ALGEBRE LINEAIRE
TD
2024-2025
Chapitre 1
Correction

941

1 Révisions de première année

Exercice 1 *(CCP 2022)*

1. Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{Z}\ \dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$
2. Soit $P = \dfrac{X(X+1)}{2}$.
   On a $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Les coefficients de P sont-ils des entiers relatifs ?
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-(k-1))}{k!}$.
   On pose $H_0(X) = 1$.
   Trouver une relation entre $H_k(X+1)$, $H_k(X)$ et $H_{k-1}(X)$.
4. Montrer que $(H_0, \dots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.
5. Calculer $H_k(n)$ en distinguant différents cas : $k = 0$, $0 \le n \le k-1$, $n \ge k$...
   En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_k[X]$.
   Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si, et seulement si, les coordonnées de P dans la base $(H_0, \dots, H_k)$ sont entières.

Correction

1. Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$ et $\dfrac{n(n+1)}{2} = p(2p+1) \in \mathbb{Z}$.
   Si n est impair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p+1$ et $\dfrac{n(n+1)}{2} = (p+1)(2p+1) \in \mathbb{Z}$.
2. $\dfrac{X(X+1)}{2} = \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$ n'est pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
3. Soit $k \in [\![2; +\infty[\![$.

$$\begin{aligned}
H_k(X+1)-H_k(X) &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{l=0}^{k-1}(X+1-l)-\prod_{l=0}^{k-1}(X-l)\right)\\
&= \frac{1}{k!}\left(\prod_{l=-1}^{k-2}(X-l)-\prod_{l=0}^{k-1}(X-l)\right)\\
&= (X+1-(X-k+1))\frac{1}{k!}\left(\prod_{l=0}^{k-2}(X-l)\right)\\
&= \frac{k}{k!}\left(\prod_{l=0}^{k-2}(X-l)\right)=\frac{1}{(k-1)!}\left(\prod_{l=0}^{k-2}(X-l)\right)\\
&= H_{k-1}(X)
\end{aligned}$$

$$H_1(X+1)-H_1(X) = X+1-X=1=H_0(X)$$

4. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, H_l est de degré l.
   Les polynômes $H_0,\dots,H_k$ sont donc tous dans $\mathbb{R}_k[X]$.
   Comme leurs degrés sont deux à deux distincts, la famille $(H_0,\dots,H_k)$ est libre. Comme elle a $k+1=\dim(\mathbb{R}_k[X])$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.
5. $\forall n\in\mathbb{N}\ H_0(n)=1$
   $\forall k\in\mathbb{N}^*\ \forall n\in [\![0;k-1]\!]\ H_k(n)=0$
   $\forall k\in\mathbb{N}^*\ \forall n\in [\![k;+\infty[\![\ H_k(n)=\binom{n}{k}$

$$\begin{aligned}
\forall k\in\mathbb{N}^*\ \forall n\in\mathbb{Z}_-^*\ H_k(n) &= \frac{-m(-m-1)\dots(-m-(k-1))}{k!} \text{ avec } m=-n\in\mathbb{N}^*\\
&= (-1)^k\frac{(m+k-1)(m+k-2)\dots m}{k!}=(-1)^k\binom{m+k-1}{m-1}
\end{aligned}$$

   Comme dans tous les cas on trouve un entier relatif, $H_k(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.
6. D'après la question précédente, si les coordonnées de P dans la base $(H_0,\dots,H_k)$ sont entières alors $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.
   On montre la réciproque par récurrence sur k.
   Soit $P\in\mathbb{C}_0[X]$ tq $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.
   $P=c_0H_0=c_0$.
   $c_0=P(0)\in\mathbb{Z}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(k-1)$ vraie.
   Soit $P=\sum_{l=0}^{k}c_lH_l\in\mathbb{C}_k[X]$ tel que $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.
   $P(X+1)-P(X)=\sum_{l=1}^{k}c_lH_{l-1}(X)=\sum_{l=0}^{k-1}c_{l+1}H_l$
   $P(X+1)-P(X)$ est également à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc d'après l'hypothèse de récurrence : $\forall l\in[\![1;k]\!]\ c_l\in\mathbb{Z}$.
   Enfin $c_0=P(0)\in\mathbb{Z}$ $(\forall l\geq 1\ H_0(l)=0)$

Exercice 2 *(Centrale 2008)*

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto \sin^n x$.
Quel est le rang de la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$? ($n \in \mathbb{N}^*$)

Correction
La réponse est n ie qu'il s'agit de montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i (\sin(x))^i = 0$
Or lorsque x décrit $\mathbb{R}$, $\sin(x)$ décrit $[-1; 1]$ donc :
$\forall t \in [-1; 1]$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i t^i = 0$
Le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i X^i$ a une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.
Donc tous ses coefficients sont nuls ie :
$\forall i \in [\![1; n]\!]$ $a_i = 0$
La famille est bien libre.

Pour aller plus loin :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : x \mapsto \sin(nx)$.
Quel est le rang de la famille $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$?

On va montrer que cette famille aussi est libre.
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k g_k = 0$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ 0 &= \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\mathrm{e}^{ikx} - \mathrm{e}^{-ikx}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^{ikx} - \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^{-ikx}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-inx}}{2i}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^{i(k+n)x} - \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^{i(n-k)x}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-inx}}{2i}\left(\sum_{k=n+1}^{2n} a_{k-n} \mathrm{e}^{ikx} - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \mathrm{e}^{ikx}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-inx}}{2i} P\left(\mathrm{e}^{ix}\right)
\end{aligned}$$

avec $P = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_{k-n} X^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} X^k \in \mathbb{C}[X]$
Tous les complexes de module 1 sont racines de P donc P a une infinité de racines.
On en déduit que P est le polynôme nul. Ses coefficients sont donc tous nuls et $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Autre méthode

