ANALYSE 1
2024-2025
Correction
Correction des exercices du premier chapitre du cours

941

Exercice 1

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et donner sa valeur.

Correction
On revient à la définition.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$ converge et donner sa valeur.

Correction
On revient à la définition.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ 0 \leq \dfrac{1}{1+t+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$
D'après l'exercice précédent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge.
On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$ converge.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^x
\end{aligned}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}$$

Exercice 3

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\cosh x} \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; 0 \leq f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \leq \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 2\,\mathrm{e}^{-x}$

On n'a pas encore vu la linéarité de l'intégration mais elle est claire.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

$$\begin{aligned}
\forall X \in \mathbb{R}_+ \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} &= \int_0^X \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^X \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^X} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ changement de variable } t = \mathrm{e}^x \\
&= 2\left(\arctan\left(\mathrm{e}^X\right) - \arctan 1\right) = 2\left(\arctan\left(\mathrm{e}^X\right) - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}} = \mathrm{e}^{-x/2}$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Pour le calcul, on fait le changement de variable $t = \sqrt{\mathrm{e}^x+1}$.

$\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} = \dfrac{t^2-1}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$

$$\begin{aligned}
\forall X \in \mathbb{R}_+ \int_0^X \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\mathrm{e}^X+1}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\mathrm{e}^X+1}} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}^X+1}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^X+1}+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)
\end{aligned}$$

En $+\infty$, $\sqrt{\mathrm{e}^X+1}-1 \sim \mathrm{e}^{X/2}$ et $\sqrt{\mathrm{e}^X+1}+1 \sim \mathrm{e}^{X/2}$ donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} &= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\right)\\ &= 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\end{aligned}$$

Exercice 5

Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Correction

On revient à la définition.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur $[2;+\infty[$.

$\forall X \in [2;+\infty[\ \displaystyle\int_2^X \frac{1}{x\ln(x)} = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$

Exercice 6

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$$

Correction

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \exp\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} = \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{4x}+\frac{11}{96x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x} = \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{6x}+\frac{11}{216x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+\frac{1}{x}-\frac{11}{24x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{11}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right) = \frac{11\,\mathrm{e}}{72}}$$

Exercice 7

$f(x) = \dfrac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x\left(\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{1-x}\right)}$.
Limite l de f en 0 ? équivalent de $f(x) - l$?

Correction
On commence par chercher un équivalent du numérateur :
$e^x - 1 = x + \ldots$
$\ln(1+x) = x + \ldots$
et on s'arrête lorsqu'on a deux termes différents :
$e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
Donc $e^x - 1 - \ln(1+x) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$
Compte tenu du x en facteur au dénominateur, on peut dans un premier temps se contenter d'un développement limité à l'ordre 1 de $\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{1-x}$.
$\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{1-x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - (1+x) + o(x) = -\dfrac{x}{2} + o(x) \sim -\dfrac{x}{2}$
La limite cherchée est donc -2.
Passons à l'équivalent de $f(x) - l$.

$$\begin{aligned} f(x) - l &= f(x) + 2 \\ &= \frac{1}{x\left(\sqrt{1+x} - \frac{1}{1-x}\right)}\left(e^x - 1 - \ln(1+x) + 2x\left(\sqrt{1+x} - \frac{1}{1-x}\right)\right) \end{aligned}$$

Le dénominateur est équivalent à $-\dfrac{x^2}{2}$.
On fait un développement limité à l'ordre 3 du numérateur en espérant que le coefficient de x^3 ne sera pas nul, auquel cas il faudrait recommencer.
$e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
$2x\sqrt{1+x} = 2x + x^2 - \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)$
$\dfrac{2x}{1-x} = 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$
Donc le numérateur est équivalent à : $-\dfrac{29}{12}x^3$.
Finalement : $f(x) - l \sim \dfrac{29}{6}x$.

Exercice 8 *(Mines 2005)*

On définit sur $]0, +\infty[$ f par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$$

Peut on prolonger f en 0 ? Tangente en zéro ? Position de la courbe par rapport à celle-ci ?

