ANALYSE 1
PC*1
2024 - 2025
Chapitre 1 :
Intégrales généralisées

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Introduction : intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$

1.1 Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a;+\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ou qu'elle converge si, et seulement si, la fonction $F\begin{cases}[a;+\infty[\to \mathbb{K}\\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\end{cases}$ possède une limite finie en $+\infty$.
Dans ce cas on pose $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Le programme mentionne également la notation $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.
Si F ne possède pas de limite finie en $+\infty$ on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente ou qu'elle diverge.

1.2 Exemples de référence

- Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R})$.
  — **Premier cas :** $\alpha \neq 1$
  $\forall x \in [1;+\infty[\ \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$
  Donc :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} &\iff \lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} \in \mathbb{R}\\ &\iff 1-\alpha < 0 \quad (\alpha \neq 1)\\ &\iff \alpha > 1\end{aligned}$$

— **Deuxième cas :** $\alpha = 1$
$\forall x \in [1;+\infty[\ \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Finalement :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

On a alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$: inutile de le retenir, on le retrouve quand on en a besoin.

- Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

— **Premier cas :** $\alpha \neq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x = \frac{1}{\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}$
Donc :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge } &\iff \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \in \mathbb{R}\\ &\iff \alpha > 0 \quad (\alpha \neq 0)\end{aligned}$$

— **Deuxième cas :** $\alpha = 0$
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Finalement :
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \alpha > 0$$

On a alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

1.3 Relation de Chasles

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Soit $f : [a;+\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On a :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$
Si c'est le cas on a :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$
La nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est déterminée que par le comportement de f au voisinage de $+\infty$.
Le programme mentionne la terminologie : intégrale convergente (ou divergente) en $+\infty$.

Démonstration
$\forall x \in [a;+\infty[\ \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t$
On en déduit :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe dans } \mathbb{K} \iff \lim_{x\to+\infty} \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe dans } \mathbb{K}$
ie $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$
Et si il y a existence alors :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lim\limits_{x \to +\infty} \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t$
ie $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

1.4 Cas des fonctions positives

1.4.1 Introduction

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux *positive*.
Alors la fonction $\begin{cases} [a; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est croissante.
En effet si $x_1 \leq x_2$ on a :
$\int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\limits_{x \in [a; +\infty[} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R} \iff \text{ la fonction } \begin{cases} [a; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \text{ est majorée}$$

1.4.2 CNS de convergence

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux *positive*.
Alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \text{ la fonction } \begin{cases} [a; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \text{ est majorée}$$

Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge on a $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\limits_{x \in [a; +\infty[} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge on a $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

1.4.3 Utilisation d'une majoration

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux.
On suppose :
$\forall t \in [a; +\infty[\; 0 \leq f(t) \leq g(t)$
Alors la convergence de $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ entraîne celle de $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration
$\forall x \in [a; +\infty[\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$: croissance de l'intégrale sur un segment vue en Sup.
$\forall x \in [a; +\infty[\; \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$: cf le paragraphe précédent.
Donc :
$\forall x \in [a; +\infty[\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ réel indépendant de x.
Donc la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée. Comme f est positive, on en déduit que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

converge.

Remarque
Si on combine ce résultat avec le paragraphe précédent, on obtient :
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux.
On suppose :
$\exists t_0 \in [a; +\infty[$ tq $\forall t \in [t_0; +\infty[\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$
Alors la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ entraîne celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2 Exemples

Exercice 1

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et donner sa valeur.

Exercice 2

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$ converge et donner sa valeur.

Exercice 3

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$ converge et la calculer.

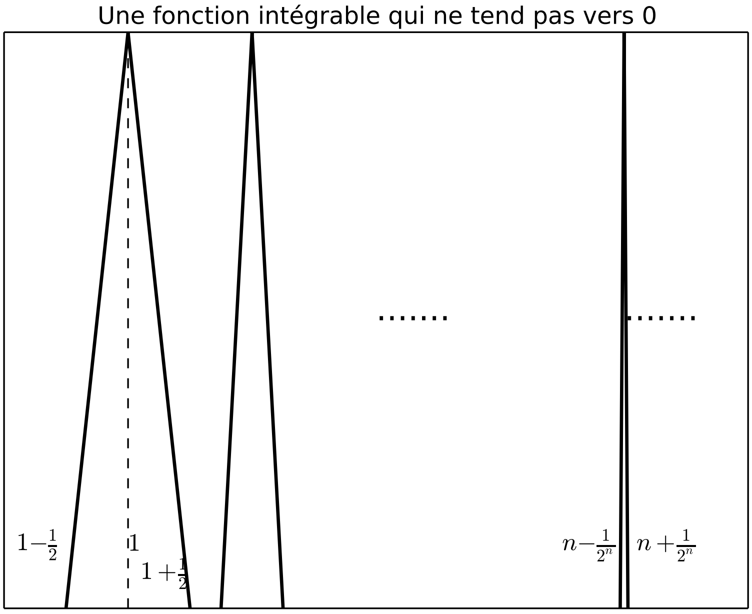
Exercice 4

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$ converge et la calculer.

Exercice 5

Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Comme on le voit sur cet exemple, si une fonction f, continue par morceaux sur $[a; +\infty[$, a une limite nulle en $+\infty$ il est possible que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il est possible que $f(t)$ ne tende pas vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$, nulle en dehors des segments $\left[n - \frac{1}{2^n}; n + \frac{1}{2^n}\right]$, égale à 1 en n et continue :



Il est clair que la fonction ne tend pas vers 0 en $+\infty$ (même si elle prend "souvent" la valeur 0).
Soit F la primitive de f nulle en 0.
f est positive donc F est croissante et $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Mais :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \ F\left(n+\frac{1}{2^n}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \times \frac{2}{2^k} \times 1 \quad \text{cf l'aire d'un triangle} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1\end{aligned}$$

Donc $l = 1 \in \mathbb{R}$.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

3.1 Les définitions

3.1.1 Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert à droite

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f : [a;b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ou qu'elle converge si, et seulement si, la fonction $F \begin{cases} [a;b[\to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ possède une limite finie à gauche en b.

  Dans ce cas on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} F(x) = \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Le programme mentionne également la notation $\displaystyle\int_a^b f$.

Si F ne possède pas de limite finie à gauche en b on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente ou qu'elle diverge.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente ou qu'elle converge absolument si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors elle converge.
  De plus on a :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration
On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
— **Cas** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
On définit les fonctions f^+ (partie positive de f) et f^- (partie négative de f) par :
$$f^+ = \sup(f,0) \begin{cases} [a;b[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) \text{ si } f(t) \geq 0 \\ t \mapsto 0 \text{ si } f(t) \leq 0 \end{cases} \quad \text{et } f^- = -\inf(f,0) \begin{cases} [a;b[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto 0 \text{ si } f(t) \geq 0 \\ t \mapsto -f(t) \text{ si } f(t) \leq 0 \end{cases}$$
f^+ et f^- sont à valeurs réelles positives et on a :
$$f = f^+ - f^- \text{ et } |f| = f^+ + f^-$$
$$\text{D'où : } f^+ = \frac{f + |f|}{2} \text{ et } f^- = \frac{|f| - f}{2}$$
On en déduit que f^+ et f^- sont continues par morceaux sur $[a;b[$.
On a $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$.
D'après 1.4.3, $\displaystyle\int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Comme $f = f^+ - f^-$ on a, en anticipant sur la linéarité, : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
— **Cas** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
On a $0 \leq |\Re e(f)| \leq |f|$ et $0 \leq |\Im m(f)| \leq |f|$ donc d'après 1.4.3, $\displaystyle\int_a^b \Re e(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \Im m(f(t))\,\mathrm{d}t$ convergent absolument donc convergent d'après ce qui précède.
Comme $f = \Re e(f) + i\Im m(f)$ on a, en anticipant sur la linéarité : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Enfin on a :
$$\forall x \in [a;b[\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
ce qui donne, en faisant tendre x vers b :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Remarque
La réciproque est fausse.On appelle intégrale semi-convergente une intégrale qui converge

sans être absolument convergente.

Exemple classique :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.
Cet exemple sera détaillé plus bas.

3.1.2 Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert à gauche

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a;b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ou qu'elle converge si, et seulement si, la fonction $F \begin{cases}]a;b] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ possède une limite finie à droite en a.
  Dans ce cas on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
  Le programme mentionne également la notation $\displaystyle\int_a^b f$.
  Si F ne possède pas de limite finie à droite en a on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente ou qu'elle diverge.
- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente ou qu'elle converge absolument si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors elle converge.
  De plus on a :
  $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
  La démonstration est similaire à celle des intervalles ouverts à droite.
- La réciproque est fausse.On appelle intégrale semi-convergente une intégrale qui converge sans être absolument convergente.