$$\begin{aligned}
\forall l \in [\![1;k]\!]\ 0 &= \int_0^{2\pi} \sin(lt)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kt)\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \sin(lt)\sin(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \left(\cos((l-k)t) - \cos((l+k)t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{a_l}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n} a_k \left[\frac{\sin((l-k)t)}{l-k}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k\left[\frac{\sin((l+k)t)}{l+k}\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi a_l
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $h_n : x \mapsto \sin(n+x)$.
Quel est le rang de la famille $(h_i)_{1\leq i\leq n}$?
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ \sin(n+x) = \sin(n)\cos(x) + \cos(n)\sin(x)$
Les fonctions h_i sont toutes combinaisons linéaires de sin et de cos donc le rang cherché est inférieur ou égal à 2.
Si $n = 1$, alors h_1 n'étant pas la fonction nulle, le rang cherché est 1.
Si $n \geq 2$, les fonctions h_1 et h_2 étant linéairement indépendantes, le rang cherché est 2.
Il reste à montrer que (h_1, h_2) est libre. Si ce n'était pas le cas, on aurait :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}\ \sin(x+2) = \lambda \sin(x+1)$
$x = -1$ donnerait alors : $\sin(1) = 0$, ce qui est absurde.

Exercice 3 *(Centrale 2004)*

Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe une base de F dont tous les polynômes ont même degré.
2. Idem avec des degrés strictement croissants.

Correction

1. Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une base de F.
   On peut toujours ranger ces polynômes par degré croissant de sorte que :
   $d(P_1) \leq \cdots \leq d(P_i) < d(P_{i+1}) = \cdots = d(P_n)$
   $(P_1 + P_n, \ldots, P_i + P_n, P_{i+1}, \ldots, P_n)$ convient.
2. Cela peut se faire par récurrence sur la dimension de F.
   On note donc n la dimension de F.
   Si $n \leq 1$, il n'y a rien à dire.
   Supposons $n = 2$.
   Soit (P_1, P_2) avec $d(P_1) \leq d(P_2)$ une base de F.
   Si $d(P_1) < d(P_2)$, c'est bon.
   Si $d(P_1) = d(P_2)$, on pose $Q_1 = P_1 - \dfrac{dom(P_1)}{dom(P_2)}P_2$.
   (Q_1, P_2) convient.
   Supposons enfin la propriété vraie au rang $n-1$.
   Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une base de F.
   On peut toujours ranger ces polynômes par degré croissant de sorte que :
   $d(P_1) \leq \cdots \leq d(P_i) < d(P_{i+1}) = \cdots = d(P_n)$

Pour j compris entre $i+1$ et $n-1$, on pose $Q_j = P_j - \dfrac{dom(P_j)}{dom(P_n)} P_n$.
Pour $j \leq i$, on pose $Q_j = P_j$.
On a :
$\forall j \in [\![1; n-1]\!]\ d(Q_j) < d(P_n)$
La famille $(Q_1, \ldots, Q_{n-1})$ est libre car $(Q_1, \ldots, Q_{n-1}, P)$ est une base de F.
On applique ensuite l'hypothèse de récurrence à $\text{Vect}(Q_1, \ldots, Q_{n-1})$.
Il existe $(R_1, \ldots, R_{n-1})$ base de $\text{Vect}(Q_1, \ldots, Q_{n-1})$ tq $d(R_1) < \cdots < d(R_{n-1})$.
$F = \text{Vect}(Q_1, \ldots, Q_{n-1}) \oplus \mathbb{K}P_n$ donc $(R_1, \ldots, R_{n-1}, P_n)$ est une base de F telle que $d(R_1) < \cdots < d(R_{n-1}) < d(P_n)$.

Exercice 4 *(Mines 2018)*

Soit $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0 \right\}$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.
2. Déterminer $A \cap \left\{ (X-1)^k, k \in [\![0; n]\!] \right\}$ puis $A \cap \text{Vect}\left(\left\{ (X-1)^k, k \in [\![0; n]\!] \right\} \right)$.
3. Donner une base de A.

Correction

1. Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) \end{cases}$.
   φ est une application linéaire.
   Elle est surjective : $\varphi(c) = c$.
   Par la formule du rang, $A = \text{Ker}\,(\varphi)$ est un sev de dimension n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. $\forall k \in [\![0; n]\!]\ \forall l \in [\![0; n]\!]\ \dfrac{d^l}{dX^l}\left((X-1)^k \right) = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k-l)!}(X-1)^{k-l} \text{ si } l \leq k \\ 0 \text{ si } l > k \end{cases}$
   Donc :
   $$\begin{aligned} \forall k \in [\![0; n]\!]\ \varphi\left((X-1)^k \right) &= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)!} 0^{k-l>0} + k! + \sum_{l=k+1}^{n} 0 \\ &= k! \end{aligned}$$
   Donc $A \cap \left\{ (X-1)^k, k \in [\![0; n]\!] \right\} = \emptyset$
   Remarque importante :
   Tout vecteur de A est combinaison linéaire des polynômes $(X-1)^k$ mais ces polynômes ne forment pas pour autant une famille génératrice de A.

   $\text{Vect}\left(\left\{ (X-1)^k, k \in [\![0; n]\!] \right\} \right) = \mathbb{R}_n[X]$ donc $A \cap \text{Vect}\left(\left\{ (X-1)^k, k \in [\![0; n]\!] \right\} \right) = A$
3. $\forall k \in [\![1; n]\!]\ (X-1)^k - k! \in A$.
   $\left((X-1)^k - k! \right)_{k \in [\![1; n]\!]}$ est une famille libre, car échelonnée en degré, de $n = \dim(A)$ vecteurs de A, c'en est donc une base.

