ANALYSE 1
TD
2024-2025
Chapitre 1
Correction

941

1 Intégrale sur un segment

Exercice 1 *(CCP 2023)*

Trouver une primitive de la fonction $f\begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\ln(1-x^2) \end{cases}$

Correction
$\forall x \in]0;1[\ 1-x^2>0$
Donc la fonction f est bien définie et elle est continue sur $]0;1[$.
Elle possède bien des primitives.

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{x}\ln(1-x^2) - \int \frac{-1}{x}\frac{-2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$
On multiplie par $1-x$ et on évalue en 1 : $a = \dfrac{1}{2}$
On multiplie par $1+x$ et on évalue en -1 : $b = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{x}\ln(1-x^2) - \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right) \\ &= \frac{-1}{x}\ln(1-x^2) - (-\ln(1-x) + \ln(1+x)) \\ &= \frac{-1}{x}\ln(1-x^2) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \end{aligned}$$

Remarque
Soit $F : x \mapsto \dfrac{-1}{x}\ln(1-x^2) + \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

En restant au plus proche de la définition :

$$\begin{aligned}
F(1-h) &= \frac{-1}{1-h}\ln\left(1-(1-2h+h^2)\right)+\ln\left(\frac{h}{2-h}\right)\\
&= -(1+h+o(h))\ln\left(2h-h^2\right)+\ln(h)-\ln(2-h)\\
&= -(1+h+o(h))\left(\ln(h)+\ln(2-h)\right)+\ln(h)-\ln(2)+o(1)\\
&= -(1+h+o(h))\left(\ln(h)+\ln(2)+o(1)\right)+\ln(h)-\ln(2)+o(1)\\
&= -\ln(h)-\ln(2)+o(1)+\ln(h)-\ln(2)+o(1)\\
&= -2\ln(2)+o(1)
\end{aligned}$$

Donc $F(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} -2\ln(2)$.

Donc $\displaystyle\int_{1/2}^{x}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = F(x)-F\left(\frac{1}{2}\right) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} -2\ln(2)-F\left(\frac{1}{2}\right)$.

En d'autres termes, $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln(2)-F\left(\frac{1}{2}\right)$

En 0 : $\displaystyle\frac{-\ln(1-x^2)}{x}\sim\frac{x^2}{x}=x$ donc $F(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\displaystyle\int_{x}^{1/2}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = F\left(\frac{1}{2}\right)-F(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} F\left(\frac{1}{2}\right)$.

En d'autres termes, $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = F\left(\frac{1}{2}\right)$

Finalement, $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln(2)-F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln(2)$

Exercice 2 *(CCP 2022)*

$\displaystyle A_n=\int_0^1\frac{\sin(nt)}{1+nt}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier l'existence de A_n.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

Correction

1. A_n est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.
2. On peut utiliser le théorème de convergence dominée ou :

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*\ |A_n| &\leq \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+nt}=\left[\frac{1}{n}\ln(1+nt)\right]_0^1\\
&\leq \frac{\ln(1+n)}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0
\end{aligned}$$

Exercice 3 *(Centrale 2022)*

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{n+k}\right)$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant une hypothèse de monotonie dont le candidat ne se souvient pas.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$.
   Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Correction

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$
2. La fonction arctan est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \arctan''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

   $\forall x \in \mathbb{R}\ 1 + x^2 - 2|x| = (1-|x|)^2 \geq 0$
   Donc :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ 2|x| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$
   On en déduit :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |\arctan''(x)| \leq 1$
   et par l'inégalité de Taylor-Lagrange :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |\arctan(x) - x| \leq \dfrac{x^2}{2} \leq x^2$
   Donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall k \in [\![0;n]\!]\ \left|\arctan\left(\dfrac{1}{n+k}\right) - \dfrac{1}{n+k}\right| \leq \dfrac{1}{(n+k)^2}$
   On en déduit avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*\ \ |v_n - u_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\arctan\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\left|\arctan\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k}\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+k)^2} \leq (n+1)\times\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

   Donc $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   On en déduit $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$
3. Il faut ajouter l'hypothèse $f(0) = 0$ sinon (W_n) diverge vers l'infini avec le signe de $f(0)$.
   La monotonie de f ne suffit pas :
   Si on prend $f(t) = \sqrt{t}$ alors :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

Exercice 4 *(Mines 2023)*

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique.
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(nx)\,\mathrm{d}x$.

