

ANALYSE 1
PC*1
2024 - 2025
Chapitre 0 :
Fonctions continues par morceaux

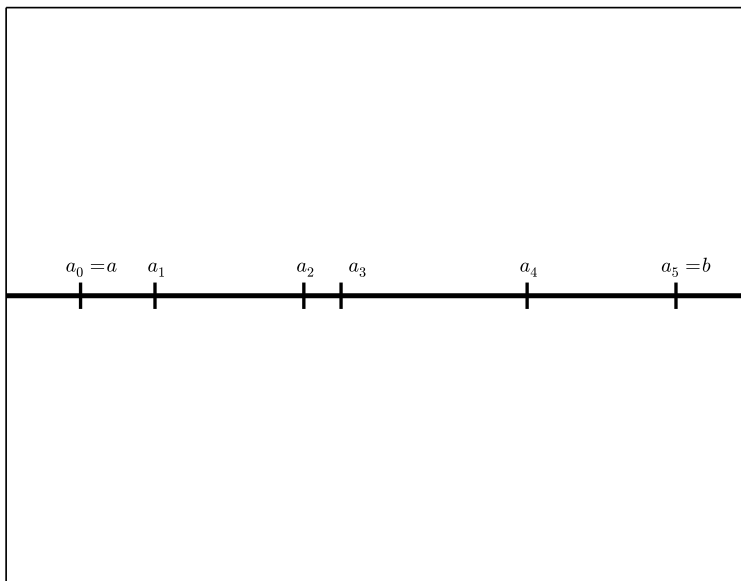
Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Subdivisions d'un segment

1.1 Définition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

On appelle subdivision du segment $[a, b]$ toute suite finie de réels $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ tq $a_0 = a < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$.
 $\{a_i, 0 \leq i \leq n\}$ s'appelle l'ensemble des points de la subdivision.



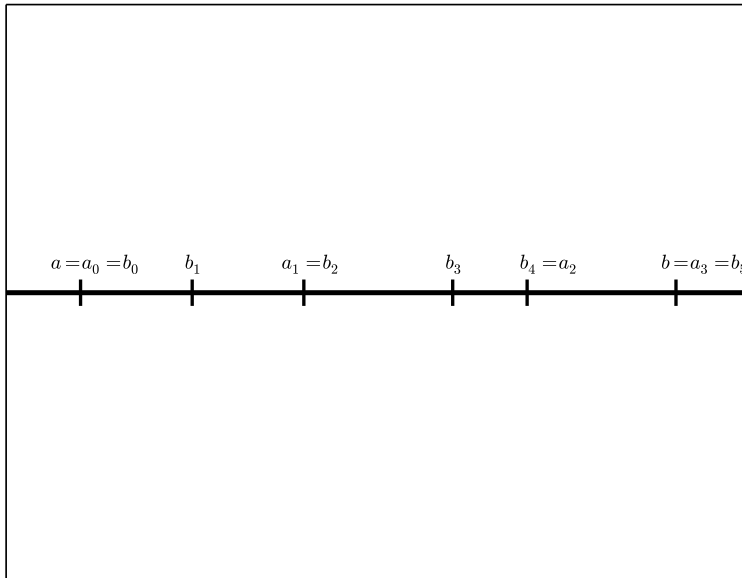
1.2 Comparaison des subdivisions

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et σ, σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

On dit que σ' est plus fine que σ si et seulement si l'ensemble des points de σ est inclus dans

l'ensemble des points de σ' . On note $\sigma \subset \sigma'$.