3.1.3 Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a;b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ou qu'elle converge si, et seulement si, il existe $c \in]a;b[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
  Dans ce cas on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
  Le programme mentionne également la notation $\displaystyle\int_a^b f$.
  Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente ou qu'elle diverge.
  On justifiera plus tard que cette définition est valide ie que le choix de c n'a pas d'importance.

- On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente ou qu'elle converge absolument si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors elle converge.
  De plus on a :
  $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
  Démonstration
  On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
  Soit $c \in]a;b[$.
  $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes donc convergentes en appliquant ce qui précède.
  On en déduit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
  De plus,
  $$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \left|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \int_a^c |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_c^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
- La réciproque est fausse.On appelle intégrale semi-convergente une intégrale qui converge sans être absolument convergente

3.1.4 Fonctions intégrables

Je recopie la définition du programme :

> Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

De manière plus explicite :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un segment.
Soit a sa borne inférieure (finie ou infinie).
Soit b sa borne supérieure (finie ou infinie).
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On dit que f est intégrable sur I si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Remarques

- Autrefois, le point suivant figurait au programme :

  > Par convention on dira d'une fonction continue par morceaux sur un segment I qu'elle est intégrable sur I.

Cette convention est indispensable pour une bonne application du théorème de convergence dominée, du théorème de continuité sous le signe $\int$ et du théorème de dérivation sous le signe $\int$ qu'on verra plus tard.

- Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux et intégrable sur I son intégrale sur I est absolument convergente donc convergente. Le programme mentionne les notations $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_I f$.
  Toutefois, en pratique c'est la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est la plus utilisée.
- Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  f intégrable sur $I \iff |f|$ intégrable sur I
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
  Si f est positive, ou plus généralement de signe constant alors :

$$\begin{aligned} f \text{ intégrable sur } I \quad &\iff \quad \int_I f \text{ converge absolument} \\ &\iff \quad \int_I f \text{ converge} \end{aligned}$$

- Soient $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux intégrable sur I et I' un intervalle contenu dans I.
  Alors f est intégrable sur I'.

Démonstration
Il y a de nombreux cas à distinguer. Je ne vais en traiter qu'un en détail.
Soit a et b deux réels avec $a < b$.
Soit f continue par morceaux sur $[a;b]$.
Par convention, f est donc intégrable sur $[a;b]$.
On va montrer que f est intégrable sur $[a;b[$.
La fonction $|f|$ est elle aussi continue par morceaux sur $[a;b]$.
On peut donc définir la fonction $F \begin{cases} [a;b] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x |f(t)|\ \mathrm{d}t \end{cases}$.
F est continue sur $[a;b]$.
En effet $|f|$ est bornée sur $[a;b]$ et on a [1] :

$$\forall (x,y) \in [a;b]^2\ |F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x |f(t)|\ \mathrm{d}t - \int_a^y |f(t)|\, dt \right| = \left| \int_y^x |f(t)|\ \mathrm{d}t \right| \le |x-y| \sup_{[a;b]} |f|$$

F est lipschitzienne donc continue sur $[a;b]$.

Revenant aux intégrales impropres, on a :
$F(x) \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} F(b) = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ vue comme intégrale sur un segment.
Donc $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge au sens de la définition des intégrales généralisées sur un intervalle ouvert à droite et f est intégrable sur $[a;b[$.

1. en distinguant les cas $x \le y$ et $x > y$ pour la dernière inégalité

4 Relation de Chasles

4.1 Cas des intégrales généralisées sur un intervalle ouvert à droite

4.1.1 Théorème

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $c \in [a; b[$.
Soit $f : [a; b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On a :
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
Si c'est le cas on a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration
$\forall x \in [a; b[\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$
On en déduit :
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K} \iff \displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$
ie $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
Et si il y a existence alors :
$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
ie $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

4.1.2 Conséquences

- Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f : [a; b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  La nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est déterminée que par le comportement de f au voisinage de b. On peut donc parler d'intégrale convergente (ou divergente) en b.
- Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f : [a; b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  La nature de $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ ie l'intégrabilité de f sur $[a; b[$ n'est déterminée que par le comportement de f au voisinage de b. On peut donc parler de fonction intégrable en b.

4.2 Cas des intégrales généralisées sur un intervalle ouvert à gauche

4.2.1 Théorème

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c \in]a; b]$.
Soit $f :]a; b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On a :
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
Si c'est le cas on a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

$\forall x \in]a;b] \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$
On en déduit :
$\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K} \Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$
ie $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
Et si il y a existence alors :
$\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$
ie $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

4.2.2 Conséquences

- Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a;b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  La nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est déterminée que par le comportement de f au voisinage de a. On peut donc parler d'intégrale convergente (ou divergente) en a.
- Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a;b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  La nature de $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ ie l'intégrabilité de f sur $]a;b]$ n'est déterminée que par le comportement de f au voisinage de a. On peut donc parler de fonction intégrable en a.

4.3 Cas des intégrales généralisées sur un intervalle ouvert

4.3.1 Justification de la définition des intégrales généralisées sur un intervalle ouvert

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a;b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Soient c_1 et $c_2 \in]a;b[$.
D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_{c_1}^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} & \Longleftrightarrow & \displaystyle\int_{c_2}^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \\ \displaystyle\int_a^{c_1} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} & \Longleftrightarrow & \displaystyle\int_a^{c_2} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \end{array}$$

En particulier, si il existe $c_1 \in]a;b[$ tel que $\displaystyle\int_a^{c_1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c_1}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent alors, pour tout $c_2 \in]a;b[$ $\displaystyle\int_a^{c_2} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c_2}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \int_a^{c_2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_2}^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^{c_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_2}^{c_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_1}^b f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^{c_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_1}^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

4.3.2 Intégrabilité d'une fonction sur un intervalle ouvert

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a;b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Soit $c \in]a;b[$ (c est donc nécessairement un réel).

f intégrable sur $]a;b[\Longleftrightarrow f$ intégrable sur $]a;c]$ et sur $[c;b[$

4.4 Cas où les bornes sont dans un ordre quelconque

4.4.1 Définition

Soient a et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$.
Soit f :?$a;b$? $\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge on pose :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

4.4.2 Proposition

Soient $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ deux à deux distincts.
Soit f :? $\min(a,b,c);\max(a,b,c)$? $\to \mathbb{K}$ continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_{\min(a,b,c)}^{\max(a,b,c)} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

ces intégrales étant évidemment bien définies.

Le cas $a < c < b$ a déjà été vu.
Le cas des autres dispositions de a, b et c s'en déduit.
Par exemple si $a < b < c$ on a :
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$
Donc :
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

5 Intermède : révisions sur les équivalents et les développements limités

Exercice 6

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)$$

Exercice 7

$f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - \ln(1+x)}{x\left(\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{1-x}\right)}$.
Limite l de f en 0 ? équivalent de $f(x) - l$?

Exercice 8 *(Mines 2005)*

On définit sur $]0,+\infty[$ f par :

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$$

Peut on prolonger f en 0 ? Tangente en zéro ? Position de la courbe par rapport à celle-ci ?

Exercice 9

Développement asymptotique en $\pm\infty$ de $f(x)=x\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$.
(On donnera trois termes)

Exercice 10

Développement limité à l'ordre 2 en 1 de $f : x\mapsto \frac{2x\ln x}{x-1}$.

Exercice 11

Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\arctan(2\sin x)-\frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$.

Exercice 12

Développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de $\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$.

Exercice 13

Développement limité à l'ordre 9 en 0 de la fonction $x\mapsto[\ln(\cos(x))]^3$.

Exercice 14 *(X 2021)*

1. Montrer que pour $x>0$ assez petit, l'équation $-x^7+x^2y=y^5$ a deux solutions dans $\mathbb{R}_+$.
2. Equivalent de ces deux solutions lorsque x tend vers 0^+.
3. Donner les deux termes suivants du développement asymptotique.

6 Exemples de référence

6.1 Intégrales de Riemann : intégrabilité de $t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
Compte tenu des remarques faites en 3.1.4 et de l'étude faite en 1.2 :
$t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty \iff \alpha>1$
Plus précisément :
Soit $a>0$ et $f_\alpha \begin{cases}[a;+\infty[\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}\end{cases}$.
f_α est continue sur $[a;+\infty[$.
f_α est intégrable sur $[a;+\infty[\iff \alpha>1$

6.2 Intégrales de Riemann : intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en 0^+

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 $\Longleftrightarrow \alpha < 1$
Plus précisément :
Soit $a > 0$ et $f_\alpha \begin{cases}]0;a] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha} \end{cases}$.
f_α est continue sur $]0;a]$.
f_α est intégrable sur $]0;a] \Longleftrightarrow \alpha < 1$

Démonstration

- **Premier cas :** $\alpha \neq 1$
  $\forall x \in]0;1] \quad \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_x^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
  f_α étant une fonction positive :
  $$\begin{aligned} f_\alpha \text{ est intégrable sur }]0;1] &\Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge absolument} \\ &\Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \\ &\Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^{1-\alpha} \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow 1-\alpha > 0 \quad (\alpha \neq 1) \\ &\Longleftrightarrow \alpha < 1 \end{aligned}$$
- **Deuxième cas :** $\alpha = 1$
  $\forall x \in]0;1] \quad \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x>0}]{} +\infty$
  $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ ne converge pas absolument et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0^+.

