DM 1
A rendre le lundi 23 septembre 2024
Idéaux de l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

941

V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. $\mathcal{L}(V)$ est l'algèbre des endomorphismes de V. La partie $\mathcal{M}$ est un *idéal à droite (resp à gauche)* de $\mathcal{L}(V)$ lorsque $\mathcal{M}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ et que :

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(V)\ ,\ \forall f \in \mathcal{M} \qquad f \circ \phi \in \mathcal{M}$$

resp :

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(V)\ ,\ \forall f \in \mathcal{M} \qquad \phi \circ f \in \mathcal{M}$$

Un *idéal bilatère* de $\mathcal{L}(V)$ est une partie de $\mathcal{L}(V)$ qui est à la fois un idéal à gauche et à droite.

0 Préliminaires

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(V)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\,(f + g)$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}(\lambda f) = \mathrm{Im}(f)$.
   Que peut-on dire de $\mathrm{Im}(0.f)$?
   Enoncer et démontrer des propriétés similaires pour les noyaux.
6. Soient W_1, W_2 et W_3 3 sous-espaces vectoriels de V. Montrer que :
   $(W_1 \subset W_3$ et $W_2 \subset W_3) \Longleftrightarrow W_1 + W_2 \subset W_3$
7. Soit p un projecteur de V.
   Montrer que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(id_V - p)$.

1 Exemples d'idéaux

Soit W un sous espace vectoriel de V. On note :

$$\mathcal{J}_W = \{f \in \mathcal{L}(V)\ ,\ \mathrm{Im}\, f \subset W\} \qquad \mathcal{K}_W = \{f \in \mathcal{L}(V)\ ,\ W \subset \mathrm{Ker}\, f\}$$

$$\Delta_f = \{f \circ \phi\ ,\ \phi \in \mathcal{L}(V)\} \qquad \Gamma_f = \{\phi \circ f\ ,\ \phi \in \mathcal{L}(V)\}$$

1. (a) Soit $f \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que Δ_f *(resp* Γ_f*)* est un idéal à droite *(resp à gauche)*.
   (b) Soit W un sous espace vectoriel de V. Montrer que $\mathcal{J}_W$ *(resp* $\mathcal{K}_W$*)* est un idéal à droite *(resp à gauche)*.
2. **Dimensions**
   (a) **Dimension de $\mathcal{J}_W$**
   Soit $f \in \mathcal{J}_W$ ie $f \in \mathcal{L}(V)$ telle que $\operatorname{Im}(f) \subset W$.
   On peut donc définir $f^{|W} \begin{cases} V \to W \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ (dite corestriction de f à W).
   Il est clair que f est linéaire (on ne demande pas de le justifier).
   On peut donc définir $L_1 \begin{cases} \mathcal{J}_W \to \mathcal{L}(V,W) \\ f \mapsto f^{|W} \end{cases}$.
   L_1 est linéaire (on ne demande pas de le justifier).
   Montrer que L_1 est un isomorphisme et en déduire la dimension de $\mathcal{J}_W$.
   (b) **Dimension de $\mathcal{K}_W$**
   Soit S un supplémentaire de W.
   Soit $L_2 \begin{cases} \mathcal{K}_W \to \mathcal{L}(S,V) \\ f \mapsto f_{|S} \text{ (la restriction de } f \text{ à } S) \end{cases}$.
   L_2 est linéaire (on ne demande pas de le justifier).
   Montrer que L_2 est un isomorphisme et en déduire la dimension de $\mathcal{K}_W$.
   (c) **Dimension de Δ_f**
   En appliquant la formule du rang à $L_3 \begin{cases} \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V) \\ \phi \mapsto f \circ \phi \end{cases}$, déterminer la dimension de Δ_f.
   En déduire $\Delta_f = \mathcal{J}_{\operatorname{Im} f}$.
   (d) **Dimension de Γ_f**
   Déterminer la dimension de Γ_f.
   En déduire $\Gamma_f = \mathcal{K}_{\operatorname{Ker} f}$.

2 Etude des idéaux de $\mathcal{L}(V)$: première méthode

1. Soient W et W' deux sous espaces vectoriels de V.
   (a) Etablir que :
   $$\mathcal{J}_W \cap \mathcal{J}_{W'} = \mathcal{J}_{W\cap W'} \qquad \mathcal{K}_W \cap \mathcal{K}_{W'} = \mathcal{K}_{W+W'}$$
   (b) Montrer que $\mathcal{J}_W + \mathcal{J}_{W'} \subset \mathcal{J}_{W+W'}$.
   Au moyen des dimensions de ces espaces, montrer leur égalité.
   (c) Montrer que $\mathcal{K}_W + \mathcal{K}_{W'} = \mathcal{K}_{W\cap W'}$
2. **Idéaux à droite de $\mathcal{L}(V)$**
   Soit $\mathcal{M}$ un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$.
   (a) Prouver l'existence d'un sous espace vectoriel W de V tel que $\mathcal{J}_W \subset \mathcal{M}$ et tel qu'aucun sous espace W' de V ne vérifie $\mathcal{J}_{W'} \subset \mathcal{M}$ et $\dim W' > \dim W$.
   (b) Soit $f \in \mathcal{M}$.
   Montrer que $\mathcal{J}_{\operatorname{Im}(f)+W} \subset \mathcal{M}$.
   En déduire $\operatorname{Im}(f) \subset W$.

