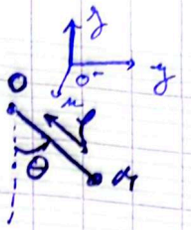
Exo 1 :



1) Bilan des forces sur le pendule :

- poids : $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$
- $\vec{T}$ tension
- $\vec{f_{in}} = -m\vec{a_o} = -ma\vec{u_y}$

$\vec{T}$ ne travaille pas donc les forces non conservatives ne travaillent pas donc $E_m = cste$.

$$E_m = E_c + E_{pesan} + E_{pfic}$$
$$= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl\cos\theta + m\vec{a}\cdot\vec{OH}$$
$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta + ma\vec{u_y}\cdot l(\sin\theta\vec{u_y} - \cos\theta\vec{u_z})$$

On dérive :

$$l\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}g\sin\theta + a\cos(\theta)\dot{\theta} = 0$$
$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta + a\cos(\theta) = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

b- La masse est à l'équilibre lorsque $\ddot{\theta} = 0$

alors $g\sin(\theta_{eq}) + a\cos(\theta_{eq}) = 0$

$$\Leftrightarrow \tan(\theta_{eq}) = -\frac{a}{g}$$

c- On pose $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$

On pose $f : \theta \mapsto g\sin(\theta) + a\cos(\theta)$

Taylor-Young

$$f(\theta_{eq} + \varepsilon) = f'(\theta_{eq})\varepsilon$$
$$= (g\cos(\theta_{eq}) - a\sin(\theta_{eq}))\varepsilon$$

Scanné avec CamScanner

or $1 + tan^2(\theta_{\vec{z}g}) = \frac{1}{\cos^2\theta_{\vec{z}g}}$

donc $\cos^2\theta_{\vec{z}g} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{g^2}}$ donc $\cos\theta_{\vec{z}g} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}$

$\sin^2\theta_{\vec{z}g} = 1 - \cos^2\theta_{\vec{z}g}$

$\sin\theta_{\vec{z}g} = \frac{-a}{\sqrt{g^2 + a^2}}$

donc $\ell\,\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g^2}{\sqrt{a^2+g^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+g^2}}\right)\varepsilon = 0$

$\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{\ell}\sqrt{a^2 + g^2}\;\varepsilon = 0$

donc $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}\sqrt{1 + \frac{a^2}{g^2}}$

Scanné avec CamScanner