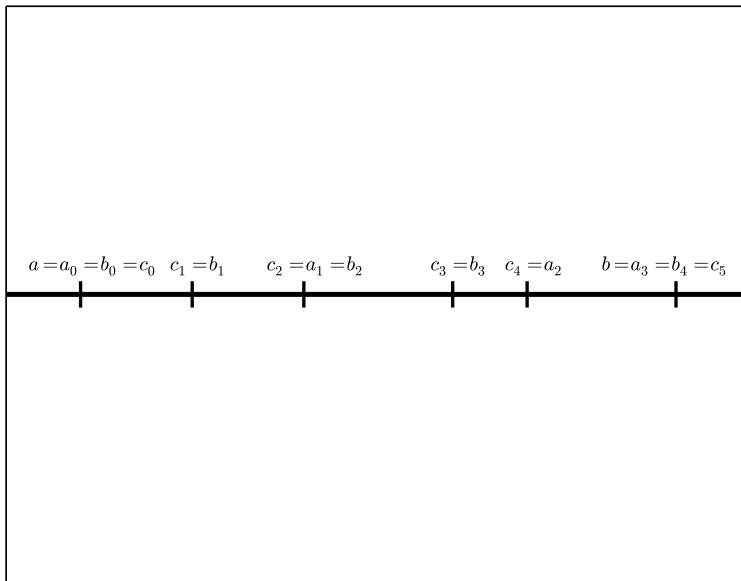
On définit ainsi une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.



La subdivision $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ est plus fine que la subdivision (a_0, a_1, a_2, a_3) .

1.3 Réunion de deux subdivisions

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\sigma' = (b_j)_{0 \leq j \leq p}$ deux subdivisions de $[a, b]$. On appelle réunion de σ et de σ' et on note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision de $[a, b]$ dont l'ensemble des points est $\{a_i, 0 \leq i \leq n\} \cup \{b_j, 0 \leq j \leq p\}$. $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et que σ' .



2 Définitions

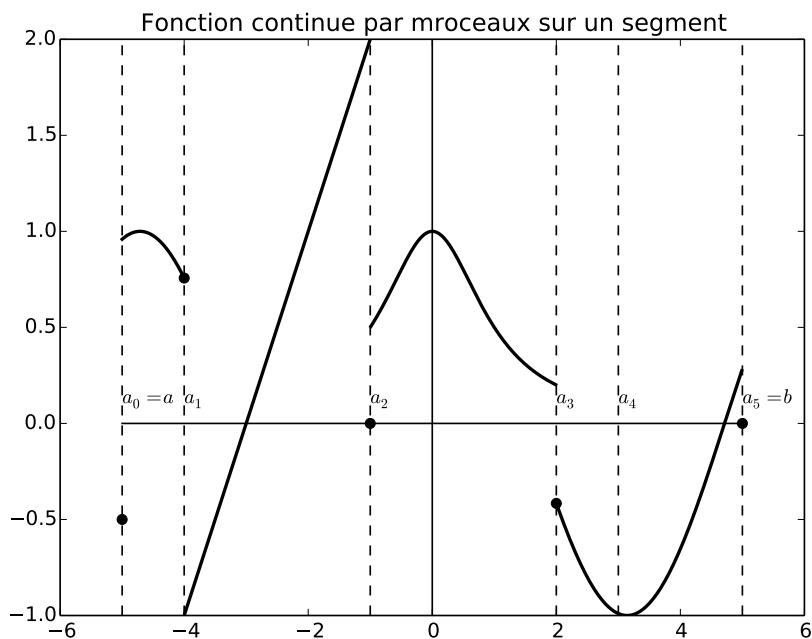
2.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ tq la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ ($0 \leq i \leq n - 1$) soit prolongeable en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Une telle subdivision de $[a, b]$ est alors dite subordonnée à f .

Toute subdivision de $[a, b]$ plus fine qu'une subdivision subordonnée à f est encore subordonnée à f .



$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ es subordonnée à f , elle n'est pas minimale.

Remarque

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

Il résulte immédiatement de la définition :

f est continue par morceaux sur $[a, b] \iff$ il existe une subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ et pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ une fonction $f_i : [a_i; a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{K}$ continue telles que :

