ALGEBRE LINEAIRE
TD
2024-2025
Chapitre 1

941

1 Révisions de première année

Exercice 1 *(CCP 2022)*

1. Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{Z}\ \dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$
2. Soit $P = \dfrac{X(X+1)}{2}$.
   On a $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Les coefficients de P sont-ils des entiers relatifs ?
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-(k-1))}{k!}$.
   On pose $H_0(X) = 1$.
   Trouver une relation entre $H_k(X+1)$, $H_k(X)$ et $H_{k-1}(X)$.
4. Montrer que $(H_0, \dots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.
5. Calculer $H_k(n)$ en distinguant différents cas : $k = 0$, $0 \leq n \leq k-1$, $n \geq k$...
   En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_k[X]$.
   Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si, et seulement si, les coordonnées de P dans la base $(H_0, \dots, H_k)$ sont entières.

Exercice 2 *(Centrale 2008)*

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto \sin^n x$.
Quel est le rang de la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$? $(n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 3 *(Centrale 2004)*

Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe une base de F dont tous les polynômes ont même degré.
2. Idem avec des degrés strictement croissants.

Exercice 4 *(Mines 2018)*

Soit $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0 \right\}$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.
2. Déterminer $A \cap \left\{ (X-1)^k, k \in [\![0; n]\!] \right\}$ puis $A \cap \mathrm{Vect}\left(\left\{ (X-1)^k, k \in [\![0; n]\!] \right\} \right)$.
3. Donner une base de A.

Exercice 5 *(CCP 2016)*

Soit n un entier ≥ 2. Soit E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = P'(0) = 0$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Calculer la dimension de E.
2. Montrer que $\varphi : P \mapsto P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Exercice 6 *(Mines 2024)*

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P(0) = P'(0) = 0\}$.
Soit $\varphi \begin{cases} E \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{cases}$
Montrer que φ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 *(Mines 2015)*

Soient E un espace vectoriel (de dimension quelconque) et f un endomorphisme de E.

1. Montrer :
   $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(f) = \{0\}$
2. Montrer :
   $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2) \iff \mathrm{Im}\,(f) + \ker(f) = E$

Exercice 8 *(Mines 2016)*

Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.
Montrer que $p \begin{cases} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x - (x_1 + x_2 + x_3)v \end{cases}$ est une projection.
Donner son noyau et son image.

2 Produits et sommes d'espaces vectoriels

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\omega \in \mathbb{K}^*$.
Montrer : $\mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E) = \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$

Exercice 10 *(Mines 2018)*

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que $u^3 - u^2 + u - id_E = 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + Id_E) = E$.

Exercice 11 *(X 20 ?)*

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soient F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension p et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.
Quel est le rang de la famille $((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$?

Exercice 12 *(Centrale 98)*

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev de dimensions finies non nulles.
Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ une famille de sev de E.
Soit $h \in \mathcal{L}(E, F)$.
On définit l'application φ par $\varphi(h) = (h_{|E_1}, \ldots, h_{|E_n})$ où, pour tout $i \in \{1; \ldots; n\}$ $h_{|E_i}$ désigne la restriction de h à E_i.

1. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E_1, F) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_n, F)$.
2. Montrer :
   φ injective $\Longleftrightarrow E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$
3. Condition pour que φ soit surjective ?

Exercice 13 *(Centrale 2023)*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$.
Montrer :

$$w \text{ isomorphisme de } E \text{ sur } G \Longleftrightarrow \begin{cases} u \text{ injective} \\ v \text{ surjective} \\ \mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(v) = F \end{cases}$$

Le résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?

Exercice 14 *(Centrale 2023)*

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f admet un pseudo-inverse si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$.

1. Que dire de f si f est inversible ? est la fonction nulle ?
2. (a) On suppose que f admet un pseudo-inverse.
   Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$.

   (b) On suppose que $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$.
   Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}\,(f)$ admet un pseudo-inverse.
   En déduire que f admet un pseudo-inverse.
   Conclure.
3. Montrer que f admet un pseudo-inverse si, et seulement si, f et f^2 ont le même rang.