Correction

$f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)}$

Le numérateur est équivalent à $-\dfrac{1}{2}x^2$, le dénominateur à $\dfrac{1}{2}$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\dfrac{1}{2}$.

En posant $f(0) = -\dfrac{1}{2}$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour avoir la tangente en 0, il faut faire un développement limité de f à l'ordre 1. Pour avoir la position par rapport à la tangente, il faut faire un développement limité à l'ordre 2 voire au delà.

On factorise x^2 au numérateur et au dénominateur (qui sont des infiniment petits d'ordre 2) :

$f(x) = \dfrac{\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}$

Au dénominateur, un développement limité d'ordre 3 de $\ln(1+x)$ suffit mais au numérateur il faut un développement limité d'ordre 4.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} \\
&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2\right) + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2\right)^2 + o(x^2)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

La tangente en 0 est donc la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12}x$.

La courbe est située sous sa tangente.

Exercice 9

Développement asymptotique en $\pm\infty$ de $f(x) = x\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

(On donnera trois termes)

Correction

En $\pm\infty$, $\dfrac{x}{x-1} \to 1$ donc $\dfrac{x}{x-1} > 0$ et :

$f(x) = x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\right)$

D'après le formule de Taylor-Young :

$\arctan(1+h) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}h - \dfrac{1}{4}h^2 + o(h^2)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 10

Développement limité à l'ordre 2 en 1 de $f : x \mapsto \dfrac{2x\ln x}{x-1}$.

Correction
On pose $x = 1+h$ avec h qui tend vers 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2(1+h)\ln(1+h)}{h} = 2(1+h)\left(1-\frac{1}{2}h+\frac{h^2}{3}+o(h^2)\right) \\ &= 2\left(1+h-\frac{1}{2}h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)\right) \\ &= 2+h-\frac{h^2}{3}+o(h^2) \\ &= 2+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{3}+o\left((x-1)^2\right) \end{aligned}$$

Exercice 11

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\arctan(2\sin x)-\frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$.

Correction
On pose $x = \dfrac{\pi}{6}+h$ avec h qui tend vers 0.
$\cos(3x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+3h\right) = -\sin(3h) \sim -3h$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(h)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(h) \\ &= \frac{1}{2}\cos(h)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(h) \\ 2\sin(x) &= 1+\sqrt{3}h+o(h) \end{aligned}$$

Par Taylor-Young :
$\arctan(2\sin(x)) = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}h+o(h)$.
La réponse est donc $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Exercice 12

Développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de $\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$.

Correction
Par Taylor-Young :

$\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(x^{n+1}\right)$ donc :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) &= \ln\left(\mathrm{e}^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(x^{n+1}\right)\right) \\
&= x + \ln\left(1 - \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!} + o\left(x^{n+1}\right)\right) \\
&= x + \ln\left(1 - \frac{x^{n+1}(1+o(1))}{(n+1)!} + o\left(x^{n+1}\right)\right) \\
&= x + \ln\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(x^{n+1}\right)\right) \\
&= x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(x^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 13

Développement limité à l'ordre 9 en 0 de la fonction $x \mapsto [\ln(\cos(x))]^3$.

Correction

$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \sim -\dfrac{x^2}{2}$

On écrit $[\ln(\cos(x))]^3 = \left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^3 \left[\dfrac{\ln(\cos(x))}{-\dfrac{x^2}{2}}\right]^3 = -\dfrac{x^6}{8}\left[-2\dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}\right]^3$

Il suffit d'utiliser un développement limité à l'ordre 3 de $\dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$ donc un développement limité à l'ordre 5 de $\ln(\cos(x))$

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \\
\ln(\cos(x)) &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right)^2 + o(x^5) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5) \\
-2\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} &= 1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3) \\
\left[-2\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}\right]^3 &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

La réponse est $-\dfrac{x^6}{8} - \dfrac{x^8}{16} + o(x^9)$.