$$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad f(x) = f_i(x)$$

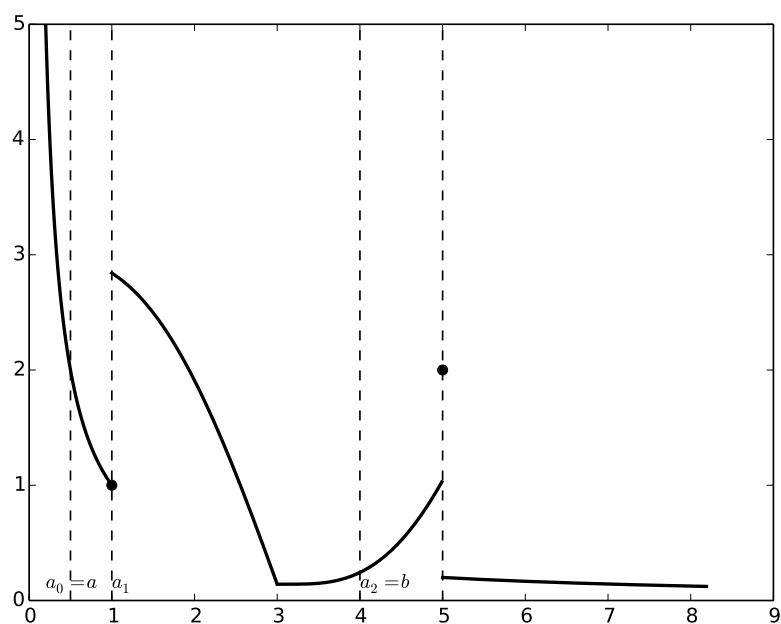
Les subdivisions de $[a; b]$ apparaissant ici sont évidemment les mêmes que dans la définition ie : les subdivisions subordonnées à f .

2.2 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que f est continue par morceaux sur I si et seulement si sa restriction à tout segment (non trivial) inclus dans I est continue par morceaux.

Dans le cas où I est un segment les deux définitions sont compatibles.

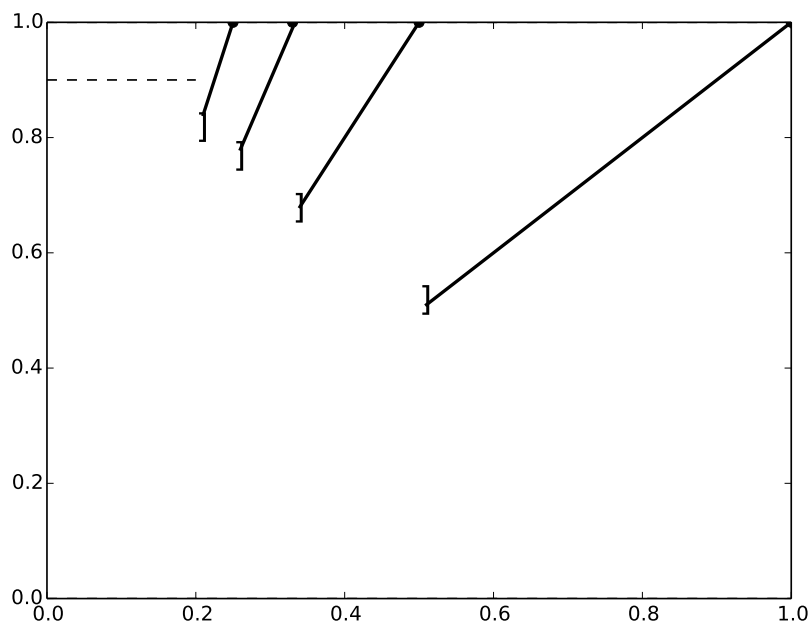


La fonction f dessinée est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

J'ai dessiné une subdivision de $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ subordonnée à f .

Exemples

- La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f \begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{cases}$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $x \in \left] \frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right]$:

$$0 < \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

$$n \leq \frac{1}{x} < n+1$$

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n$$

$$f(x) = nx$$

f est continue par morceaux sur $]0; 1]$.

La subdivision subordonnée minimale de $[a; b] \subset]0; 1]$ est :

$$a_0 = a < \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor \text{ si } 1/a \notin \mathbb{N}} < \dots < \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 \text{ dans tous les cas}} < b$$

- Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle.