6.3 Intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Compte tenu des remarques faites en 3.1.4 et de l'étude faite en 1.2 :
$t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty \Longleftrightarrow \alpha > 0$
Plus précisément :
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha \begin{cases} [a;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t} \end{cases}$.
f_α est continue sur $[a;+\infty[$.
f_α est intégrable sur $[a;+\infty[\Longleftrightarrow \alpha > 0$

6.4 Intégrabilité de ln en 0^+

La fonction ln est intégrable en 0^+.
Plus précisément :

Soit $a > 0$.
La fonction ln est continue sur $]0; a]$.
La fonction ln est intégrable sur $]0; a]$.

Démonstration
$\forall x \in]0;1]$ $\displaystyle\int_x^1 |\ln(t)|\,\mathrm{d}t = -\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -\left[t\ln t - t\right]_x^1 = 1 + x\ln x - x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 1$.
Donc : $\displaystyle\int_0^1 \ln t\ \mathrm{d}t$ converge absolument et ln est intégrable sur $]0; 1]$.
Compte tenu de la relation de Chasles, ln est intégrable sur $]0; a]$.

7 Etude de l'intégrabilité d'une fonction

7.1 Introduction

On aura souvent à considérer les problème suivants :

- Soit $f : I \to \mathbb{K}$.
  f est-elle intégrable sur I ?
  La première chose à faire est de regarder si f est continue par morceaux.
  Si f n'est pas continue par morceaux sur I la question de l'intégrabilité de f sur I ne se pose même pas.
  Compte tenu des remarques faites précédemment, l'intégrabilité de f sur I dépend de son comportement aux extrémités de I qui n'appartiennent pas I, comportement qui peut être précisé par un équivalent par exemple.
- Nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où a et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et f est une fonction.
  La première chose à faire est de regarder si f est continue par morceaux.
  Si f n'est pas continue par morceaux au moins sur $]a; b[$, la question de l'existence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne se pose même pas.
  Si f est continue sur $[a; b]$ (ce qui sous-entend $a, b \in \mathbb{R}$) l'intégrale ne pose aucun problème de définition : c'est une intégrale qui relève du cours de Sup.
  Si f n'est que continue par morceaux sur $[a; b]$ l'intégrale ne pose pas non plus de problème de définition : c'est une intégrale qui relève du chapitre introductif sur les fonctions continues par morceaux.
  Dans les autres cas, il s'agit d'une intégrale généralisée.
  Evidemment, une intégrale peut être convergente sans être absolument convergente mais je cite le programme :

  > L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

  Il arrivera donc souvent que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sera convergente parce qu'absolument convergente.
  On est donc ramené au problème précédent et à l'étude du comportement de f en a si a n'appartient pas au domaine de définition de f et en b si b n'appartient pas au domaine de définition de f.

7.2 Cas trivial d'intégrabilité

7.2.1 Cas d'un intervalle ouvert à droite

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a; b[\to \mathbb{K}$ continue.
On suppose que f possède une limite finie l en b.
Alors f est intégrable sur $[a; b[$.

En effet le prolongement par continuité de f : $\widehat{f} \begin{cases} [a;b] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x) \text{ si } x \in [a;b[\\ b \mapsto l \end{cases}$ est continu sur le segment $[a; b]$ donc y est intégrable.
D'après le paragraphe 3.1.4, $\widehat{f}$ est intégrable sur $[a; b[$ donc f est intégrable sur $[a; b[$.
De plus, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$ et on peut considèrer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ comme une intégrale "ordinaire".
Exemple : $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$ est continue sur $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right[$.
Pour étudier son comportement en 1, on pose $t = 1 - h$ avec $h \to 0^+$.
$f(t) = \dfrac{\ln(1-h)}{h} \sim \dfrac{-h}{h} = -1$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ en posant $f(1) = -1$.
f est donc intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right[$ ie $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
Donc $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

7.2.2 Cas d'un intervalle ouvert à gauche

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a; b] \to \mathbb{K}$ continue.
On suppose que f possède une limite finie l en a.
Alors f est intégrable sur $]a; b]$.

En effet le prolongement par continuité de f : $\widehat{f} \begin{cases} [a;b] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x) \text{ si } x \in]a;b] \\ a \mapsto l \end{cases}$ est continu sur le segment $[a; b]$ donc y est intégrable.
D'après le paragraphe 3.1.4, $\widehat{f}$ est intégrable sur $]a; b]$ donc f est intégrable sur $]a; b]$.
De plus, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$ et on peut considérer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ comme une intégrale "ordinaire".
Exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]0; 1]$ et $f(t) \sim \dfrac{t}{t} = 1$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $[0; 1]$ en posant $f(0) = 1$.
f est donc intégrable sur $]0; 1]$ ie $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

7.2.3 Cas d'un intervalle ouvert

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a; b[\to \mathbb{K}$ continue.
On suppose que f possède une limite finie en a et en b.
Alors f est intégrable sur $]a; b[$.
En effet si on fixe c dans $]a; b[$, d'après ce qui précède f est intégrable sur $]a; c]$ et sur $[c; b[$.
D'après la relation de Chasles, f est intégrable sur $]a; b[$.

7.3 Théorème de comparaison

7.3.1 Cas d'un intervalle ouvert à droite

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f, g : [a; b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux.

- Si $f(t) = O_b(g(t))$ alors l'intégrabilité de g en b entraîne celle de f.
- Si $f(t) = o_b(g(t))$ alors l'intégrabilité de g en b entraîne celle de f.
- Si $f(t) \sim_b g(t)$ alors l'intégrabilité de f en b est équivalente à celle de g.

Démonstration
Compte tenu de l'avancement du cours et en conformité avec le programme, je vais faire uniquement la démonstration lorsque $b = +\infty$.

- $f(t) = O_{+\infty}(g(t))$ donc :
  $\exists M \in \mathbb{R}_+$ et $\exists c \in]a; +\infty[$ tq $\forall t \in [c; +\infty[\ |f(t)| \leq M\ |g(t)|$
  g est intégrable en b donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} |g(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.
  En utilisant 1.4.3 (et en anticipant sur la linéarité), $\displaystyle\int_c^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge et f est intégrable en b.
- Si $f(t) = o_b(g(t))$ alors $f(t) = O_b(g(t))$ et on peut appliquer ce qui précède.
- Si $f(t) \sim_b g(t)$ alors $f(t) = O_b(g(t))$ et $g(t) = O_b(f(t))$ et on peut appliquer ce qui précède.

7.3.2 Cas d'un intervalle ouvert à gauche

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $f, g :]a; b] \to \mathbb{K}$ continues par morceaux.

- Si $f(t) = O_a(g(t))$ alors l'intégrabilité de g en a entraîne celle de f.
- Si $f(t) = o_a(g(t))$ alors l'intégrabilité de g en a entraîne celle de f.
- Si $f(t) \sim_a g(t)$ alors l'intégrabilité de f en a est équivalente à celle de g.

7.4 Premiers exemples

Exercice 15

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 16

La fonction $f \begin{cases} [1; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-x}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $[1; +\infty[$?

Exercice 17

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^{-x}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

Autres exemples

- Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

  Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} \end{cases}$.

  f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

  $x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ie $\mathrm{e}^{-x^2} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

  De plus $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f est intégrable en $+\infty$.

  D'où f intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

  Pas mal d'exercices utilisent la valeur de cette intégrale donc de fait il faut savoir que cette intégrale se calcule.

  Je ne pense pas qu'un examinateur puisse exiger d'un candidat qu'il connaisse sa valeur.

  On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ou ce qui revient au même $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$(parité)

  Il existe de nombreuses méthodes pour établir ce résultat. On aura sûrement l'occasion d'en voir une cette année.

- Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, soit $f_{\alpha,\beta} \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-x^\beta}\right) \end{cases}$.

  $f_{\alpha,\beta}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

  $f_{\alpha,\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

  $f_{\alpha,\beta}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \iff f_{\alpha,\beta}$ intégrable sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$

  — **Premier cas** $\beta > 0$

  $x^\beta \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\mathrm{e}^{-x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

  Donc $x^\alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-x^\beta}\right) \sim x^\alpha$ et :

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta} \text{ intégrable sur } [1;+\infty[&\iff x \mapsto x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}} \text{ intégrable sur } [1;+\infty[\\ &\iff -\alpha > 1 \\ &\iff \alpha < -1 \end{aligned}$$

  $x^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

  Donc $x^\alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-x^\beta}\right) \sim x^\alpha x^\beta = \dfrac{1}{x^{-(\alpha+\beta)}}$ et :

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta} \text{ intégrable sur }]0;1] &\iff x \mapsto \frac{1}{x^{-(\alpha+\beta)}} \text{ intégrable sur }]0;1] \\ &\iff -(\alpha+\beta) < 1 \\ &\iff \alpha > -1-\beta \end{aligned}$$

  Donc :

$$f_{\alpha,\beta} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \iff -1-\beta < \alpha < -1$$

  — **Deuxième cas** $\beta = 0$

  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f_{\alpha,0}(x) = x^\alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = Kx^\alpha$ avec $K > 0$.