Exercice 5 *(CCP 2016)*

Soit n un entier ≥ 2. Soit E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = P'(0) = 0$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Calculer la dimension de E.
2. Montrer que $\varphi : P \mapsto P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Correction

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.
   $P(0) = a_0$ et $P'(0) = a_1$ donc :
   $P \in E \iff a_0 = a_1 = 0$
   Donc : $E = \text{Vect}(X^2, \dots, X^n)$.
   E est donc un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n-1$.
2. La linéarité de φ est claire :

   $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ \forall (P, Q) \in E$
   $$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - 2(\lambda P + \mu Q)(X) + (\lambda P + \mu Q)(X-1) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - 2\lambda P(X) - 2\mu Q(X) + \lambda P(X-1) + \mu Q(X) \\ &= \lambda\left(P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)\right) + \mu\left(Q(X+1) - 2Q(X) + Q(X-1)\right) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

   Si $P \in \text{Ker}(\varphi)$ alors la suite $(u_n) = (P(n))$ vérifie :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$
   Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire à 2 pas.
   L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet une racine double : 1.
   On a donc :
   $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \ P(n) = an + b$
   $\mathbb{N}$ est infini donc $P(X) = aX + b$
   $P \in E$ donc $P(0) = P'(0) = 0$, ce qui donne $a = b = 0$.
   φ est donc injective.
   φ est un isomorphisme de E sur $\varphi(E)$ qui est donc dimension $n-1$.

   $$\begin{aligned} \forall k \geq 2 \ \varphi(X^k) &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l - 2X^k + \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l} X^l \\ &= X^k - 2X^k + X^k + kX^{k-1} - kX^{k-1} + \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l} (1 + (-1)^{k-l}) X^l \\ &= \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l} (1 + (-1)^{k-l}) X^l \end{aligned}$$

   Donc $\varphi(E) = \text{Vect}\left((\varphi(X^k))_{2 \leq k \leq n}\right) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ de dimension $n-1$.
   Donc $\varphi(E) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et φ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Exercice 6 *(Mines 2024)*

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P(0) = P'(0) = 0\}$.
Soit $\varphi \begin{cases} E \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{cases}$

Montrer que φ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction
La linéarité de φ est claire :

$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\ \forall(P,Q)\in E$

$$\begin{array}{rcl}\varphi(\lambda P+\mu Q) & = & (\lambda P+\mu Q)(X+1)-2(\lambda P+\mu Q)(X)+(\lambda P+\mu Q)(X-1)\\ & = & \lambda P(X+1)+\mu Q(X+1)-2\lambda P(X)-2\mu Q(X)+\lambda P(X-1)+\mu Q(X)\\ & = & \lambda\left(P(X+1)-2P(X)+P(X-1)\right)+\mu\left(Q(X+1)-2Q(X)+Q(X-1)\right)\\ & = & \lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)\end{array}$$

Si $P\in\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ alors la suite $(u_n)=(P(n))$ vérifie :
$\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}=0$
Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire à 2 pas.
L'équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$ qui admet une racine double : 1.
On a donc :
$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tq $\forall n\in\mathbb{N}\ P(n)=an+b$
$\mathbb{N}$ est infini donc $P(X)=aX+b$
$P\in E$ donc $P(0)=P'(0)=0$, ce qui donne $a=b=0$.
φ est donc injective.

$$\begin{array}{rcl}\forall k\geq 2\ \varphi(X^k) & = & \displaystyle\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}X^l-2X^k+\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-1)^{k-l}X^l\\ & = & \displaystyle X^k-2X^k+X^k+kX^{k-1}-kX^{k-1}+\sum_{l=0}^{k-2}\binom{k}{l}(1+(-1)^{k-l})X^l\\ & = & \displaystyle\sum_{l=0}^{k-2}\binom{k}{l}(1+(-1)^{k-l})X^l\\ & = & \displaystyle k(k-1)X^{k-2}+\sum_{l=0}^{k-3}\binom{k}{l}(1+(-1)^{k-l})X^l\end{array}$$

Or $(X^k)_{k\geq 2}$ est une base de E donc $\varphi(E)=\mathrm{Vect}\left((\varphi(X^k))_{k\geq 2}\right)$ avec $\varphi(X^k)$ de degré $k-2$.
Donc $\varphi(E)=\mathbb{R}[X]$ (cf familles échelonnées en degré)

Exercice 7 *(Mines 2015)*

Soient E un espace vectoriel (de dimension quelconque) et f un endomorphisme de E.

1. Montrer :
   $\ker(f)=\ker(f^2)\iff\mathrm{Im}\,(f)\cap\ker(f)=\{0\}$
2. Montrer :
   $\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Im}\,(f^2)\iff\mathrm{Im}\,(f)+\ker(f)=E$

Correction

1. • On suppose $\ker(f)=\ker(f^2)$.
   Soit $x\in\mathrm{Im}\,(f)\cap\ker(f)$.

$\exists y \in E$ tq $x = f(y)$.
$x \in \ker(f)$ donc $f^2(y) = f(x) = 0$.
Donc $y \in \ker(f^2) = \ker(f)$
Donc $x = f(y) = 0$

- On suppose $\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.
  $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est toujours vrai.
  Soit $x \in \ker(f^2)$.
  $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ donc $f(x) = 0$ et $x \in \ker(f)$.
  D'où $\ker(f^2) \subset \ker(f)$ puis $\ker(f) = \ker(f^2)$.

2.
- On suppose $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$.
  Soit $x \in E$.
  $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$ donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y) = f(f(y))$.
  $x - f(y) \in \ker(f)$ et $x = x - f(y) + f(y) \in \ker(f) + \mathrm{Im}\,(f)$.
- On suppose $\mathrm{Im}\,(f) + \ker(f) = E$.
  $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ est toujours vrai.
  Soit $x \in \mathrm{Im}\,(f)$.
  $\exists y \in E$ tq $x = f(y)$.
  $\exists (z_1, z_2) \in \ker(f) \times \mathrm{Im}\,(f)$ tq $y = z_1 + z_2$.
  $x = f(y) = f(z_2) \in \mathrm{Im}\,(f^2)$.

