sur l'élément de masse m posé à la surface de la Terre. Réaliser un schéma de la situation dans le cas où la masse considérée se trouve à la latitude λ .
- 18. Justifier la forme de la Terre déformée par rotation représentée sur la seconde étape de la figure 2. Déterminer une estimation de la variation ρ du rayon de la terre entre sa valeur au pôle et celle à l'équateur.

On considère désormais que la masse se situe au niveau de l'équateur.

- 19. En reprenant le bilan des forces sur la masse m dans ce cas, calculer la période de rotation terrestre nécessaire pour expulser de la Terre cette masse. Comparer cette valeur avec la période actuelle de rotation terrestre. Faire un commentaire sur la validité de la théorie de la fission.