$\displaystyle\int_0^1 |f_{\alpha,0}(x)|\ \mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f_{\alpha,0}(x)|\ \mathrm{d}x$ diverge.
Donc $f_{\alpha,0}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

— **Troisième cas** $\beta < 0$
$x^\beta \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
Donc $x^\alpha\left(1-\mathrm{e}^{-x^\beta}\right) \sim x^\alpha x^\beta = \dfrac{1}{x^{-(\alpha+\beta)}}$ et :

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta} \text{ intégrable sur } [1;+\infty[&\iff x \mapsto \frac{1}{x^{-(\alpha+\beta)}} \text{ intégrable sur } [1;+\infty[\\ &\iff -(\alpha+\beta) > 1 \\ &\iff \alpha < -1-\beta \end{aligned}$$

$x^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ donc $\mathrm{e}^{-x^\beta} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Donc $x^\alpha\left(1-\mathrm{e}^{-x^\beta}\right) \sim x^\alpha$ et :

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta} \text{ intégrable sur }]0;1] &\iff x \mapsto x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}} \text{ intégrable sur }]0;1] \\ &\iff -\alpha < 1 \\ &\iff \alpha > -1 \end{aligned}$$

Donc :

$$f_{\alpha,\beta} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \iff -1 < \alpha < -1-\beta$$

Finalement :

$$f_{\alpha,\beta} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \iff \alpha \text{ est strictement compris entre } -1 \text{ et } -1-\beta$$

(ce qui sous-entend $\beta \neq 0$)

- Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+1/x-1/x^2}}$.

$f\begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^{1+1/x-1/x^2}} \end{cases}$ est continue sur $[1;+\infty[$.
$f(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x^{1/x-1/x^2}} = \dfrac{1}{x}\exp\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x}\right)$
$\dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
$f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.
Donc f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ ie $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)|\ \mathrm{d}x$ diverge.
Mais f est positive donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+1/x-1/x^2}}$ diverge.

7.5 Une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité

Ce paragraphe généralise le paragraphe 1.4. Seul le contenu de 1.4 est explicitement mentionné dans le programme. De fait, la CNS qu'on va établir est d'usage peu fréquent mais elle est indispensable pour établir la stabilité par combinaisons linéaires de l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle fixé.

7.5.1 Cas d'un intervalle ouvert à droite

- **Introduction**
  Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a;+\infty]$.
  Soit $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux *positive*.
  Alors la fonction $\begin{cases} [a;b[\to \mathbb{R}_{(+)} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est croissante.
  En effet si $x_1 \leq x_2$ on a :
  $\displaystyle\int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
  On en déduit que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in[a;b[} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
  De plus :
  $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R} \iff$ la fonction $\begin{cases} [a;b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est majorée
- **CNS de convergence de l'intégrale sur un intervalle ouvert à droite d'une fonction positive**
  Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a;+\infty]$ et $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux *positive*.
  Alors :
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \text{ la fonction } \begin{cases} [a;b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \text{ est majorée}$$
  Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in[a;b[} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
  Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge on a $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x\to b\\x<b}]{} +\infty$
- **CNS d'intégrabilité sur un intervalle ouvert à droite**
  Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a;+\infty]$ et $f : [a;b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  f intégrable sur $[a;b[\iff \exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in [a;b[\ \displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M$
  En effet, l'intégrabilité de f équivaut à la convergence absolue de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou encore à la convergence de $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
  Il n'y a plus qu'à invoquer la CNS du paragraphe précédent.

7.5.2 Cas d'un intervalle ouvert à gauche

- **Introduction**
  Soient $b \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty;b[$ et $f :]a;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux *positive*.
  Alors la fonction $\begin{cases}]a;b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est décroissante.
  En effet si $x_1 \leq x_2$ on a :
  $\displaystyle\int_{x_1}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_2}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et que :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in]a;b]} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R} \iff \text{ la fonction } \begin{cases}]a;b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \quad \text{est majorée}$$

- **CNS de convergence de l'intégrale impropre à gauche d'une fonction positive**
  Soient $b \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty; b[$ et $f :]a;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux *positive*.
  Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \text{ la fonction } \begin{cases}]a;b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \quad \text{est majorée}$$

  Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in]a;b]} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$
  Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge on a $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} +\infty$
- **CNS d'intégrabilité sur un intervalle ouvert à gauche**
  Soient $b \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty; b[$ et $f :]a;b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  f intégrable sur $]a;b] \iff \exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]a;b]$ $\displaystyle\int_x^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M$
  En effet, l'intégrabilité de f équivaut à la convergence absolue de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou encore à la convergence de $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
  Il n'y a plus qu'à invoquer la CNS du paragraphe précédent.

7.6 Remarque

Le programme ne mentionne pas de généralisation de 1.4.3.
Néanmoins, on peut énoncer :
Soit I un intervalle quelconque et $f, g : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux.
On suppose :
$\forall t \in I \ |f(t)| \leq |g(t)|$
On a :
Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I.
et par contrapposition :
Si f n'est pas intégrable sur I alors g n'est pas intégrable sur I.

Ce résultat peut se démontrer en utilisant les CNS précédentes ou en remarquant qu $f = O(g)$ aux extrémités de I.
On peut observer que toute fonction bornée est intégrable sur un intervalle borné car les constantes le sont.

8 Intégration sur un intervalle quelconque et linéarité

8.1 Cas des intégrales convergentes ou divergentes

- Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, $f, g : [a; b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
En d'autres termes $E = \left\{ f : [a; b[\to \mathbb{K} \text{ continues par morceaux telles que } \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \right\}$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a; b[; \mathbb{K})$ donc un $\mathbb{K}$-ev et l'application $\begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est linéaire.
- Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f, g :]a; b] \to \mathbb{K}$ continues par morceaux et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
En d'autres termes $E = \left\{ f :]a; b] \to \mathbb{K} \text{ continues par morceaux telles que } \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \right\}$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(]a; b]; \mathbb{K})$ donc un $\mathbb{K}$-ev et l'application $\begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est linéaire.
- Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, $f, g :]a; b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
En d'autres termes $E = \left\{ f :]a; b[\to \mathbb{K} \text{ continues par morceaux telles que } \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \right\}$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(]a; b[; \mathbb{K})$ donc un $\mathbb{K}$-ev et l'application $\begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est linéaire.

Démonstration

- $$\forall x \in [a;b[\quad \int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x \to b \\ x<b}]{} \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

- $$\forall x \in]a;b] \quad \int_x^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x>a}]{} \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

- Soit $c \in]a;b[$.
  $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent donc $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.On en déduit que
  $\int_a^c (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
  $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent donc $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.On en déduit que
  $\int_c^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
  D'où la convergence de $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$.
  De plus :
  $$\begin{aligned}
  \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^c (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\
  &= \lambda \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t \\
  &= \lambda \left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \right) + \mu \left(\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
  &= \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t
  \end{aligned}$$

Remarque
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f, g : [a;b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux.
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
En effet si elle convergeait, comme on a $g = (f+g) - f$, on aurait $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.
Par contre, si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge on ne peut rien dire de la nature de $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$
On peut faire la même remarque pour les intégrales sur un intervalle ouvert à gauche ou sur un intervalle ouvert.

8.2 Cas des intégrales absolument convergentes et des fonctions intégrables

Soit I un intervalle quelconque.
Une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I est une fonction intégrable sur I.
En d'autres termes, l'ensemble noté $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ ou de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Démonstration

- Si I est un segment, il n'y a rien à prouver.
- Supposons que $I = [a; b[$ est un intervalle ouvert à droite ($a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty]$).
  Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et intégrables sur I.
  Soient λ et $\mu \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in [a; b[\ \displaystyle\int_a^x |\lambda f(t) + \mu g(t)| \, \mathrm{d}t & \leq & \displaystyle\int_a^x (|\lambda| \, |f(t)| + |\mu| \, |g(t)|) \, \mathrm{d}t \\ & \leq & |\lambda| \displaystyle\int_a^x |f(t)| \, \mathrm{d}t + |\mu| \displaystyle\int_a^x |g(t)| \, \mathrm{d}t \\ & \leq & |\lambda| \displaystyle\int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t + |\mu| \displaystyle\int_a^b |g(t)| \, \mathrm{d}t \text{ réel indépendant de } x \end{array}$$

  D'après 7.5.1, $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I.
- Supposons que $I =]a; b]$ est un intervalle ouvert à gauche ($b \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty; b[$).
  Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et intégrables sur I.
  Soient λ et $\mu \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in]a; b] \ \displaystyle\int_x^a |\lambda f(t) + \mu g(t)| \, \mathrm{d}t & \leq & \displaystyle\int_x^a (|\lambda| \, |f(t)| + |\mu| \, |g(t)|) \, \mathrm{d}t \\ & \leq & |\lambda| \displaystyle\int_x^a |f(t)| \, \mathrm{d}t + |\mu| \displaystyle\int_x^a |g(t)| \, \mathrm{d}t \\ & \leq & |\lambda| \displaystyle\int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t + |\mu| \displaystyle\int_a^b |g(t)| \, \mathrm{d}t \text{ réel indépendant de } x \end{array}$$

  D'après 7.5.2, $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I.
- Supposons que $I =]a; b[$ est un intervalle ouvert ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$).
  Soit $c \in]a; b[$.
  f et g sont intégrables sur $]a; b[$ donc sur $]a; c]$ et sur $[c; b[$.
  D'après ce qui précède $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $]a; c]$ et sur $[c; b[$.
  On en déduit que $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $]a; b[$.