Exercice 8 *(Mines 2016)*

Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.
Montrer que $p \begin{cases} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x - (x_1 + x_2 + x_3)v \end{cases}$ est une projection.
Donner son noyau et son image.

Correction
On commence par vérifier la linéarité de p.
Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$.
φ est linéaire.
Si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ c'est facile car $\phi(x) =< (1, 1, 1), x >$.
Les produits scalaires complexes ne sont pas au programme.
Soient x et $y \in \mathbb{C}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^2$.
Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ alors $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$ et :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + \mu y) &= \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3 \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} p(\lambda x + \mu y) &= \lambda x + \mu y - \varphi(\lambda x + \mu y)v \\ &= \lambda x + \mu y - (\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y))v \\ &= \lambda(x - \varphi(x)v) + \mu(y - \varphi(y)v) = \lambda p(x) + \mu p(y) \end{aligned}$$

Ensuite, on remarque que $p(v) = v - v = 0$.
On en déduit :

$\forall x \in \mathbb{C}^3\ p^2(x) = p(x - (x_1 + x_2 + x_3)v) = p(x)$
p est bien une projection.

Si $p(x) = 0$ alors $x = (x_1 + x_2 + x_3)v \in \mathbb{C}v$.
De plus $p(v) = 0$ donc $\ker(p) = \mathbb{C}v$

Soit $H = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
H est un sev de dimension 2 de $\mathbb{C}^3$.
$\forall x \in H\ p(x) = x$
Donc $H \subset \mathrm{Im}\,(p)$.
On conclut avec la formule du rang : $H = \mathrm{Im}\,(p)$.

2 Produits et sommes d'espaces vectoriels

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\omega \in \mathbb{K}^*$.
Montrer : $\mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E) = \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$

Correction
Attention :
Contrairement au cas des supplémentaires, montrer :
$\forall x \in \mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E)\ \exists!(y, z) \in \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) \times \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E) \text{ tq } x = y + z$
ne suffit pas. Cela ne suffit même pas à montrer que la somme est directe car on pourrait avoir $\mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E)$ strictement contenu dans $\mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) + \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E)$.
$u(x) = \omega x$ donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(\omega x) = \omega u(x) = \omega^2 x$ (on en reparlera en cours)
Donc $\mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E)$
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$.
$u(x) = -\omega x$ donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(-\omega x) = -\omega u(x) = \omega^2 x$ (on en reparlera en cours)
Donc $\mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E)$
$\mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E)$ est un sev de E contenant $\mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$ donc $\mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E)$ contient le plus petit sev de E contenant $\mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$ à savoir $\mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) + \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$.
En clair : $\mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) + \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E)$.
On suppose qu'il existe $(y, z) \in \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) \times \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$ tq $x = y + z$
$u(x) = u(y) + u(z) = \omega y - \omega z$
$u(x) + \omega x = \omega y - \omega z + \omega y + \omega z = 2\omega y$
Donc $y = \dfrac{u(x) + \omega x}{2\omega}$.
$u(x) - \omega x = \omega y - \omega z - \omega y - -\omega z = -2\omega z$
Donc $z = \dfrac{-u(x) + \omega x}{2\omega}$.
On a donc prouvé l'unicité de y et de z si ils existent.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E)$.

On pose $y = \dfrac{u(x) + \omega x}{2\omega}$ et $z = \dfrac{-u(x) + \omega x}{2\omega}$.
$y + z = x$ (facile)
$u(y) = \dfrac{u^2(x) + \omega u(x)}{2\omega} = \dfrac{\omega^2 x + \omega u(x)}{2\omega} = \omega y$ donc $y \in \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E)$.
$u(z) = \dfrac{-u^2(x) + \omega u(x)}{2\omega} = \dfrac{-\omega^2 x + \omega u(x)}{2\omega} = -\omega z$ donc $z \in \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E)$.
Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) + \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$.
On a donc prouvé $\mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) + \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$.
Par double inclusion, on a donc : $\mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E) = \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) + \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$.
D'après la phase d'analyse ci-dessus, on peut alors dire :
$\mathrm{Ker}\,(u^2 - \omega^2\, id_E) = \mathrm{Ker}\,(u - \omega\, id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \omega\, id_E)$

Exercice 10 *(Mines 2018)*

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que $u^3 - u^2 + u - id_E = 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + Id_E) = E$.

Correction
E n'est pas supposé de dimension finie.
Soit $x \in E$.
On suppose $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}\,(u^2 + Id_E)$.
$u(x) = u(y) + u(z) = y + u(z)$
$u^2(x) = u(y) + u^2(z) = y - z$.
Donc $y = \dfrac{1}{2}\left(x + u^2(x)\right)$.
Puis $z = x - y = \dfrac{1}{2}\left(x - u^2(x)\right)$.
D'où l'unicité.

Réciproquement, soit $x \in E$.
On pose $y = \dfrac{1}{2}\left(x + u^2(x)\right)$ et $z = x - y = \dfrac{1}{2}\left(x - u^2(x)\right)$.
On montre ensuite que $y \in \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$.
A ce stade de l'année, je privilégie une solution élémentaire ie sans polynôme d'endomorphisme, notion qui sera vue plus tard.
$(u - id)(y) = u(y) - y = \dfrac{1}{2}\left(u(x) + u^3(x) - x - u^2(x)\right) = \dfrac{1}{2}\left(u^3 - u^2 + u - id\right)(x) = 0$
$(u^2 + id)(z) = u^2(z) + z = \dfrac{1}{2}\left(u^2(x) - u^4(x) + x - u^2(x)\right) = \dfrac{1}{2}\left(x - u^4(x)\right)$
$u^3 - u^2 + u - id = 0$ donc $u^3 = u^2 - u + id$ et en composant par u :
$u^4 = u^3 - u^2 + u$
Donc :
$(u^2 + id)(z) = \dfrac{1}{2}\left(x - u^3(x) + u^2(x) - u(x)\right) = -\dfrac{1}{2}\left(u^3 - u^2 + u - id\right)(x) = 0$
D'où l'existence.

