ANALYSE 1

TD

2024-2025

Chapitre 1

941

1 Intégrales sur un segment

Exercice 1 *(CCP 2023)*

Trouver une primitive de la fonction $f \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2} \ln\left(1-x^2\right) \end{cases}$

Exercice 2 *(CCP 2022)*

$A_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(nt)}{1+nt}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier l'existence de A_n.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

Exercice 3 *(Centrale 2022)*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{n+k}\right)$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant une hypothèse de monotonie dont le candidat ne se souvient pas.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$.
   Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 4 *(Mines 2023)*

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(nx)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5 *(Mines 2022)*

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t = 1 + x$

2 Fonctions intégrables et intégrales impropres

2.1 Etudes d'intégrabilité

2.2 Détermination de la nature d'intégrales

Exercice 6

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) \mathrm{d}x$?

Exercice 7

Soit $\alpha > 0$.
Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + x^{-\alpha}\right) \mathrm{d}t$?

Exercice 8

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$?

Exercice 9

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} \mathrm{d}x$?

Exercice 10

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} \mathrm{d}x$?

Exercice 11 *(Centrale 2016)*

Soient a et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et α-périodique.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} \mathrm{d}t$.
On veut déterminer λ tel que $I(\lambda)$ converge.

1. Montrer qu'il existe au plus une valeur de λ tel que $I(\lambda)$ converge.
2. $G_\lambda : x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que si G_λ est bornée alors $I(\lambda)$ converge.
   Conclure.

2.3 Calculs d'intégrales

Exercice 12

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Exercice 13

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x)\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Exercice 14

Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Exercice 15 *(Centrale 2018)*

1. Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. A l'aide de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de I.

Exercice 16 *(Centrale 2005)*

1. Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ dont la valeur sera notée I.
2. Calcul de I avec Maple[1].
   Maple donne $I = \frac{3}{4}\ln 3$
3. $J(\epsilon) = \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
   Trouver a et b tels que $J(\epsilon) = a\int_\epsilon^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t + b\int_\epsilon^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   Montrer que $J(\epsilon) = \frac{3}{4}\int_\epsilon^{3\epsilon} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   En déduire I.

Exercice 17 *(Mines 2018)*

1. Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$?
2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 18 *(X 2016)*

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, telle que $f(x) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $a > 0$.
Prouver que $g : x \mapsto f\left(\sqrt{4a + x^2}\right)$ et $h : x \mapsto f\left(x + \frac{a}{x}\right)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} h$.

1. Maple est le logiciel de calcul symbolique en vigueur dans les classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs avant l'introduction de Python

2.4 Comportement asymptotique des fonctions intégrables

Exercice 19 *(X 2005, 2007)*

Une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ tend-elle vers zéro à l'infini ?
Montrer que si f est $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée bornée, alors f tend vers zéro.

Exercice 20 *(Mines 2022)*

Soit $f : [0;1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$ converge et $\lim_{1^-} f = 0$.
Montrer que $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x}} \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} 0$.

2.5 Propriétés des fonctions intégrables

Exercice 21 *(Mines 2016)*

Soit $f :]0;1[\to \mathbb{R}$ continue, intégrable et monotone sur $]0;1[$.
Montrer :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.6 Deux exercices plus difficiles

Exercice 22 *(X 2020)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique ($T > 0$).
Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$.
On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$.

1. Convergence de I.
2. Calcul de I.

Exercice 23 *(Centrale 2019)*

Soit F définie sur $]0;1]$ par :
$\forall x \in]0;1]\ F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$
Soit f définie sur $[0;1]$ par :
$\forall x \in]0;1]\ f(x) = x(x+1) + F(x)$
et
$f(0) = 0$

1. Définition et dérivabilité de f.
2. Déterminer $f'([0;1])$.