8.3 Fonctions intégrables à valeurs complexes, parties réelles et parties imaginaires

Le programme ne mentionne pas le résultat suivant, pourtant bien utile dans le calcul des intégrales faisant intervenir des fonctions trigonométriques.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.
f est intégrable sur $I \iff \Re e\, f$ et $\Im m\, f$ sont intégrables sur I
On a alors : $\displaystyle\int_I f = \int_I \Re e\, f + i \int_I \Im m\, f$
Démonstration

- $\Longrightarrow$
  On a $|\Re e\, f| \leq |f|$ et $|\Im m\, f| \leq |f|$ avec f continue par morceaux et intégrable sur I.
  D'après 7.6, $\Re e\, f$ et $\Im m\, f$ sont intégrables sur I.
- $\Longleftarrow$
  $f = \Re e\, f + i \Im m\, f$ avec $\Re e\, f$ et $\Im m\, f$ intégrables sur I.
  D'après ce qui précède, f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \int_I \Re e\, f + i \int_I \Im m\, f$.

Exemple
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(t)\, \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$.
Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer son intégrale.

$\forall t \in \mathbb{R}_+ \; |f(t)| \leq \mathrm{e}^{-t}$avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{(i-1)t} \end{cases}$.
$\forall t \in \mathbb{R}_+ \; |g(t)| = \mathrm{e}^{-t}$
Donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
$f = \Re e(g)$ donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t &= \Re e\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-1)t}\, \mathrm{d}t\right) = \Re e\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(i-1)t}}{i-1}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \Re e\left(\frac{1}{1-i}\right) = \Re e\left(\frac{1+i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Remarque
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.
$|\overline{f}| = |f|$ donc :
f est intégrable sur $I \Longleftrightarrow \overline{f}$ est intégrable sur I
On a alors : $\displaystyle\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}$

9 Positivité

9.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux positive

Soit I un intervalle quelconque et $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux *positive*.
On suppose f intégrable sur I.
Alors $\displaystyle\int_I f(t)\, \mathrm{d}t \geq 0$.

Remarque
Si on note a la borne inférieure de I et b sa borne supérieure, supposer f intégrable sur I revient, comme pour toute fonction, à supposer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ converge absolument mais aussi dans le cas particulier d'une fonction positive à supposer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

Si on écrit $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ il faut veiller à ce que a soit inférieur à b.

Démonstration

- Le cas des segments a été traité en première année.
- Si $I = [a;b[$ est un intervalle ouvert à droite, on a vu :
  $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in[a;b[} \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$
  Mais d'après le cours de première année :
  $\forall x \in [a;b[\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
  Donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
- Si $I =]a;b]$ est un intervalle ouvert à gauche, on a vu :
  $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in]a;b]} \left(\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)$
  Mais d'après le cours de première année :
  $\forall x \in]a;b]\ \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
  Donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
- Si $I =]a;b[$ est un intervalle ouvert, on prend $c \in]a;b[$.
  D'après ce qui précède, $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
  Donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$

9.2 Caractérisation de la fonction nulle parmi les fonctions continues positives et intégrables

Soit I un intervalle quelconque et $f : I \to \mathbb{R}$ *continue*, *positive* et intégrable sur I.
On a :
$f = 0 \iff \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Démonstration
$f = 0 \Longrightarrow \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 0$: clair.
$f = 0 \Longleftarrow \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
Le cas où I est un segment a été vu en première année.
Si $I = [a;b[$ est un intervalle ouvert à droite, on a vu :
$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in[a;b[} \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$
Ce qui donne ici :
$\forall x \in [a;b[\ 0 \leq \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
Donc :
$\forall x \in [a;b[\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
D'où en dérivant, ce qui est légitime car f est continue :
$\forall x \in [a;b[\ f(x) = 0$

Si $I =]a;b]$ est un intervalle ouvert à gauche, on a vu :
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in]a;b]}\left(\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)$
Ce qui donne ici :
$\forall x \in]a;b]\ 0 \leq \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
Donc :
$\forall x \in]a;b]\ \displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
D'où en dérivant, ce qui est légitime car f est continue :
$\forall x \in]a;b]\ -f(x) = 0$
et f est bien la fonction nulle.

Si $I =]a;b[$ est un intervalle ouvert :
soit $c \in]a;b[$.
$0 \leq \displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \left(\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
Donc : $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ avec f continue positive et : $\forall t \in]a;c]\ f(t) = 0$
$0 \leq \displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0\right) + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
Donc : $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ avec f continue positive et : $\forall t \in [c,b[\ f(t) = 0$
D'où $f = 0$.

Remarque
Soit I un intervalle quelconque et $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, *positive* et intégrable sur I.
On a :
$\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longleftrightarrow f$ est nulle en tout point où elle est continue
Si la fonction f est "presque nulle", sur un segment aussi grand soit-il f ne prend qu'un nombre fini de fois une valeur non nulle, on ne peut donc pas affirmer que f est la fonction nulle.

9.3 Croissance

9.3.1 Cas d'un intervalle ouvert à droite

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a;+\infty]$ et $f, g : [a;b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux.
On suppose :
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
- $\forall t \in [a;b[\ f(t) \leq g(t)$

Alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
De plus si f et g sont continues, il y a égalité si et seulement si $f = g$.

Remarque
On ne suppose pas que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument ie qu'on ne suppose pas f et g intégrables sur $[a;b[$.

Démonstration
D'après le paragraphe sur la linéarité, $\displaystyle\int_a^b (g-f)(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Mais $g-f$ est positive donc elle est intégrable et on peut appliquer ce qui précède.

9.3.2 Cas d'un intervalle ouvert à gauche

Soient $b \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty; b[$ et $f, g :]a; b] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux.
On suppose :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
- $\forall t \in]a; b]\ f(t) \leq g(t)$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
De plus si f et g sont continues, il y a égalité si et seulement si $f = g$.

9.3.3 Cas d'un intervalle ouvert

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f, g :]a; b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux.
On suppose :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
- $\forall t \in]a; b[\ f(t) \leq g(t)$

Alors :
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
De plus si f et g sont continues, il y a égalité si et seulement si $f = g$.

10 Changements de variable

10.1 Ce qu'il faut retenir

Si on se limite à des changements de variable strictement monotones tout se passe bien.
Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\alpha < \beta$ et $\varphi :?\alpha; \beta? \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone.
Soit $f :? \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
$\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent sont égales.
Il convient en pratique d'interpréter correctement ce résultat, par exemple en remplaçant $\varphi(\beta)$ par $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} \varphi(x)$ si il y a lieu.

10.2 Applications aux fonctions intégrables

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a; b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  f est intégrable en $a^+ \iff$ la fonction $x \mapsto f(a+x)$ est intégrable en 0^+.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a; b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  f est intégrable en $b^- \iff$ la fonction $x \mapsto f(b-x)$ est intégrable en 0^+.

Démonstration

-

$$\begin{aligned}
f \text{ intégrable sur }]a;b] &\iff \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t \text{ converge} \\
&\iff \int_0^{b-a} |f(x+a)| \, \mathrm{d}x \text{ converge} \\
& \text{ par le changement de variable } \mathcal{C}^1 \nearrow\nearrow t = x+a \\
&\iff x \mapsto f(a+x) \text{ intégrable sur }]0;b-a]
\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}
f \text{ intégrable sur } [a;b[&\iff \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t \text{ converge} \\
&\iff \int_0^{b-a} |f(b-x)| \, \mathrm{d}x \text{ converge} \\
& \text{ par le changement de variable } \mathcal{C}^1 \searrow\searrow t = b-x \\
&\iff x \mapsto f(b-x) \text{ intégrable sur }]0;b-a]
\end{aligned}$$

10.3 De nouvelles fonctions de référence

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a;+\infty[$.
  La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{|t-a|^\alpha} = \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a;b]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.
- Soit $b \in \mathbb{R}$ et $a \in]-\infty;b[$.
  La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{|t-b|^\alpha} = \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a;b[$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

10.4 Intégrales de Bertrand

Les fonctions qui suivent ne sont pas des fonctions de référence. Leur intégrabilité (ou leur non intégrabilité) doit être justifiée chaque fois qu'on l'utilise.

Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, soit $f_{\alpha,\beta} \begin{cases} [2;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \end{cases}$.

$f_{\alpha,\beta}$ est-elle intégrable sur $[2;+\infty[$?

$f_{\alpha,\beta}$ est continue sur $[2;+\infty[$.

- **Premier cas :** $\alpha > 1$.
  Soit $\gamma \in]1;\alpha[$.
  $t^\gamma \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \dfrac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car $\gamma - \alpha < 0$ ie $f_{\alpha,\beta}(t) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^\gamma}$ intégrable sur $[2;+\infty[$.
  $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2;+\infty[$.
- **Deuxième cas :** $\alpha < 1$.
  $t\dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \dfrac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ car $1-\alpha > 0$.
  $\dfrac{1}{t} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[2;+\infty[$ donc $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas intégrable sur $[2;+\infty[$.

- **Troisième cas :** $\alpha = 1$.
On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x = \ln t$.

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} |f_{\alpha,\beta}(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge} &\iff \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} \text{ converge}\\ &\iff \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\beta} \text{ converge}\\ &\iff \beta > 1\end{aligned}$$

Finalement :

$$f_{\alpha,\beta} \text{ est intégrable sur } [2;+\infty[\iff (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

10.5 Exemples

Exercice 18 *(Mines 2019)*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$: y a-t-il convergence ? Si oui, calculer sa valeur.
2. Mêmes questions pour $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Pour quelles valeurs de α, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?

Exercice 19

La fonction $f\begin{cases}[2;+\infty[\to \mathbb{R}\\ x \mapsto \left(\dfrac{\ln x}{\ln(1+x)}\right)^{\sqrt[3]{x}} - 1\end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 20 *(Centrale 2007, Mines 2018)*

La fonction $f\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^a)}{x^b}\end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 21

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

10.6 Enoncés précis

- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\alpha < \beta$ et $\varphi : [\alpha;\beta[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante.
Soient $a = \varphi(\alpha) \in \mathbb{R}$ et $b = \lim\limits_{\substack{x\to\beta\\ x<\beta}} \varphi(x) \in]a;+\infty]$.
Ces hypothèses reviennent à dire que φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha;\beta[$ sur un intervalle $[a;b[$ de $\mathbb{R}$.
Soit $f : [a;b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$
Et en cas de convergence on a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\alpha < \beta$ et $\varphi : [\alpha;\beta[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante.
  Soient $a = \varphi(\alpha) \in \mathbb{R}$ et $b = \lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} \varphi(x) \in [-\infty; a[$.
  Ces hypothèses reviennent à dire que φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha;\beta[$ sur un intervalle $]b;a]$ de $\mathbb{R}$.
  Soit $f :]b;a] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  On a :
  $$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$
  Et en cas de convergence on a :
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$
- Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $\beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ et $\varphi :]\alpha;\beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante.
  Soient $b = \varphi(\beta) \in \mathbb{R}$ et $a = \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} \varphi(x) \in [-\infty; b[$.
  Ces hypothèses reviennent à dire que φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\alpha;\beta]$ sur un intervalle $]a;b]$ de $\mathbb{R}$.
  Soit $f :]a;b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  On a :
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$
  Et en cas de convergence on a :
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$
- Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $\beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ et $\varphi :]\alpha;\beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante.
  Soient $b = \varphi(\beta) \in \mathbb{R}$ et $a = \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} \varphi(x) \in]b; +\infty]$.
  Ces hypothèses reviennent à dire que φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\alpha;\beta]$ sur un intervalle $[b;a[$ de $\mathbb{R}$.
  Soit $f : [b;a[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  On a :
  $$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$
  Et en cas de convergence on a :
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$
- Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\alpha < \beta$ et $\varphi :]\alpha;\beta[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante.
  Soient $a = \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} \varphi(x) \in [-\infty; +\infty[$ et $b = \lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} \varphi(x) \in]a; +\infty]$.
  φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\alpha;\beta[$ sur $]a;b[$.
  Soit $f :]a;b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  On a :
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

- Soient $\alpha,\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\alpha < \beta$ et $\varphi :]\alpha;\beta[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante.
  Soient $a = \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} \varphi(x) \in]-\infty;+\infty]$ et $b = \lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} \varphi(x) \in [-\infty;a[$.
  φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\alpha;\beta[$ sur $]b;a[$.
  Soit $f :]b;a[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
  On a :
  $$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$
  Et en cas de convergence on a :
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

10.7 Démonstrations

- Soient $F \begin{cases} [a;b[\to \mathbb{K} \\ T \mapsto \displaystyle\int_a^T f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ et $G \begin{cases} [\alpha;\beta[\to \mathbb{K} \\ X \mapsto \displaystyle\int_\alpha^X f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$.
  D'après les propriétés de l'intégrale sur un segment, on a :
  $\forall X \in [\alpha;\beta[\displaystyle\int_\alpha^X f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\varphi(X)} f(t)\,\mathrm{d}t$
  ie $G = F \circ \varphi \iff F = G \circ \varphi^{-1}$.
  Les résultats sur les limites des fonctions composées donnent alors :
  $\lim\limits_{\substack{T\to b \\ T<b}} (F(T) = G(\varphi^{-1}(T)))$ existe dans $\mathbb{K} \iff \lim\limits_{\substack{X\to\beta \\ X<\beta}} (G(X) = F(\varphi(X)))$ existe dans $\mathbb{K}$
  Et dans ce cas ces limites sont égales.
  C'est le résultat voulu.
- Soient $F \begin{cases}]b;a] \to \mathbb{K} \\ T \mapsto \displaystyle\int_T^a f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ et $G \begin{cases} [\alpha;\beta[\to \mathbb{K} \\ X \mapsto \displaystyle\int_\alpha^X f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$.
  D'après les propriétés de l'intégrale sur un segment, on a :
  $\forall X \in [\alpha;\beta[\displaystyle\int_\alpha^X f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\varphi(X)} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\varphi(X)}^a f(t)\,\mathrm{d}t$
  ie $G = -F \circ \varphi \iff F = -G \circ \varphi^{-1}$.
  Les résultats sur les limites des fonctions composées donnent alors :
  $\lim\limits_{\substack{T\to b \\ T>b}} (F(T) = -G(\varphi^{-1}(T)))$ existe dans $\mathbb{K} \iff \lim\limits_{\substack{X\to\beta \\ X<\beta}} (G(X) = -F(\varphi(X)))$ existe dans $\mathbb{K}$
  Et dans ce cas ces limites sont opposées.
  C'est le résultat voulu.
- Soient $F \begin{cases}]a;b] \to \mathbb{K} \\ T \mapsto \displaystyle\int_T^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ et $G \begin{cases}]\alpha;\beta] \to \mathbb{K} \\ X \mapsto \displaystyle\int_X^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$.
  D'après les propriétés de l'intégrale sur un segment, on a :
  $\forall X \in]\alpha;\beta] \displaystyle\int_X^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(X)}^b f(t)\,\mathrm{d}t$

ie $G = F \circ \varphi \Longleftrightarrow F = G \circ \varphi^{-1}$.
Les résultats sur les limites des fonctions composées donnent alors :
$\lim\limits_{\substack{T \to a \\ T > a}} (F(T) = G(\varphi^{-1}(T)))$ existe dans $\mathbb{K} \Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{X \to \alpha \\ X > \alpha}} (G(X) = F(\varphi(X)))$ existe dans $\mathbb{K}$
Et dans ce cas ces limites sont égales.
C'est le résultat voulu.