La fonction $F_X \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto P(X \leq x) \end{cases}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$$X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\} \text{ avec } x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

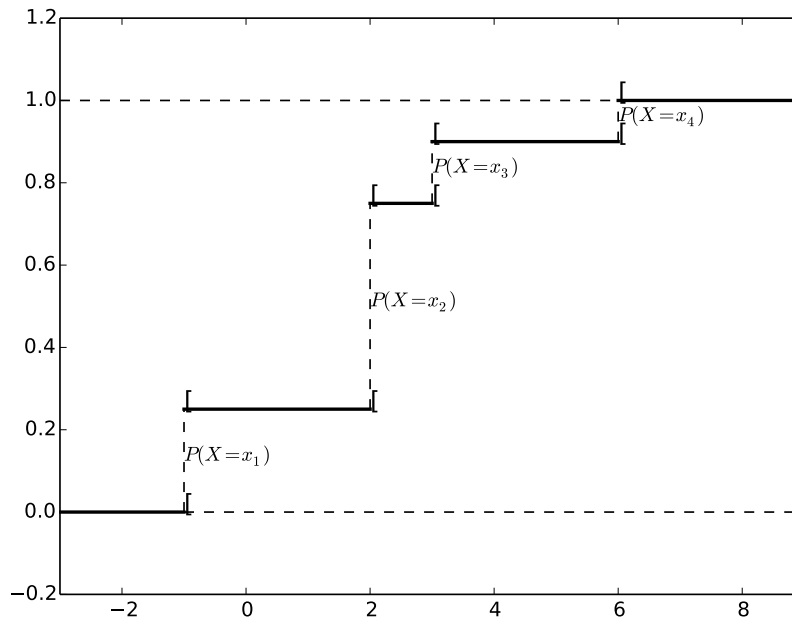
$$\forall x < x_1 \quad F_X(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$$

$$\forall x \geq x_n \quad F_X(x) = P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$$

Soit $x \in [x_1; x_n[$.

$$\exists ! k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad x_k \leq x < x_{k+1}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P((X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \dots \cup (X = x_k)) \\ &= \sum_{i=1}^k P(X = x_i) = \sum_{i=1}^k f(x_i) \text{ où } f \text{ est la loi de } X \\ &= F_X(x_k) \end{aligned}$$



2.3 Utilisation de limites aux points de subdivision

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

f est continue par morceaux sur $[a, b] \iff$ il existe $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision du segment $[a, b]$ telle que :

$$\begin{cases} - \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad f|_{[a_i, a_{i+1}[} \text{ est continue} \\ - \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x > a_i}} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{K} \\ - \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x < a_i}} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{K} \end{cases}$$

Remarque

On a alors :

$$f \text{ continue sur } [a; b] \iff \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = f(b) \\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x > a_i}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x < a_i}} f(x) = f(a_i) \end{cases}$$

3 Propriétés

3.1 Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur un segment

Proposition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

L'ensemble $\mathcal{M}^0([a, b], \mathbb{K})$ des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ continues par morceaux sur $[a, b]$ est un $\mathbb{K}$ ev.

Démonstration

On va démontrer que $\mathcal{M}^0([a, b], \mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

- $\mathcal{M}^0([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$: clair
- La fonction nulle $\left(\begin{cases} [a; b] \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto 0 \end{cases} \right)$ est dans $\mathcal{M}^0([a, b], \mathbb{K})$.

(En fait $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{M}^0([a, b], \mathbb{K})$)

- Soient $(f, g) \in \mathcal{M}^0([a, b], \mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Soit σ_1 une subdivision de $[a; b]$ subordonnée à f .

Soit σ_2 une subdivision de $[a; b]$ subordonnée à g .

$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est plus fine que σ_1 et que σ_2 , donc elle est subordonnée à la fois à f et à g .

Si on note $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$, on a donc :

— $\forall i \in \{0; \dots; n-1\} \quad \exists f_i \in \mathcal{C}^0([a_i; a_{i+1}], \mathbb{K})$ tq $\forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad f(x) = f_i(x)$

— $\forall i \in \{0; \dots; n-1\} \quad \exists g_i \in \mathcal{C}^0([a_i; a_{i+1}], \mathbb{K})$ tq $\forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad g(x) = g_i(x)$

On a alors :

— $\forall i \in \{0; \dots; n-1\} \quad \lambda f_i + \mu g_i \in \mathcal{C}^0([a_i; a_{i+1}], \mathbb{K})$

— $\forall i \in \{0; \dots; n-1\} \quad \forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda f_i(x) + \mu g_i(x) = (\lambda f_i + \mu g_i)(x)$

Donc $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur $[a; b]$, σ étant une subdivision subordonnée à $\lambda f + \mu g$.