Exercice 14 *(X 2021)*

1. Montrer que pour $x > 0$ assez petit, l'équation $-x^7 + x^2 y = y^5$ a deux solutions dans $\mathbb{R}_+$.
2. Equivalent de ces deux solutions lorsque x tend vers 0^+.
3. Donner les deux termes suivants du développement asymptotique.

Correction

1. Soit $x > 0$.
   Soit $f_x \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ y \mapsto y^5 - x^2 y + x^7 \end{cases}$.
   f_x est $\mathcal{C}^\infty$ et :
   $\forall y \in \mathbb{R}_+ \; f_x'(y) = 5y^4 - x^2$
   On pose $a_x = \dfrac{\sqrt{x}}{5^{1/4}}$.
   f_x est donc strictement décroissante sur $[0; a_x]$ et strictement croissante sur $[a_x; +\infty[$.

$$\begin{aligned} f_x(a_x) &= a_x(a_x^4 - x^2) + x^7 = a_x \frac{-4x^2}{5} + x^7 = x^7 - \frac{4x^{5/2}}{5^{5/4}} \\ &\sim_{x\to 0} -\frac{4x^{5/2}}{5^{5/4}} < 0 \end{aligned}$$

   Donc pour $x > 0$ assez petit, $f_x(a_x) < 0$.
   De plus $f_x(0) = x^7 > 0$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} f_x(y) = +\infty$.
   D'après le théorème de la bijection, appliqué sur $[0; a_x]$ et sur $[a_x; +\infty[$, f_x a deux zéros dans $\mathbb{R}_+$.
2. On note b_x la plus petite des deux racines et c_x l'autre.
   Pour déterminer l'équivalent on écrit $y^5 = x^2 y - x^7$ et on néglige un des termes :
   $y^5 = x^2 y$ donne $y = \sqrt{x}$
   $y^5 = -x^7$ ne donne rien pour des raisons de signe.
   $x^2 y = x^7$ donne $y = x^5$
   On intuite donc $b_x \sim_{x\to 0} x^5$ et $c_x \sim_{x\to 0} x^{1/2}$
   Il faut maintenant le justifier.
   On suppose $\epsilon(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$.

$$\begin{aligned} f_x(x^5(1+\epsilon(x))) &= x^{25}(1+\epsilon(x))^5 - x^7(1+\epsilon(x)) + x^7 = x^{25}(1+\epsilon(x))^5 - x^7\epsilon(x) \\ &= x^7\left(x^{18}(1+\epsilon(x))^5 - \epsilon(x)\right) \end{aligned}$$

   Avec $\epsilon(x) = 0$, on a $f_x(x^5) = x^{25} > 0$ donc $b_x > x^5$
   Avec $\epsilon(x) = x$, on a $f_x(x^5+x^6) = x^7\left(x^{18}(1+x)^5 - x\right) \sim_{x\to 0} -x^8 < 0$ donc $f_x(x^5+x^6) < 0$ pour x assez petit et alors $x^5 + x^6 > b_x$.
   On a donc pour x assez petit : $x^5 < b_x < x^5 + x^6$.
   On a bien prouvé $b_x \sim_{x\to 0} x^5$.

   On suppose $\epsilon(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$.

$$\begin{aligned} f_x(x^{1/2}(1+\epsilon(x))) &= x^{5/2}(1+\epsilon(x))^5 - x^{5/2}(1+\epsilon(x)) + x^7 \\ &= x^{5/2}(1+5\epsilon(x)+o(\epsilon(x))) - x^{5/2}(1+\epsilon(x)) + x^7 \\ &= 4\epsilon(x)x^{5/2} + x^7 + o\left(\epsilon(x)x^{5/2}\right) \end{aligned}$$