- Soient $F \begin{cases} [b; a[\to \mathbb{K} \\ T \mapsto \displaystyle\int_b^T f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ et $G \begin{cases}]\alpha; \beta] \to \mathbb{K} \\ X \mapsto \displaystyle\int_X^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$.
D'après les propriétés de l'intégrale sur un segment, on a :
$\forall X \in]\alpha; \beta] \ \displaystyle\int_X^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(X)}^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^{\varphi(X)} f(t)\,\mathrm{d}t$
ie $G = -F \circ \varphi \Longleftrightarrow F = -G \circ \varphi^{-1}$.
Les résultats sur les limites des fonctions composées donnent alors :
$\lim\limits_{\substack{T \to a \\ T < a}} (F(T) = -G(\varphi^{-1}(T)))$ existe dans $\mathbb{K} \Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{X \to \alpha \\ X > \alpha}} (G(X) = -F(\varphi(X)))$ existe dans $\mathbb{K}$
Et dans ce cas ces limites sont opposées.
C'est le résultat voulu.
- Soient $\gamma \in]\alpha; \beta[$ et $c = \varphi(\gamma) \in]a; b[$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} &\Longleftrightarrow \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ convergent} \\
&\Longleftrightarrow \int_\alpha^\gamma f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_\gamma^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ convergent} \\
&\Longleftrightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}
\end{aligned}$$

En cas de convergence on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\gamma f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

- Soient $\gamma \in]\alpha; \beta[$ et $c = \varphi(\gamma) \in]b; a[$.

$$\begin{aligned}
\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} &\Longleftrightarrow \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t \text{ convergent} \\
&\Longleftrightarrow \int_\gamma^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_\alpha^\gamma f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ convergent} \\
&\Longleftrightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}
\end{aligned}$$

En cas de convergence on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\gamma f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

11 Intégrations par parties

11.1 CCP 99

Convergence et valeur de : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$

Soit $f \begin{cases} [0;\pi/2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \ln(\cos x) \end{cases}$.

f est continue sur $[0;\pi/2[$ et $f(x) \xrightarrow[x<\pi/2]{x\to\pi/2} 0$ donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ converge.

On fait une IPP "naturelle" :
$u(x) = \ln(\cos x) \quad u'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$
$v'(x) = \cos x \quad v(x) = \sin x$
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = [\sin x \ln(\cos x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
$[\sin x \ln(\cos x)]_0^{\pi/2}$ "=" $-\infty$ **il y a un problème**
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ diverge :
La fonction $h : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
$\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} \sim \dfrac{1}{x-\pi/2}$ donc la fonction h n'est pas intégrable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ie $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |h(x)|\,\mathrm{d}x$ diverge.
Mais h est positive donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

On revient à une IPP sur un segment, situation vue en première année.
$\forall X \in]0;\pi/2[\displaystyle\int_0^X \cos x \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = \sin X \ln(\cos X) + \int_0^X \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
On fait le changement de variable $t = \sin x$.
$\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \dfrac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\forall X \in]0;\pi/2[\int_0^X \cos x \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x &= \sin X \ln(\cos X) + \int_0^{\sin X} \frac{t^2}{1-t^2}dt \\
&= \sin X \ln(\cos X) + \int_0^{\sin X} \frac{t^2-1+1}{1-t^2}dt \\
&= \sin X \ln(\cos X) - \sin X + \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\right]_0^{\sin X} \\
&= \sin X \ln(\cos X) - \sin X + \frac{1}{2}\ln(1+\sin X) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin X)
\end{aligned}$$

$\sin X \ln(\cos X) \xrightarrow[X\to\pi/2]{} -\infty$
$\sin X \xrightarrow[X\to\pi/2]{} 1$
$\dfrac{1}{2}\ln(1+\sin X) \xrightarrow[X\to\pi/2]{} \dfrac{\ln 2}{2}$
$\dfrac{1}{2}\ln(1-\sin X) \xrightarrow[X\to\pi/2]{} -\infty$

On pose $h = \dfrac{\pi}{2} - X$, $X = \dfrac{\pi}{2} - h$

$$\begin{aligned}
\sin X \ln(\cos X) &= \cos h \ln(\sin h) = \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \ln\left(h\left(1 - \frac{h^2}{6} + o(h^2)\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)\left(\ln h + \ln\left(1 - \frac{h^2}{6} + o(h^2)\right)\right) \\
&= \ln h + o(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(1 - \sin X) &= \frac{1}{2}\ln(1 - \cos h) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{h^2}{2}(1 + o(1))\right) \\
&= \frac{1}{2}(2\ln h - \ln 2 + o(1)) \\
&= \ln h - \frac{\ln 2}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = -1 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{2}$ et finalement :

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 1$$

11.2 Théorème

Soient a et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$.
Soit f et g :?$a; b$? $\to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que le produit fg a une limite finie en a et en b[2].
Alors :

- $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
- Si elles convergent toutes deux, on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration
On traite uniquement le cas d'une intégrale impropre à droite.

$$\forall x \in [a; b[\ \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

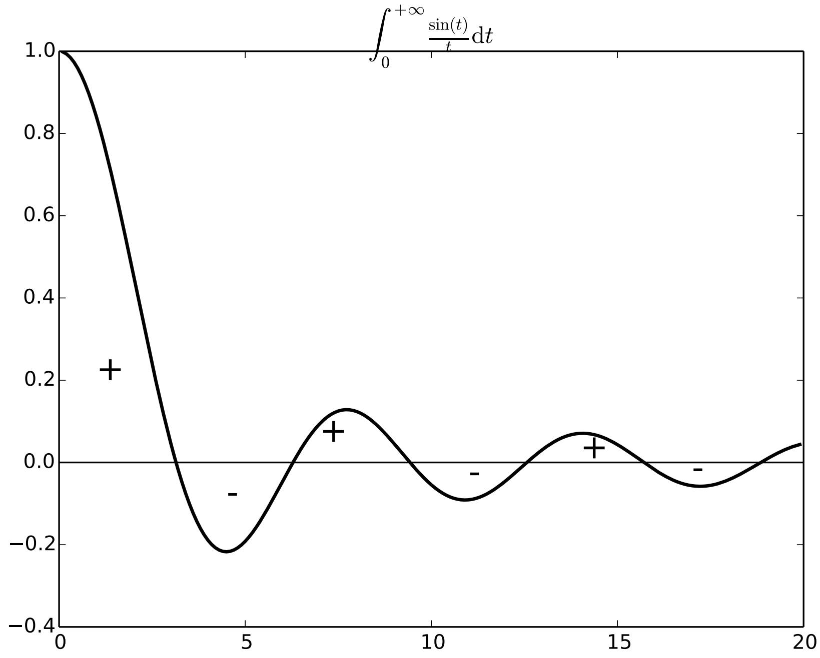
$f(x)g(x) - f(a)g(a) \xrightarrow[x \to b]{} l \in \mathbb{R}$ donc :
$\displaystyle\int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie $\iff \displaystyle\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie
C'est le premier point.
On a le second point en passant à la limite.
Quand on écrit $[f(t)g(t)]_0^{+\infty}$ il faut comprendre $f(+\infty)g(+\infty)$ comme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)g(t)$.

2. c'est trivial en une extrémité de l'intervalle d'intégration qui lui appartient

11.3 Exemple fondamental : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} \end{cases}$.

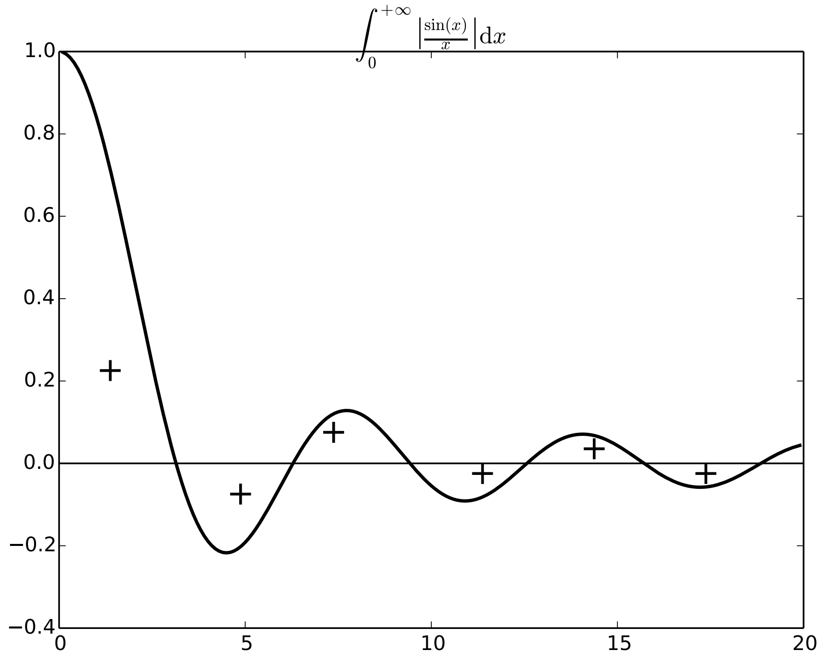
f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 1$.
Il s'agit donc en fait d'une intégrale sur un intervalle ouvert à droite.



Il se produit un phénomène de compensation et la somme des aires algébriques des arches est finie.
On pourrait montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge en utilisant cette idée mais cela utilise un théorème sur les séries qui sera vu dans le prochain chapitre.
Néanmoins c'est un peu long et la méthode usuelle consiste à utiliser le théorème d'intégration par parties :
Soit $f \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ et $g \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\cos x \end{cases}$.
f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.
$f(x)g(x) = -\dfrac{\cos x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (et il n'y a pas de problème en 1).
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.
$\dfrac{\cos x}{x^2} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$.
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge absolument.
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

Culture générale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$



Le phénomène de compensation ne se produit plus et la somme des aires des arches est infinie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$.