(c) Montrer que $\mathcal{J}_W = \mathcal{M}$.

(d) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M} = \Delta_g$.

3. **Idéaux à gauche de $\mathcal{L}(V)$**
Soit $\mathcal{M}$ un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$.

(a) Prouver l'existence d'un sev W de V tel que $\mathcal{K}_W \subset \mathcal{M}$ et tel qu'aucun sev W' de V ne vérifie $\mathcal{K}_{W'} \subset \mathcal{M}$ et $\dim(W') < \dim(W)$.

(b) Soit $f \in \mathcal{M}$.
Montrer que $\mathcal{K}_{\mathrm{Ker}\,(f)\cap W} \subset \mathcal{M}$.
En déduire $W \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.

(c) Montrer que $\mathcal{K}_W = \mathcal{M}$.

(d) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M} = \Gamma_g$.

4. (a) Soient U et W des sous espaces vectoriels de V. Calculer $\dim \mathcal{J}_U \cap \mathcal{K}_W$.
Indication
Soit S un supplémentaire de W.
Considérer l'application qui à $f \in \mathcal{J}_U \cap \mathcal{K}_W$ associe $f_{|S}^{|U} \begin{cases} S \to U \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$.

(b) Montrer que $\{\overrightarrow{0}\}$ et $\mathcal{L}(V)$ sont les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{L}(V)$.

3 Etude des idéaux de $\mathcal{L}(V)$: deuxième méthode

1. (a) Soit $\mathcal{M}$ un idéal bilatère de $\mathcal{L}(V)$.
Que dire de $\mathcal{M}$ s'il contient un endomorphisme inversible ?

(b) Soient f un élément non nul de $\mathcal{L}(V)$, D une droite de V et S un supplémentaire de D. Montrer l'existence de $a, b \in \mathcal{L}(V)$ tels que $a \circ f \circ b$ soit un projecteur d'image D et de noyau S.

(c) En déduire que $\{\overrightarrow{0}\}$ et $\mathcal{L}(V)$ sont les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{L}(V)$.

2. (a) Soit $f \in \mathcal{L}(V)$ et W un sous espace vectoriel de V contenu dans $\mathrm{Im}\, f$. Si W' est un supplémentaire de W, prouver l'existence de $a \in \mathcal{L}(V)$ tel que $f \circ a$ soit un projecteur d'image W et de noyau W'.

(b) Soient $f, g \in \mathcal{L}(V)$.
Soit W_1 un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$ dans $\mathrm{Im}\,(f)$:
$\mathrm{Im}\,(f) = (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \oplus W_1$
Soit W_2 un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$ dans $\mathrm{Im}\,(g)$:
$\mathrm{Im}\,(g) = (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \oplus W_2$
Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ dans V.
Montrer : $V = W_1 \oplus (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \oplus W_2 \oplus S$ et $W_1 + \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.

En déduire l'existence de $a, b \in \mathcal{L}(V)$ tels que :

$$\mathrm{Im}(f \circ a + g \circ b) = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$$

(c) Soit $\mathcal{M}$ un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$ non réduit à $\{0\}$, $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de $\mathcal{M}$. Prouver l'existence de $f \in \mathcal{M}$ telle que :

$$\mathrm{Im}\, f = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Im}\, f_i$$

En déduire que $\mathcal{M} = \Delta_f$.

3. (a) Soit $f \in \mathcal{L}(V)$ et W un sous espace vectoriel de V contenant le noyau de f. Si W' est un supplémentaire de W, prouver l'existence de $a \in \mathcal{L}(V)$ tel que $a \circ f$ soit un projecteur d'image W' et de noyau W.

   (b) Soient $f, g \in \mathcal{L}(V)$.
   Soit W_1 un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$ dans $\operatorname{Ker}(f)$:
   $\operatorname{Ker}(f) = (\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)) \oplus W_1$
   Soit W_2 un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$ dans $\operatorname{Ker}(g)$:
   $\operatorname{Ker}(g) = (\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)) \oplus W_2$
   Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$ dans V.
   Montrer que $V = W_1 \oplus (\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)) \oplus W_2 \oplus S$

   En déduire l'existence de $a, b \in \mathcal{L}(V)$ tels que :

$$\operatorname{Ker}(a \circ f + b \circ g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$$

   (c) Soit $\mathcal{M}$ un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$ non réduit à $\{0\}$, $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de $\mathcal{M}$. Prouver l'existence de $f \in \mathcal{M}$ telle que :

$$\operatorname{Ker} f = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i$$

   En déduire que $\mathcal{M} = \Gamma_f$.