   Avec $\epsilon(x) = x$, on a $f(x^{1/2} + x^{3/2}) \sim_{x\to 0} 4x^{7/2} > 0$
   et avec $\epsilon(x) = -x$, on a $f(x^{1/2} - x^{3/2}) \sim_{x\to 0} -4x^{7/2} < 0$
   Donc pour x assez petit, $x^{1/2} - x^{3/2} < c_x < x^{1/2} + x^{3/2}$ (étant entendu qu'on est bien à

droite de a_x) et on a bien prouvé $c_x \sim_{x\to 0} x^{1/2}$.
Remarque
$c_x^5 = x^2 c_x - x^7 < x^2 c_x$ donc $c_x^4 < x^2$ et $c_x < \sqrt{x}$.
On peut aussi, en amont du DL calculer :
$f_x(x^{1/2}) = -x^{7/2} < 0$
ce qui justifie $c_x < x^{1/2}$.

3. $b_x = x^5(1+\epsilon(x))$ avec $\epsilon(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= b_x^5 - x^2 b_x + x^7 = x^{25}(1+\epsilon(x))^5 - x^7(1+\epsilon(x)) + x^7 \\ &= x^{25}(1+\epsilon(x))^5 - x^7\epsilon(x) \end{aligned}$$

Donc $\epsilon(x) = x^{18}(1+\epsilon(x))^5 \sim_{x\to 0} x^{18}$.
Donc $\epsilon(x) = x^{18} + o(x^{18})$ et on reporte :

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= x^{18}(1+\epsilon(x))^5 = x^{18}\left(1 + x^{18} + o\left(x^{18}\right)\right)^5 \\ &= x^{18}\left(1 + 5x^{18} + o\left(x^{18}\right)\right) \\ &= x^{18} + 5x^{36} + o\left(x^{36}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{b(x) = x^5 + x^{23} + 5x^{41} + o\left(x^{41}\right)}$$

$c(x) = x^{1/2}(1+\epsilon(x))$ avec $\epsilon(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= x^{5/2}(1+\epsilon(x))^5 - x^{5/2}(1+\epsilon(x)) + x^7 \\ &= x^{5/2}\left((1+\epsilon(x))^5 - (1+\epsilon(x)) + x^{9/2}\right) \end{aligned}$$

Donc :
$4\epsilon(x) + o(\epsilon(x)) = -x^{9/2}$
On en déduit $\epsilon(x) \sim_{x\to 0} -\dfrac{x^{9/2}}{4}$ ou encore $\epsilon(x) = -\dfrac{x^{9/2}}{4} + o\left(x^{9/4}\right)$
On reprend :
$(1+\epsilon(x))^5 - (1+\epsilon(x)) + x^{9/2} = 0$
et on développe avec un terme de plus :
$4\epsilon(x) + 10\epsilon(x)^2 + o(\epsilon(x)^2) + x^{9/2} = 0$
Donc :
$\epsilon(x) = -\dfrac{x^{9/2}}{4} - \dfrac{10}{4}\left(\dfrac{x^9}{16} + o(x^9)\right) = -\dfrac{x^{9/2}}{4} - \dfrac{5}{32}x^9 + o(x^9)$

$$\boxed{c(x) = x^{1/2} - \frac{1}{4}x^5 - \frac{5}{32}x^{19/2} + o\left(x^{19/2}\right)}$$

Exercice 15

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Correction
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- En $+\infty$, $\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \sim \dfrac{1}{x^2}$ et $\ln(1+\sqrt{x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
  Donc $f(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
  La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f est intégrable en $+\infty$.
- En 0, $\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = O(1)$ et $\ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$.
  Donc $f(x) = O_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
  La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable en 0 donc f est intégrable en 0.

Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16

La fonction $f \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-x}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $[1;+\infty[$?

Correction
f est continue sur $[1;+\infty[$.
$x^2 f(x) = \exp\left(2\ln x - \sqrt{x^2-x}\right)$
$\sqrt{x^2-x} \sim x$ et $\ln x = o(x)$ (en $+\infty$).
Donc $2\ln x - \sqrt{x^2-x} \sim -x$ et $2\ln x - \sqrt{x^2-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.
Donc $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $f(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f est intégrable en $+\infty$.