Exercice 11 *(X 20 ?)*

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soient F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension p et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.
Quel est le rang de la famille $\left((e_i, f_j)\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$?

Correction
Que faire quand on ne sait pas quoi faire ? Comment intuiter le résultat ?
On étudie un cas particulier avec des petites valeurs de n et de p.
On prend $n = 2$ et $p = 3$ (le cas $n = p$ pouvant a piori être particulier).
On prend $E = \mathbb{K}^2$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
On prend $F = \mathbb{K}^3$, $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 0, 1)$.
$E \times F = \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^3$ est identifié à $\mathbb{K}^5$.
Il s'agit de déterminer le rang de la famille $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_6)$ avec :
$\epsilon_1 = (e_1, f_1) = (1, 0, 1, 0, 0)$
$\epsilon_2 = (e_1, f_2) = (1, 0, 0, 1, 0)$
$\epsilon_3 = (e_1, f_3) = (1, 0, 0, 0, 1)$
$\epsilon_4 = (e_2, f_1) = (0, 1, 1, 0, 0)$
$\epsilon_5 = (e_2, f_2) = (0, 1, 0, 1, 0)$
$\epsilon_6 = (e_2, f_3) = (0, 1, 0, 0, 1)$

La matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^5$ de cette famille est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On va calculer son rang avec la méthode du pivot.
On va pivoter sur les colonnes afin d'obtenir une base de $\mathrm{Vect}\left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$.
Le rang cherché est donc celui de la famille $(\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1, \epsilon_3 - \epsilon_1, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6)$ ou encore $((e_1, f_1), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_1), (e_2, f_1), (e_2, f_2), (e_2, f_3))$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est aussi celui de la famille $((e_1, f_1), (e_2, f_1), (e_2, f_2), (e_2, f_3), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_1))$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est aussi celui de la famille
$((e_1, f_1), (e_2, f_1), (e_2, f_2) - (e_2, f_1) = (0, f_2 - f_1), (e_2, f_3) - (e_2, f_1) = (0, f_3 - f_2), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_1))$
dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après suppression des doublons ; c'est le rang de la famille
$((e_1, f_1), (e_2, f_1), (e_2, f_2) - (e_2, f_1) = (0, f_2 - f_1), (e_2, f_3) - (e_2, f_1) = (0, f_3 - f_1))$ dont la matrice dans la base canonique est :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, c'est le rang de la famille $((e_1, f_1), (e_2, f_1), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_1) - (0, f_2 - f_1) = (0, f_3 - f_2))$ dont la matrice dans la base canonique est :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le rang est donc 4 et on a une base de $\text{Vect}\left(((e_i, f_j))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}\right)$.

Dans le cas général, on intuite comme base de $\text{Vect}\left(((e_i, f_j))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}\right)$:

$((e_1, f_1), (e_2, f_1), \dots, (e_n, f_1), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_2), \dots, (0, f_p - f_{p-1}))$

Ces vecteurs sont bien dans $\text{Vect}\left(((e_i, f_j))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}\right)$:

$(0, f_j - f_{j-1}) = (e_1, f_j) - (e_1, f_{j-1})$.

Tout vecteur (e_i, f_j) est combinaison linéaire des vecteurs de la nouvelle famille :

$\forall j \in [\![2; n]\!]\ (e_i, f_j) = \sum_{k=2}^{j} (0, f_k - f_{k-1}) + (e_i, f_1)$

Enfin, la nouvelle famille est libre :

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p)$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, f_1) + \sum_{j=2}^{p} \mu_j (0, f_j - f_{j-1}) = (0, 0)$

La première composante donne : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$

$(e_1, \dots, e_n)$ est libre car c'est une base de E donc les λ_i sont nuls et il reste :

$\sum_{j=2}^{p} \mu_j (f_j - f_{j-1}) = 0$

Donc $0 = \sum_{j=2}^{p} \mu_j f_j - \sum_{j=2}^{p} \mu_j f_{j-1} = \sum_{j=2}^{p} \mu_j - \sum_{j=1}^{p-1} \mu_{j+1} f_j = \mu_p f_p + \sum_{j=1}^{p-1} (\mu_j - \mu_{j+1}) f_j$

La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre donc $\mu_p = 0$ et $\mu_j = \mu_{j+1}$ pour tout j compris entre 1 et $p - 1$.

Les μ_j sont donc tous nuls.

Donc la famille $((e_1, f_1), (e_2, f_1), \dots, (e_n, f_1), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_2), \dots, (0, f_p - f_{p-1}))$ est libre.

C'est donc une base de $\text{Vect}\left(((e_i, f_j))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}\right)$ et le rang cherché est $n + p - 1$.

D'autres méthodes sont possibles :

- **Première méthode**

  $\mathcal{B} = ((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p))$ est une base de $E \times F$.

  La matrice de la famille $((e_i, f_j))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{B}$ est :

  $M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ I_p & I_p & \dots & I_p \end{pmatrix}$

où A_i est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la i-ème ligne qui sont égaux à 1. L'écriture par blocs est naturelle mais n'aura pas encore été vue.
Le rang de M est égal à celui de $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 - A_1 & \dots & A_n - A_1 \\ I_p & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Donc la rang de M vaut $p+$ le rang de $\begin{pmatrix} A_2 - A_1 & \dots & A_n - A_1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$A_i - A_1 = \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \end{pmatrix}$ a ses p colonnes identiques.

Donc la rang de M vaut $p+$ le rang de $\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots \\ 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$
Finalement le rang cherché vaut $p + n - 1$.