3.2 Remarques

- On démontre alors facilement que si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}^0(I, \mathbb{K})$ (l'ensemble des applications $I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux) est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ donc un $\mathbb{K}$ ev.
- On démontre de manière similaire que le produit de deux fonctions continues par morceaux est une fonction continue par morceaux.
- Une composée de fonctions continues par morceaux n'est pas forcément continue par morceaux.

Exemple

$$\text{Soit } f \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}.$$

f est clairement continue sur $[-1; 0[$ et sur $]0; 1]$.

$$\forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\} \quad |f(x)| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Donc : } f(x) \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} 0$$

Donc f est continue en 0.

Finalement, f est continue sur $[-1; 1]$.

$$\text{Soit } g \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in]0; 1] \\ 0 \mapsto 0 \\ x \mapsto -1 \text{ si } x \in [-1; 0[\end{cases}.$$

g est continue par morceaux sur $[-1; 1]$.

$$\forall x \in [-1; 1] \quad f(x) \in [-1; 1]$$

Donc $h = g \circ f$ est bien définie.

h n'est pas continue par morceaux (ni a fortiori continue sur $[-1; 1]$) : elle a une infinité de points de discontinuité (les $\frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ et 0) sur le **segment** $[-1; 1]$.

- La fonction $f \begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{cases}$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$.

De plus f est prolongeable par continuité en 0.

Pourtant son prolongement n'est pas une fonction continue par morceaux sur $[0; 1]$.

En effet :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = 1 :$$

$$\forall x \in]0; 1] \quad \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$$

$$\forall x \in]0; 1] \quad x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1 < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$$

$$\forall x \in]0; 1] \quad 1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

La fonction obtenue est continue en 0 mais elle n'est pas continue par morceaux (ni a fortiori continue sur $[0; 1]$) : elle a une infinité de points de discontinuité sur $[0; 1]$.

3.3 Proposition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

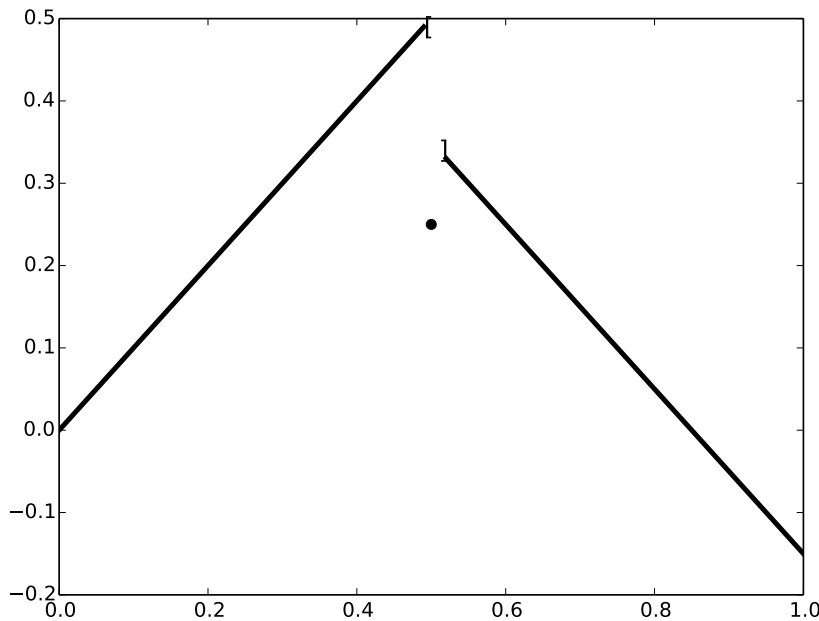
Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[a; b]$.

Alors f est bornée :

$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in [a; b] \quad |f(x)| \leq M$

Toutefois à la différence d'une fonction continue, f n'atteint pas forcément ses bornes : $\sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$

est bien défini mais pas $\max_{x \in [a; b]} |f(x)|$.



Démonstration

Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a; b]$ subordonnée à f .

Pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $f|_{[a_i; a_{i+1}[}$ est prolongeable en une fonction f_i continue sur $[a_i; a_{i+1}]$.

f_i est continue sur le segment $[a_i; a_{i+1}]$ donc elle y est bornée :

$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \exists M_i \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{tq} \quad \forall x \in [a_i; a_{i+1}] \quad |f_i(x)| \leq M_i$

Soit $M = \max(M_0, \dots, M_{n-1}, |f(a_0)|, \dots, |f(a_n)|) \in \mathbb{R}_+$.

$\forall x \in [a; b] \quad |f(x)| \leq M$.

4 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

4.1 Remarque liminaire

Je cite le programme à propos de l'intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux :

Brève extension des propriétés étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.

4.2 Définition

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à f .

Pour tout $i \in \{0; \dots; n-1\}$ il existe une fonction $f_i : [a_i; a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{K}$ continue telles que :

$\forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad f(x) = f_i(x)$.

$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t) dt$ est bien définie : c'est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue sur un segment, notion introduite dans le cours de première année.

On prend comme définition de l'intégrale de f sur $[a; b]$:

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t) dt$$

4.3 Remarque

Pour être valable la définition précédente doit être indépendante du choix de la subdivision subordonnée à f ¹.

C'est bien le cas et cela se démontre ainsi :

- Avec la relation de Chasles², on montre que la somme ne change pas lorsqu'on ajoute un point à une subdivision.
- On en déduit par récurrence que la somme ne change pas lorsqu'on ajoute un nombre fini de points à une subdivision.
Dit autrement cela signifie que pour deux subdivisions dont l'une est plus fine que l'autre, la somme est la même.
- On en déduit que la somme est la même pour deux subdivisions quelconques en passant par l'intermédiaire de la réunion qui est plus fine que les deux premières.

4.4 Exemple

$$\int_{[1/4;1]} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx$$

$$\begin{aligned} \int_{[1/4;1]} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx &= \int_{1/4}^{1/3} 3x dx + \int_{1/3}^{1/2} 2x dx + \int_{1/2}^1 x dx \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{21}{2 \times 9 \times 16 = 288} + \frac{72 - 32 + 144 - 36}{288} \\ &= \frac{169}{288} \end{aligned}$$

1. prendre la subdivision minimale suffirait si on ne devait considérer qu'une seule fonction mais lorsque doit en envisager plusieurs cela pose de gros problème. Cf la linéarité de l'intégrale.

2. pour l'intégrale des fonctions continues, ce qui a été vu en première année

4.5 Partie réelle et partie imaginaire de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

- $\int_{[a;b]} \Re f = \Re \left(\int_{[a;b]} f \right)$
- $\int_{[a;b]} \Im f = \Im \left(\int_{[a;b]} f \right)$
- $\int_{[a;b]} \bar{f} = \overline{\int_{[a;b]} f}$

(La fonction $\bar{f}$ étant, bien sûr, continue par morceaux)

4.6 Linéarité de l'intégrale

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

- $\forall (f, g) \in \mathcal{M}^0([a; b], \mathbb{K})^2 \quad \int_{[a;b]} f + g = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$
- $\forall f \in \mathcal{M}^0([a; b], \mathbb{K}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \int_{[a;b]} \lambda f = \lambda \int_{[a;b]} f$

En d'autres termes l'application $\begin{cases} \mathcal{M}^0([a; b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ f \mapsto \int_{[a;b]} f \end{cases}$ est linéaire.

Démonstration

Soient f et $g \in \mathcal{M}^0([a; b], \mathbb{K})$.

Il existe $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a; b]$ subordonnée à la fois à f et à g (cf A.3.1).

Pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $f|_{a_i; a_{i+1}[}$ est prolongeable en une fonction f_i continue sur $[a_i; a_{i+1}]$.

Pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $g|_{a_i; a_{i+1}[}$ est prolongeable en une fonction g_i continue sur $[a_i; a_{i+1}]$.

On a alors :

$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) = f_i(x) + g_i(x) = (f_i + g_i)(x)$ avec $f_i + g_i \in \mathcal{C}^0([a_i; a_{i+1}])$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{[a;b]} f + g &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f_i(t) + g_i(t)) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t) dt + \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(t) dt \right) \text{ linéarité de l'intégrale des fonctions continues} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t) dt + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(t) dt \\ &= \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g \end{aligned}$$

Idem pour $\int_{[a;b]} (\lambda f)$.