Exercice 17

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^{-x}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Correction
f est continue sur $\mathbb{R}$.

- En $+\infty$, $f(x) \sim \mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- En $-\infty$, $f(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
  Par parité, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $-\infty$ donc f est intégrable en $-\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 *(Mines 2019)*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$: y a-t-il convergence ? Si oui, calculer sa valeur.
2. Mêmes questions pour $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Pour quelles valeurs de α, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?

Correction

1. L'intégrale diverge :
   La fonction $\begin{cases}]0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x} \end{cases}$ est continue mais :
   $\forall X \in]0;1[\int_X^1 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_X^1 = -\frac{(\ln(X))^2}{2} \xrightarrow[X\to 0^+]{} -\infty$
2. L'intégrale converge :
   La fonction $\begin{cases}]0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln(x) \end{cases}$ est continue sur $]0;1]$, prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$.
   Pour le calcul de l'intégrale on fait une IPP :
   $$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x \quad v(x) = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$
   L'intégration par parties est justifiée :
   u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$ et $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$
   De plus $u(1)v(1) = 0$ donc :
   $\int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$
3. La réponse est $\alpha < 1$.
   Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha \begin{cases}]0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} \end{cases}$ est continue.
   On suppose d'abord $\alpha < 1$.
   $x^{(1+\alpha)/2}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = x^{(1-\alpha)/2}\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ car $\frac{1-\alpha}{2} > 0$.
   Donc $\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = o_0\left(\frac{1}{x^{(1+\alpha)/2}}\right)$ avec $\frac{1+\alpha}{2} < 1$
   Donc f_α est intégrable sur $]0;1]$ et $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.
   Supposons ensuite $\alpha \geq 1$.
   $\forall x \in]0;1]\ \frac{1}{x^\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha\ln(x)} \geq \mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$ car $-\ln(x) \geq 0$
   On en déduit :
   $\forall x \in]0;1]\ \frac{-\ln(x)}{x^\alpha} \geq \frac{-\ln(x)}{x} \geq 0$
   D'après la première question $\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverge et $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverge.
   Remarque
   On peut aussi utiliser :
   $\forall x \in]0;\, \mathrm{e}^{-1}]\ \frac{-\ln(x)}{x^\alpha} \geq \frac{1}{x^\alpha} \geq 0$

Exercice 19

La fonction $f \begin{cases} [2;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\dfrac{\ln x}{\ln(1+x)}\right)^{\sqrt[3]{x}} - 1 \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Correction
f est continue sur $[2;+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\sqrt[3]{x}\ln\left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\right)\right)-1=\exp\left(\sqrt[3]{x}\ln\left(\frac{\ln x}{\ln x+\ln(1+1/x)}\right)\right)-1\\
&= \exp\left(-\sqrt[3]{x}\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right)\right)-1\\
&= \exp\left(-\sqrt[3]{x}\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+O\left(\frac{1}{x^2\ln x}\right)\right)\right)-1\\
&= \exp\left(-\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{x\ln x}+O\left(\frac{1}{x^2\ln x}\right)\right)\right)-1\\
&= \exp\left(-\frac{1}{x^{2/3}\ln x}+o\left(\frac{1}{x^{2/3}\ln x}\right)\right)-1\\
&\sim -\frac{1}{x^{2/3}\ln x}
\end{aligned}$$