- **Deuxème méthode**
  $\mathcal{C} = ((e_1, f_1), \dots, (e_1, f_p), (e_2, f_1), \dots, (e_n, f_1))$ est une base de $\mathrm{Vect}\left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}\right)$
  En effet pour $i, j \geq 2$:
  $(e_i, f_j) = (e_1, f_j) + (e_i, f_1) - (e_1, f_1)$
  donc $\mathcal{C}$ est génératrice de $\mathrm{Vect}\left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}\right)$
  Montrons que $\mathcal{C}$ est libre.
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_2, \dots, \mu_n$ des scalaires tels que
  $\lambda_1(e_1, f_1) + \cdots + \lambda_p(e_1, f_p) + \mu_2(e_2, f_1) + \cdots + \mu_n(e_n, f_1) = (0, 0)$.
  On en déduit :
  $(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n, \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p + \mu_2 f_1 + \cdots + \mu_n f_1) = (0, 0)$
  On en déduit :
  $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)\, e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n = 0$
  et
  $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p + (\mu_2 + \cdots + \mu_n)\, f_1 = 0$
  Avec la première, on obtient : $\mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$.
  On reporte dans la deuxième : $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p = 0$.
  On en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$

Exercice 12 *(Centrale 98)*

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev de dimensions finies non nulles.
Soit $(E_1, \dots, E_n)$ une famille de sev de E.
Soit $h \in \mathcal{L}(E, F)$.
On définit l'application φ par $\varphi(h) = (h_{|E_1}, \dots, h_{|E_n})$ où, pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$ $h_{|E_i}$ désigne la restriction de h à E_i.

1. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E_1, F) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_n, F)$.
2. Montrer :

φ injective $\Longleftrightarrow E = \sum_{i=1}^{n} E_i$

3. Condition pour que φ soit surjective ?

Correction

1. Il est notoire que la restriction d'une application linéaire de E dans F à un sev de E est encore linéaire.Par conséquent, φ est bien définie de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(E_1,F) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_n,F)$.
Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(h_1,h_2) \in \mathcal{L}(E,F)^2$.
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) &= \Big(((\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)_{|E_1}, \dots\Big) \\ &= \Big(\lambda_1 h_{1_{|E_1}} + \lambda_2 h_{2_{|E_1}}, \dots\Big) \\ &= \lambda_1 \Big(h_{1_{|E_1}}, \dots\Big) + \lambda_2 \Big(h_{2_{|E_1}}, \dots\Big) \\ &= \lambda_1 \varphi(h_1) + \lambda_2 \varphi(h_2) \end{aligned}$$
φ est donc linéaire.
2. Soit $h \in \mathcal{L}(E,F)$.
$$\begin{aligned} h \in \mathrm{Ker}\,(\varphi) &\Longleftrightarrow \varphi(h) = (h_{|E_1}, \dots, h_{|E_n}) = (0, \dots, 0) \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!]\ h_{|E_i} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!]\ E_i \subset \mathrm{Ker}\,(h) \end{aligned}$$
Mais $\mathrm{Ker}\,(h)$ est un sous-espace vectoriel de E et $E_1+\cdots+E_n$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les E_i donc :
$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{h \in \mathcal{L}(E,F) \text{ tq } E_1 + \cdots + E_n \subset \mathrm{Ker}\,(h)\}$
On en déduit immédiatement que si $E = E_1+\cdots+E_n$ alors $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{h \in \mathcal{L}(E,F) \text{ tq } E \subset \mathrm{Ker}\,(h)\} = \{0\}$ de sorte que φ est injective.
Il reste à montrer que si φ est injective alors $E = E_1 + \cdots + E_n$.
On démontre plutôt la contrapposée :
$\sum_{i=1}^{n} E_i \neq E \Longrightarrow \varphi$ non injective
Pour cela on suppose que $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est strictement contenu dans E et on construit $h \neq 0$ qui appartient à $\mathrm{Ker}\,\varphi$ ie $h \neq 0$ telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $h_{|E_i} = 0$ ou encore $h \neq 0$ telle que $h_{|\sum E_i} = 0$.
Soit S un supplémentaire de $\sum_{i=1}^{n} E_i$. $S \neq \{0\}$.
Soit p la projection sur S parallèlement à $\sum_{i=1}^{n} E_i$.
$S \neq \{0\}$ donc $p \neq 0$.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $p_{|E_i} = 0$.
Problème : p va de E dans E alors qu'on veut p de E dans S.
Il faudrait donc introduire la corestriction $\widehat{p}\begin{cases} E \to S \\ x \mapsto p(x) \end{cases}$.
Il existe $a \in \mathcal{L}(S,F)$ telle que $a \neq 0$.

Pour le montrer, on se donne $\mathcal{B}_S$ une base de S et $\mathcal{B}_F$ une base de F.
On définit alors a par $Mat_{\mathcal{B}_S,\mathcal{B}_F}(a) = (1)_{\substack{1\leq i\leq \dim(F)\\ 1\leq j\leq \dim(S)}}$.
On définit alors $h = a \circ p$ ($h \circ \widehat{p}$ en toute rigueur).
Si $x_S \in S$ avec $a(x_S) \neq 0$ alors $h(x_S) \neq 0$.
(attention : a peut s'annuler même si $a(e_i) \neq 0$ pour tout i)
h convient.

Remarque
Une autre méthode est possible.
Si on note S un supplémentaire de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ alors $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{L}(S,F)$ donc :

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) &= \dim(S)\times\dim(F)\\ &= \left(\dim(E) - \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)\right)\times\dim(F)\end{aligned}$$

La dimension de F étant non nulle :

$$\begin{aligned}\varphi \text{ injective} &\iff \operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}\\ &\iff \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 0\\ &\iff \left(\dim(E) - \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)\right)\times\dim(F) = 0\\ &\iff \dim(E) = \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)\\ &\iff \sum_{i=1}^{n} E_i = E \text{ car } \sum_{i=1}^{n} E_i \subset E\end{aligned}$$

3. On va montrer :

$$\varphi \text{ surjective } \iff \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ est directe}$$

- $\Longrightarrow$
  On démontre plutôt la contrapposée.
  Pour cela on suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ n'est pas directe.
  Il existe donc une décomposition $0 = x_1 + \cdots + x_n$ non triviale.
  On peut supposer $x_1 \neq 0$ sans perte de généralité.
  Il existe $a \in \mathcal{L}(E_1, F)$ telle que $a(x_1) \neq 0$:
  (x_1) est libre. On la complète en $\mathcal{B}_1 = (x_1, \dots)$ base de E_1 et on définit a par sa matrice dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_F$ (plusieurs choix sont possibles).