On fait le changement de variable $x = t + n\pi$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ u_n &= \int_0^{\pi} \frac{|(-1)^n \sin t|}{t+n\pi}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi}\,\mathrm{d}t \\ &\geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)\pi}\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq \dfrac{2}{(n+1)\pi} \geq 0$

et $\sum \dfrac{2}{(n+1)\pi}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge.

$u_n \geq 0$ donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ (n\in\mathbb{N})}]{} +\infty$.

Cela suffit pour affirmer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$ diverge.

$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \geq 0$ donc $\displaystyle\int_0^{X} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \xrightarrow[\substack{X\to+\infty \\ (X\in\mathbb{R})}]{} +\infty$.

Planche 1 *(Centrale 2021)*

$g(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{x} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}(x-\pi)$

$F(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$
Trouver un équivalent de F en $+\infty$ à l'aide de g.

11.4 Exemple : calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$: $t^2 f_n(t) = t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f est intégrable en $+\infty$.
On note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
$u(t) = t^n \quad u'(t) = nt^{n-1}$
$v'(t) = \mathrm{e}^{-t} \quad v(t) = -\,\mathrm{e}^{-t}$
$u(t)v(t)$ vaut 0 en $t = 0$ et $\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$: l'intégration par parties est justifiée.
$\forall n \geq 1\ I_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = nI_{n-1}$
$\forall n \in \mathbb{N}\ I_n = n!I_0 = n!$
(le calcul de I_0 est classique et a été fait plus haut)

11.5 Exemple : nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

On note $f_\alpha \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha} \end{cases}$ et $g_\alpha \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^\alpha} \end{cases}$.
f_α et g_α sont continues sur $[1;+\infty[$.

- **Premier cas :** $\alpha > 1$
  $\forall t \in [1;+\infty[\ |f_\alpha(t)|$ et $|g_\alpha(t)| \leq \dfrac{1}{t^\alpha} = \left|\dfrac{1}{t^\alpha}\right|$
  avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ intégrable sur $[1;+\infty[$.
  f_α et g_α sont donc intégrables sur $[1;+\infty[$.
  $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent absolument.
- **Deuxième cas :** $\alpha \in]0;1]$
  $u(t) = \dfrac{1}{t^\alpha} \quad u'(t) = \dfrac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}$
  $v'(t) = \sin t \quad v(t) = -\cos t$
  $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et il n'y a pas de problème en 1 donc l'intégration par parties est justifiée.
  $\displaystyle\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\alpha\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
  Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.
  De même, pour $\alpha \in]0;1]$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.
  Par contre $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

En effet : $\dfrac{\cos t}{t} \sim_0 \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 donc $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ n'est pas intégrable en 0.
Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente ie $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$ diverge.
Mais :
$\forall t \in]0;1]\ \dfrac{\cos t}{t} \geq 0$
Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{t}$ diverge.

- **Troisième cas : $\alpha \leq 0$**
  Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{(x+n\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}x$: changement de variable $t = x + n\pi$
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |u_n| \geq \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{(n\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}x = 2\frac{1}{(n\pi)^\alpha}$
  Donc la série de terme général u_n diverge grossièrement.
  Donc la suite $\left(\displaystyle\int_1^{n\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right)$ diverge.
  Donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ n'a pas de limite finie en $+\infty$.
  Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge.

11.6 D'autres exemples

- Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\,\mathrm{d}t$

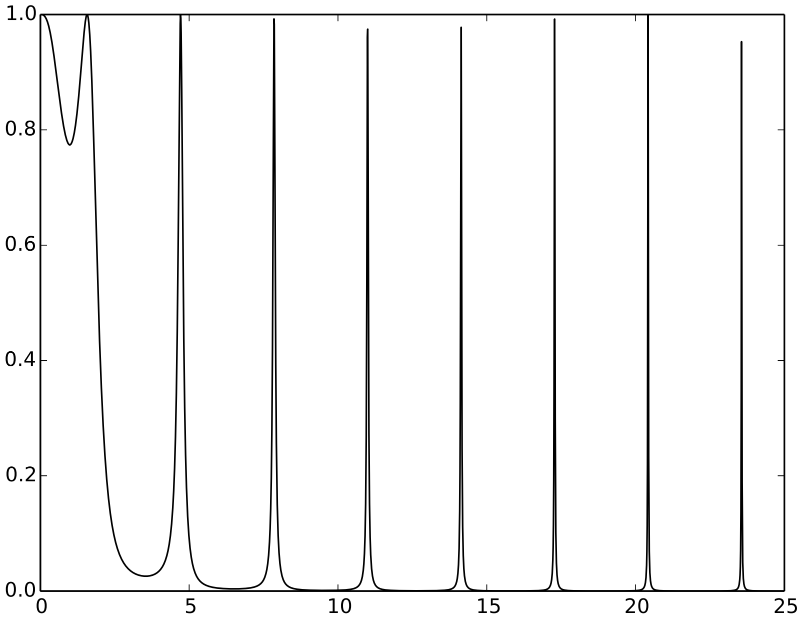
  $\forall t > 1\ \sqrt{t}+\sin t > 1 + \sin t \geq 0$
  $\sqrt{1}+\sin 1 = 1+\sin 1 \neq 0$
  $f \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t} \end{cases}$ est continue sur $[1;+\infty[$.
  $f(t) \sim_{+\infty} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$: que peut-on en faire ?
  $|f(t)| \sim \left|\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\right|$ et $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ donc f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ ie $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas absolument. Cela ne l'empêche pas de converger car f n'est pas de signe constant.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t} &= \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{1+\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}} \\
&= \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\
&= \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{t} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{t} + g(t)
\end{aligned}$$

g est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
$\forall t \geq 1\ \dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{2t} - \dfrac{\cos 2t}{2t}$
Le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $t = \dfrac{u}{2}$ transforme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t}\,\mathrm{d}t$ en $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos u}{2u}\,\mathrm{d}u$ qui converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge et finalement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

- **Centrale 2011**
  Soit $\lambda > 0$.
  Calculer $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\lambda^2\cos^2 x}$.
  En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3\cos^2 x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.



Remarque
On observera que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3\cos^2 x}$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

$I(\lambda)$ ne pose aucun problème de définition.

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= 2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\lambda^2\cos^2 x} \quad (f(\pi-x)=f(x)) \\
&= 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\lambda^2\dfrac{1}{1+t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \text{ changement de variable } \mathcal{C}^1 \nearrow\nearrow\ t=\tan x \\
&= 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+\lambda^2} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\lambda^2}^2+t^2} \\
&= 2\left[\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{1+\lambda^2}}
\end{aligned}$$

On pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3\cos^2 x}$.

$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n+1)^3\pi^2\cos^2 x} \le u_n \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^3\pi^3\cos^2 x}$

$\displaystyle\frac{\pi}{\sqrt{1+(n+1)^3\pi^3}} \le u_n \le \frac{\pi}{\sqrt{1+n^3\pi^3}}$

$u_n \sim \dfrac{K}{n^{3/2}}$ avec $K>0$ donc la série de terme général u_n converge et :

$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

Si on note $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3\cos^2 t}$ alors :

$F(n\pi) = S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

Mais :

$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \dfrac{1}{1+t^3\cos^2 t} \ge 0$

donc F est croissante et $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

En particulier : $F(n\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$.

Par unicité de la limite, $\lambda = l \in \mathbb{R}$.

Donc $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3\cos^2 x}$ converge.

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3\cos^2 x}$ est positive, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- **Remarque**

  Les examinateurs des épreuves orales demandent souvent si une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ tend vers 0 en $+\infty$. C'est faux comme le montre l'exemple précédent mais ce n'est pas le genre d'exemple qu'on peut citer le jour de l'oral.

  On a vu plus haut (paragraphe 2) un exemple plus facile à retenir.

- **Exercice 22**

  Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^7\cos\left(x^{10}\right)\mathrm{d}x$?

- **Exercice 23**

  Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$?

- **Exercice 24**

  Quelle est la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}}\mathrm{d}x$?

12 QCM

- **Question 1**
La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 2 - \sqrt{x^2+4x+1} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?
— **Réponse 1 :** Oui
— **Réponse 2 :** Non
- **Question 2**
La fonction $f \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $[1;+\infty[$?
— **Réponse 1 :** Oui
— **Réponse 2 :** Non
- **Question 3**
La fonction $f \begin{cases} [2;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $[2;+\infty[$?
— **Réponse 1 :** Oui
— **Réponse 2 :** Non
- **Question 4**
La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $]0;+\infty[$?
— **Réponse 1 :** Oui
— **Réponse 2 :** Non
- **Question 5**
La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $]0;+\infty[$?
— **Réponse 1 :** Oui
— **Réponse 2 :** Non
- **Question 6**
Soit la fonction définie par :
$$f(x) = \int_{1/x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$$
Le domaine de définition de f est :
— $\mathbb{R}^*$
— $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$
— $]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$
— $]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$
— $]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$