On en déduit $x\,|f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Classiquement, on en déduit que f n'est pas intégrable sur $[2;+\infty[$.
En effet, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{x}=o(f(x))$. Si f était intégrable sur $[2;+\infty[$, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ le serait aussi ce qui est absurde.
Remarque :
Las calculs sont plus rapides en écrivant $f(x)=\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{-x^{1/3}}-1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)}\right)^{\sqrt[3]{x}}-1=\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{-\sqrt[3]{x}}-1\\
&= \exp\left(-x^{1/3}\ln\left(\frac{\ln(x)+\ln(1+1/x)}{\ln(x)}\right)\right)-1\\
&= \exp\left(-x^{1/3}\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+O\left(\frac{1}{x^2\ln x}\right)\right)\right)-1\\
&= \exp\left(-\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{x\ln x}+O\left(\frac{1}{x^2\ln x}\right)\right)\right)-1\\
&= \exp\left(-\frac{1}{x^{2/3}\ln x}+o\left(\frac{1}{x^{2/3}\ln x}\right)\right)-1\\
&\sim -\frac{1}{x^{2/3}\ln x}
\end{aligned}$$

Exercice 20 *(Centrale 2007, Mines 2018)*

La fonction $f\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{\ln(1+x^a)}{x^b}\end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Correction
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Cas** $a=0$
  $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ f(x)=\dfrac{\ln 2}{x^b}$.
  f n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Cas** $a > 0$
  - **En** 0

    $x^a \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x>0}]{} 0$ donc $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{b-a}}$.

    f est intégrable sur $]0;1] \iff b - a < 1$
  - **En** $+\infty$

    $x^a \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc $1 + x^a \sim x^a$.

    Comme ce sont des infiniment grands, $\ln(1+x^a) \sim \ln(x^a) = a \ln x$

    Donc $f(x) \sim a\dfrac{\ln x}{x^b}$.

    Si $b > 1$ alors f est intégrable sur $[1;+\infty[$:

    $x^{(1+b)/2} f(x) \sim \dfrac{a \ln(x)}{x^{(b-1)/2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ car $\dfrac{b-1}{2} > 0$

    Donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{(b+1)/2}}\right)$.

    $\dfrac{b+1}{2} > 1$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{(b+1)/2}}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

    Donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$.

    Par contre si $b \leq 1$, $xf(x) \sim ax^{1-b}\ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ car $1 - b \geq 0$.

    Donc, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{x} = o(f(x))$. Si f était intégrable sur $[1;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ le serait aussi ce qui est absurde.

    On a donc prouvé :

    f est intégrable sur $[1;+\infty[\iff b > 1$

  Donc :

  f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \iff 1 < b < 1 + a$
- **Cas** $a < 0$
  - **En** 0

    $f(x) \sim a\dfrac{\ln x}{x^b}$
  - **En** $+\infty$

    $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{b-a}}$

  Donc [1] :

  f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \iff 1 + a < b < 1$

Finalement :

$$f \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \iff b \text{ est strictement compris entre } 1 \text{ et } 1 + a$$

Exercice 21

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^2} \end{cases}$.

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. En toute rigueur, il faudrait détailler l'étude en 0 sur le modèle de ce qui a été fait au voisinage de $+\infty$ dans le cas précédent.

$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{0}{(1+0^2)^2} = 0$
Donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
L'intégrale n'est qu'impropre qu'à droite.
$f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{x^3 \ln x}{x^8} = \dfrac{\ln x}{x^5}$
Donc $x^2 f(x) \sim \dfrac{\ln x}{x^3} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$
Classiquement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln t}{t^3\left(1+\dfrac{1}{t^4}\right)^2}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) \quad x = \frac{1}{t}\ \mathcal{C}^1 \text{ strictement décroissant} \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Planche 1 *(Centrale 2021)*

$g(x) = \displaystyle\int_\pi^x |\sin(t)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}(x-\pi)$
$F(x) = \displaystyle\int_\pi^x \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$
Trouver un équivalent de F en $+\infty$ à l'aide de g.
Correction

$$\begin{aligned}
\forall x > \pi\ F(x) &= \int_\pi^x \frac{1}{t}\left(|\sin(t)| - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\pi^x \frac{1}{t} g'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_\pi^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \left[\frac{g(t)}{t}\right]_\pi^x + \int_\pi^x \frac{g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}(\ln(x) - \ln(\pi)) \\
&= \frac{g(x)}{x} + \int_\pi^x \frac{g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}(\ln(x) - \ln(\pi))
\end{aligned}$$