Supposons que φ soit surjective et notons h un antécédent de $(a, 0, \dots, 0)$ par φ.

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ &= h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h(x_i) = h(x_1) \text{ car } h(x_i) = 0 \text{ pour } i \geq 2 \\ &= a(x_1) \neq 0 \end{aligned}$$

D'où une contradiction.
Donc φ n'est pas surjective.

- $\Longleftarrow$
On ne suppose pas que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$ donc il faut introduire un supplémentaire S de $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.
Soit $(h_1, \dots, h_n) \in \mathcal{L}(E_1, F) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_n, F)$.
Soit $h \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) \end{cases}$ où $x = x_1 + \cdots + x_n + x_S$ est **l'unique** décomposition de x.
h est bien définie. C'est une application de E dans F.
On montre ensuite que h est linéaire.
Soient x et y dans E et λ et μ dans $\mathbb{R}$.
Si $x = x_1 + \cdots + x_n + x_S$ est la décomposition de x et $y = y_1 + \cdots + y_n + y_S$ celle de y alors $(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n) + (\lambda x_S + \mu y_S)$ est celle de $\lambda x + \mu y$.
D'où :

$$\begin{aligned} h(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i=1}^{n} h_i(\lambda x_i + \mu y_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda h_i(x_i) + \mu h(y_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) + \mu \sum_{i=1}^{n} h_i(y_i) \\ &= \lambda h(x) + \mu h(y) \end{aligned}$$

En écrivant $x_i = 0 + \cdots + 0 + x_i + 0 + \cdots + 0$, on montre facilement que $h_{|E_i} = h_i$ ie $\varphi(h) = (h_1, \dots, h_n)$.
φ est donc surjective.

Remarque

On peut aussi utiliser des arguments de dimension :

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ surjective } &\iff \mathrm{Im}\,(\varphi) = \mathcal{L}(E_1, F) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_n, F) \\
&\iff \mathrm{rg}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \dim\left(\mathcal{L}(E_i, F)\right) \\
&\iff \dim\left(\mathcal{L}(E, F)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}\,(\varphi)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\dim\left(E_i\right) \times \dim\left(F\right)\right) \\
&\iff \dim\left(F\right)\left(\dim\left(E\right) - \left(\dim\left(E\right) - \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)\right)\right) = \dim\left(F\right)\sum_{i=1}^{n}\dim\left(E_i\right) \\
&\iff \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\dim\left(E_i\right) \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ est directe}
\end{aligned}$$

Exercice 13 *(Centrale 2023)*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$.
Montrer :

$$w \text{ isomorphisme de } E \text{ sur } G \iff \begin{cases} u \text{ injective} \\ v \text{ surjective} \\ \mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(v) = F \end{cases}$$

Le résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?

Correction
On suppose w isomorphisme de E sur G.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$.
$w(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}\,(w)$.
Mais w est injective donc $x = 0$.
$\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$ donc u est injective.
Soit $y \in G$.
w est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $w(x) = y$.
On a alors $u(x) \in F$ et $v(u(x)) = y$.
v est donc surjective.
On montre que $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(v) = F$ par analyse-synthèse.
Soit $x \in F$.
On suppose qu'il existe $y \in \mathrm{Im}\,(u)$ et $z \in \mathrm{Ker}\,(v)$ tels que $x = y + z$.
$y \in \mathrm{Im}\,(u)$ donc il existe $y_1 \in E$ tel que $y = u(y_1)$.
$v(x) = v(u(y_1) + z) = w(y_1)$
On en déduit $y_1 = w^{-1}(v(x))$ puis $y = u(y_1) = u(w^{-1}(v(x)))$ et $z = x - y = x - u(w^{-1}(v(x)))$.
D'où l'unicité en cas d'existence.
Réciproquement, on pose $y = u(w^{-1}(v(x)))$ et $z = x - u(w^{-1}(v(x)))$.
y est bien défini (w^{-1} l'est) ainsi donc que z.
On a clairement $y \in \mathrm{Im}\,(u)$ et $y + z = x$.
$v(z) = v(x) - v(u(w^{-1}(v(x)))) = v(x) - w(w^{-1}(v(x))) = v(x) - v(x) = 0$ donc $z \in \mathrm{Ker}\,(w)$.
D'où l'existence.

On remarquera qu'on ne s'est pas servi de l'hypothèse de dimension finie.

Réciproquement, on suppose $\begin{cases} u \text{ injective} \\ v \text{ surjective} \\ \mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(v) = F \end{cases}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(w)$.
$v(u(x)) = w(x) = 0$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\,(v)$.
Mais $u(x) \in \mathrm{Im}\,(u)$ donc $u(x) = 0$.
Or u est injective donc $x = 0$.
On a donc montré que w est injective.
On montre ensuite que w est surjective.
Soit $z \in G$.
v est surjective donc il existe $y \in F$ tel que $z = v(y)$.
$\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(v) = F$ donc il existe $x \in E$ et $y_1 \in \mathrm{Ker}\,(v)$ tels que $y = u(x) + y_1$.
$z = v(y) = w(x)$ donc w est surjective.
On remarque ici aussi qu'on ne s'est pas servi de l'hypothèse de dimension finie.

Exercice 14 *(Centrale 2023)*

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f admet un pseudo-inverse si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$.