4.7 Positivité de l'intégrale

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. On suppose :

$\forall x \in [a; b] \quad f(x) \geq 0$

Alors : $\int_{[a;b]} f \geq 0$

Démonstration

Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a; b]$ subordonnée à f .

Pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $f|_{[a_i; a_{i+1}[}$ est prolongeable en une fonction f_i continue sur $[a_i; a_{i+1}]$.

f étant positive, par continuité les f_i le sont aussi.

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t) dt \geq 0 \right) \geq 0$$

Remarque

Contrairement aux fonctions continues, si f est continue par morceaux, positive et d'intégrale nulle alors f n'est pas forcément la fonction nulle.

Par exemple, soit $f \begin{cases} [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto 1 \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \neq a \end{cases}$.

$\int_{[a;b]} f = 0$ bien que f soit positive non nulle.

On a en fait :

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux positive.

$$\begin{aligned} \int_{[a;b]} f = 0 &\iff f \text{ est nulle en tout point où elle est continue} \\ &\iff \{x \in [a; b] \text{ tq } f(x) \neq 0\} \text{ est fini} \end{aligned}$$

4.8 Croissance de l'intégrale

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f et $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux.

On suppose :

$$\forall x \in [a; b] \quad f(x) \leq g(x)$$

$$\text{Alors : } \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} g$$

4.9 Inégalité de la moyenne

• Définition

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_{[a;b]} f$ s'appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

• Théorème

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Alors l'application $|f| \begin{cases} [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |f(x)| \end{cases}$ est continue par morceaux et on a :

$$\left| \int_{[a;b]} f \right| \leq \int_{[a;b]} |f| \leq (b-a) \sup_{[a;b]} |f|$$

(Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment mais elle n'atteint pas forcément ses bornes)

On peut réécrire ces inégalités sous la forme : $\left| \frac{1}{b-a} \int_{[a;b]} f \right| \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a;b]} |f| \leq \sup_{[a;b]} |f|$

ie : la valeur absolue de la valeur moyenne de f est plus petite que la valeur moyenne de $|f|$ elle même plus petite que $\sup_{[a;b]} |f|$.

Démonstration

On montre d'abord que $|f|$ est continue par morceaux.

Il existe $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a; b]$ telle que :

- i $\forall i \in \{0; \dots; n-1\}$ $f|_{[a_i, a_{i+1}[}$ est continue
- ii $\forall i \in \{0; \dots; n-1\}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x > a_i}} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$
- iii $\forall i \in \{1; \dots; n\}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x < a_i}} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$

L'application $\begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto |y| \end{cases}$ étant continue, on a :

- i $\forall i \in \{0; \dots; n-1\}$ $|f|_{[a_i, a_{i+1}[}$ est continue
- ii $\forall i \in \{0; \dots; n-1\}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x > a_i}} |f(x)|$ existe dans $\mathbb{R}$
- iii $\forall i \in \{1; \dots; n\}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x < a_i}} |f(x)|$ existe dans $\mathbb{R}$

Donc $|f|$ est bien continue par morceaux.

$$\forall x \in [a; b] \quad |f(x)| \leq \sup_{[a;b]} |f|$$

donc, d'après 4.8 :

$$\int_{[a;b]} |f| \leq \int_{[a;b]} \sup_{[a;b]} |f| = (b-a) \sup_{[a;b]} |f|$$

$$\text{Passons à } \left| \int_{[a;b]} f \right| \leq \int_{[a;b]} |f|.$$

Avec les notations habituelles :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a;b]} f \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_i(t)| dt = \int_{[a;b]} |f| \end{aligned}$$

car $|f_i| \in \mathcal{C}^0([a_i; a_{i+1}])$ et :

$$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \forall x \in]a_i; a_{i+1}[\quad |f(x)| = |f_i|(x)$$

4.10 Notation $\int_a^b f(x) dx$

Dans ce paragraphe on ne suppose plus $a < b$.

• 4.10.1 Définition

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Soient a et b deux éléments de I .