Soit $x > \pi$.
Soit $n = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$.
$n \leq \dfrac{x}{\pi} < n+1$ donc $n\pi \leq x < (n+1)\pi$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_\pi^{n\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{n\pi}^x |\sin(t)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}(x-\pi) \\
&= (n-1)\int_0^\pi |\sin(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{n\pi}^x |\sin(t)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}((n-1)\pi + x - n\pi) \\
&= 2(n-1) + \int_{n\pi}^x |\sin(t)|\,\mathrm{d}t - 2(n-1) - \frac{2}{\pi}(x - n\pi)
\end{aligned}$$

$|g(x)| \leq \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}((n+1)\pi - n\pi) = 4$
g est donc bornée sur $[\pi; +\infty[$.

On en déduit que $\dfrac{g(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[\pi;+\infty[$.
On en déduit que $F(x) \sim_{x\to\infty} \dfrac{2}{\pi}\ln(x)$

Exercice 22

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^7\cos\left(x^{10}\right)\mathrm{d}x$?

Correction
Soit $f\begin{cases}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^7\cos\left(x^{10}\right)\end{cases}$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^7\cos\left(x^{10}\right)\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^7\cos\left(x^{10}\right)\mathrm{d}x$.
On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $x = t^{1/10}$.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} x^7\cos\left(x^{10}\right)\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{7/10}\cos t\frac{1}{10}t^{-9/10}\,\mathrm{d}t$ ou encore $\displaystyle\frac{1}{10}\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{1/5}}\,\mathrm{d}t$.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{1/5}}\,\mathrm{d}t$ converge :
on procède à une IPP :
$u(t) = \dfrac{1}{t^{1/5}} = t^{-1/5}$, $u'(t) = -\dfrac{1}{5}t^{-6/5} = \dfrac{-1}{5t^{6/5}}$
$v'(t) = \cos t$, $v(t) = \sin t$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ et $u(t)v(t) = \dfrac{\sin t}{t^{1/5}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$
L'IPP est donc justifiée et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{1/5}}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{6/5}}\,\mathrm{d}t$
Mais :
$\forall t \geq 1\ \left|\dfrac{\sin t}{t^{6/5}}\right| \leq \dfrac{1}{t^{6/5}}$
$\dfrac{6}{5} > 1$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{6/5}}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{6/5}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
Finalement :
$$\int_0^{+\infty} x^7\cos\left(x^{10}\right)\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Remarque :
Soit $F\begin{cases}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^7\cos\left(t^{10}\right)\mathrm{d}t\end{cases}$.
F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) et $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.
Pourtant F' n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 23

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$?
Correction
Soit $f\begin{cases}[1;+\infty[\to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{x\sin x}{x^2+x+1}\end{cases}$.

f est continue sur $[1;+\infty[$.
En $+\infty$, $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x^2}\dfrac{1}{1+1/x+1/x^2} = \dfrac{\sin x}{x}\left(1+O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{\sin x}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
On a vu cours que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.C'est un résultat classique mais qu'il faut redémontrer.
on procède à une IPP :
$u(x) = \dfrac{1}{x} =$, $u'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$
$v'(x) = \sin x$, $v(x) = -\cos x$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ et $u(x)v(x) = \dfrac{-\cos x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
L'IPP est donc justifiée et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
Mais :
$\forall x \geq 1$ $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$
$2 > 1$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.
Par ailleurs, si $g(x) = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de ∞ alors g est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge et finalement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Exercice 24

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}}\,\mathrm{d}x$?
Correction
Soit $f \begin{cases} [2;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}} \end{cases}$.
f est continue sur $[2;+\infty[$.
$xf(x) = \exp\left(\ln x - (\ln(\ln x))^2\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
$\exists x_0 \in [2;+\infty[$ tq $\forall x \geq x_0$ $f(x) \geq \dfrac{1}{x} \geq 0$.
$\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}}\,\mathrm{d}x$ diverge.