1. Que dire de f si f est inversible ? est la fonction nulle ?
2. (a) On suppose que f admet un pseudo-inverse.
   Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$.

   (b) On suppose que $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$.
   Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}\,(f)$ admet un pseudo-inverse.
   En déduire que f admet un pseudo-inverse.
   Conclure.
3. Montrer que f admet un pseudo-inverse si, et seulement si, f et f^2 ont le même rang.

Correction

1. - On suppose que f est inversible.
     Si f admet un pseudo-inverse g alors $f \circ (g \circ f) = f \circ id_E$ avec f inversible donc $g \circ f = id_E$ et $g = f^{-1}$.
     Réciproquement, si on pose $g = f^{-1}$ alors :
     $f \circ g \circ f = f \circ f^{-1} \circ f = f$
     $g \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ f^{-1} = f^{-1}$
     $g \circ f = f \circ g = id_E$
     Donc f admet un pseudo-inverse.
   - On suppose que f est la fonction nulle.
     Si f admet un pseudo-inverse g alors $g = g \circ f \circ g = 0$ car $f = 0$
     Réciproquement, on vérifie facilement que $g = 0$ est un pseudo-inverse de $f = 0$.
2. (a) Soit $x \in E$.
   $f(x) = (f \circ g \circ f)(x) = f\left((g \circ f)(x)\right)$.
   Donc $x - (g \circ f)(x) \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
   Mais $g \circ f = f \circ g$ donc $x = f(g(x)) + (x - (g \circ f)(x)) \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(f)$.
   Donc $E = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(f)$.

La formule de Grassman donne alors :
$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f))$
La formule du rang permet d'en déduire : $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f))$ ie $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
$\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bien supplémentaires.

(b) $\mathrm{Im}(f)$ étant stable par f, f induit un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$, qu'on notera h, et la question de l'existence d'un pseudo inverse de cet endomorphisme a bien un sens.
$\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ donc h est injective.
Comme h est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, h est bijective.
D'après la première question, h admet un et un seul pseudo-inverse : h^{-1}.

Soit p la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
On va montrer que $h^{-1} \circ p$ est un pseudo-inverse de f.

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in \mathrm{Im}(f)\ (f \circ g \circ f)(x) & = & f(h^{-1}(p(f(x)))) \\
& = & f(h^{-1}(f(x))) \text{ car } f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(p) \\
& = & f(h^{-1}(h(x))) \text{ car } x \in \mathrm{Im}(f) \\
& = & f(x) \\
\forall x \in \mathrm{Ker}(f)\ (f \circ g \circ f)(x) & = & f(g(f(x))) \\
& = & f(g(0)) \text{ car } x \in \mathrm{Ker}(f) \\
& = & 0 = f(x)
\end{array}$$

Comme $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémantaires, on en déduit $f \circ g \circ f = f$.

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in \mathrm{Im}(f)\ (g \circ f \circ g)(x) & = & g(f(h^{-1}(p(x)))) \\
& = & g(f(h^{-1}(x))) \text{ car } x \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(p) \\
& = & g(h(h^{-1}(x))) \text{ car } h^{-1}(x) \in \mathrm{Im}(f) \\
& = & g(x) \\
\forall x \in \mathrm{Ker}(f)\ (g \circ f \circ g)(x) & = & g(f(h^{-1}(p(x)))) \\
& = & g(f(h^{-1}(0))) \text{ car } x \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p) \\
& = & 0 \\
g(x) & = & h^{-1}(p(x)) \\
& = & h^{-1}(0) \text{ car } x \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p) \\
& = & 0
\end{array}$$

Comme $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires, on en déduit $g \circ f \circ g = g$.

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in \mathrm{Im}(f)\ (f \circ g)(x) & = & f(h^{-1}(p(x))) \\
& = & (f(h^{-1}(x)) \text{ car } x \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(p) \\
& = & h(h^{-1}(x)) \text{ car } h^{-1}(x) \in \mathrm{Im}(f) \\
& = & x \\
(g \circ f)(x) & = & h^{-1}(p(f(x)) \\
& = & h^{-1}(f(x)) \text{ car } f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(p) \\
& = & h^{-1}(h(x)) \text{ car } x \in \mathrm{Im}(f) \\
& = & x
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \operatorname{Ker}(f)\ (g\circ f)(x)) &= g(f(x)) = g(0) = 0\\
(f\circ g)(x) &= f(h^{-1}(p(x)))\\
&= f(h^{-1}(0)) \text{ car } x \in \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(p)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires, on en déduit $g\circ f = f\circ g$.
f admet bien un pseudo-inverse.
On déduit de cette question et de la précédente :
f admet un pseudo-inverse $\iff \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$.

3. On suppose que f admet un pseudo-inverse.
Soit $x \in \operatorname{Im}(f)$.
Il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.
D'après la question précédente, il existe $y_I \in \operatorname{Im}(f)$ et $y_K \in \operatorname{Ker}(f)$ tels que $y = y_I + y_K$.
$x = f(y) = f(y_I)$.
$y_I \in \operatorname{Im}(f)$ donc il existe $z \in E$ tel que $y_I = f(z)$.
$x = f(y_I) = f^2(z) \in \operatorname{Im}(f^2)$
D'où $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f^2)$.
Mais on a toujours $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$ donc $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$.
En passant aux dimensions, on a $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$

On suppose $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$.
Comme $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$, on en déduit $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$.
Soit $x \in E$.
$f(x) \in \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$ donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$.
$x = x - f(y) + f(y)$ avec $x - f(y) \in \operatorname{Ker}(f)$ et $f(y) \in \operatorname{Im}(f)$ donc $E = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f)$.
La formule de Grassman donne alors :
$\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) - \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f))$
La formule du rang permet d'en déduire : $\dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f))$ ie $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.
$Ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ son supplémentaires et d'après la question précédente, f admet un pseudo-inverse.