On définit $\int_a^b f(x) dx$, qu'on peut aussi noter $\int_a^b f$, par :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_{[a;b]} f \text{ si } a < b \\ \int_a^b f(x) dx &= 0 \text{ si } a = b \text{ ie } \int_a^a f(x) dx = 0 \\ \int_a^b f(x) dx &= - \int_{[b;a]} f \text{ si } a > b\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

- **Linéarité**

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et a et b deux éléments de I .

$$\textbf{i} \quad \forall (f, g) \in \mathcal{M}^0(I, \mathbb{K})^2 \quad \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\textbf{ii} \quad \forall f \in \mathcal{M}^0(I, \mathbb{K}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

En d'autres termes l'application $\begin{cases} \mathcal{M}^0(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ f \mapsto \int_a^b f(x) dx \end{cases}$ est linéaire.

- Les résultats sur la positivité et la croissance ainsi que l'inégalité de la moyenne ne s'appliquent qu'aux intégrales $\int_a^b f(x) dx$ avec $a < b$.

4.11 Relation de Chasles

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Soient a, b et c trois éléments de I .

Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4.12 Changement de variable

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha < \beta$ et $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi([\alpha; \beta]) \subset I$.

On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha; \beta]$ strictement monotone : cela revient à supposer que φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha; \beta]$ sur $[\varphi(\alpha); \varphi(\beta)]$ lorsque φ est croissante, sur $[\varphi(\beta); \varphi(\alpha)]$ lorsque φ est décroissante.

Alors la fonction $\begin{cases} [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{K} \\ u \mapsto f(\varphi(u)) \varphi'(u) \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[\alpha; \beta]$ et on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

Démonstration

φ est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$), strictement monotone sur $[\alpha; \beta]$ donc φ réalise une bijection de $[\alpha; \beta]$ sur le segment $J = [\min(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)), \max(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))]$.

f est continue par morceaux sur I donc sur J .

Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de J subordonnée à f .

Pour tout $i \in \{0; \dots; n\}$, on pose $\alpha_i = \varphi^{-1}(a_i)$ si φ est strictement croissante ou $\alpha_i = \varphi^{-1}(a_{n-i})$ si φ est strictement décroissante.

$\sigma' = (\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ est alors une subdivision de $[\alpha; \beta]$.

Pour tout $i \in \{0; \dots; n-1\}$ il existe une fonction $f_i : [a_i; a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{K}$ continue telles que :

$\forall t \in]a_i; a_{i+1}[\quad f(t) = f_i(t)$.

Pour tout $i \in \{0; \dots; n-1\}$, on pose $g_i = f_i \circ \varphi \varphi'$ si φ est croissante, $f_{n-1-i} \circ \varphi \varphi'$ si φ est décroissante.

Pour tout $i \in \{0; \dots; n-1\}$, g_i est une fonction continue sur $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$ vérifiant :

$\forall i \in \{0; \dots; n-1\} \quad \forall x \in]\alpha_i; \alpha_{i+1}[\quad f(\varphi(x)) \varphi'(x) = g_i(x)$

Donc $f \circ \varphi \varphi'$ est bien continue par morceaux et :

Dans le cas où φ est croissante :

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g_i(x) dx \text{ avec la définition vue en A.4.2} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f_i(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\varphi(\alpha_i)}^{\varphi(\alpha_{i+1})} f_i(t) dt \text{ avec la formule vue en Sup pour les fonctions continues} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t) dt \\
 &= \int_a^b f(t) dt \text{ avec la définition vue en A.4.2} \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt
 \end{aligned}$$

et dans le cas où φ est décroissante :

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g_i(x) \, dx \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f_{n-1-i}(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\varphi(\alpha_i)}^{\varphi(\alpha_{i+1})} f_{n-1-i}(t) \, dt \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_{n-i}}^{a_{n-i-1}} f_{n-1-i}(t) \, dt \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_{j+1}}^{a_j} f_j(t) \, dt \quad (j = n-1-i) \\
 &= - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f_j(t) \, dt \\
 &= - \int_{a_0}^{a_n} f(t) \, dt = - \int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(t) \, dt \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \, dt
 \end{aligned}$$