Correction

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(nx)\,\mathrm{d}x &= \int_{na}^{nb} f(t)\frac{\mathrm{d}t}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(\int_{na}^{na+kT} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{na+kT}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ avec } k = \left\lfloor \frac{nb-na}{T} \right\rfloor \\
&= \frac{1}{n}\left(k\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{na+kT}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{k}{n}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int_{na+kT}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\lfloor x \rfloor \sim_{x\to+\infty} x$.
On en déduit $\displaystyle\frac{k}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b-a}{T}$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\int_{na+kT}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \frac{1}{n}\int_{na+kT}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{n}\int_{na+kT}^{na+kT+T} |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ car } |f| \geq 0 \text{ et } b \leq a + kT + T \\
&\leq \frac{1}{n}\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$

L'examinateur a demandé de prouver : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathbb{R}\ \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(x+T)\,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{changement de variable } t = a + x \\
&= \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Exercice 5 *(Mines 2022)*

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que :
$\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) + \int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t = 1 + x$

Correction

Soit f une fonction solution.
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 1 + x - x\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$
Sous cette forme, f est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut dériver.
On a donc $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) + xf(x) = 1 - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
Sous cette forme, f' est de classe $\mathcal{C}^1$ ie f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on peut dériver.
$f'(0) = 1$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = -f(x)$
f est solution de $y'' + y = 0$ donc :
$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$
$f(0) = 1$ donne $A = 1$.
$f'(0) = 1$ donne $B = 1$.
Donc :
$\forall x \in [0; 1]\ f(x) = \cos(x) + \sin(x)$

Réciproquement :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}\ \cos(x) + \sin(x) + \int_0^x (x-t)(\cos(t) + \sin(t))\,\mathrm{d}t \\
= \ & \cos(x) + \sin(x) + [(x-t)(\sin(t) - \cos(t))]_0^x + \int_0^x (\sin(t) - \cos(t))\,\mathrm{d}t \\
= \ & \cos(x) + \sin(x) + x + [-\cos(t) - \sin(t)]_0^x \\
= \ & \cos(x) + \sin(x) + x - \cos(x) - \sin(x) + 1 \\
= \ & x + 1
\end{aligned}$$

2 Fonctions intégrables et intégrales impropres

2.1 Etudes d'intégrabilité

2.2 Détermination de la nature d'intégrales

Exercice 6

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) \mathrm{d}x$?

Correction
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x} \ln\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
En 0, $\arctan(x) \sim x$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = \ln(2)$.
En $+\infty$, $\arctan(x) \to \dfrac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{\arctan(x)}{2x} \sim \dfrac{\pi}{x}$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) &= \ln\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Donc en ∞, $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2x^2}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\pi}{2x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f l'est aussi.
On en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) \mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

Exercice 7

Soit $\alpha > 0$.
Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+x^{-\alpha}\right) \mathrm{d}t$?

Correction
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\alpha > 0$ donc $x^{-\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $f(x) \sim_{+\infty} x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$
On en déduit :
f intégrable en $+\infty \iff \alpha > 1$
$\alpha > 0$ donc $x^{-\alpha} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ et $f(x) \sim_0 \ln\left(x^{-\alpha}\right) = -\alpha \ln(x)$.
La fonction ln étant intégrable en 0, f est intégrable en 0 (quelque soit α).
Finalement :
f intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \iff \alpha > 1$
ie :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+x^{-\alpha}\right)$ converge absolument $\iff \alpha > 1$
Ce qui n'est pas ce qui est demandé : on veut savoir si l'intégrale converge ou diverge pas si elle converge absolument ou pas.
Néanmoins, on remarque que la fonction f est positive donc la convergence et la convergence absolue se confondent si bien que :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+x^{-\alpha}\right)$ converge $\iff \alpha > 1$

Exercice 8

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} (\ln x)^2 \mathrm{d}x$?
Correction
Soit $f \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\cos x}{x} (\ln x)^2 \end{cases}$.
f est continue sur $[1;+\infty[$.
On procède à une intégration par parties.
$u(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x} \quad u'(x) = \dfrac{\ln x \, (2 - \ln x)}{x^2}$
$v'(x) = \cos x \quad v(x) = \sin x$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$.
$u(x)v(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
L'intégration par parties est justifiée.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} (\ln x)^2 \mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x \, (2 - \ln x) \, \sin x}{x^2} \mathrm{d}x$
Mais $x^{3/2} \dfrac{\ln x \, (2 - \ln x) \, \sin x}{x^2} \sim \dfrac{-\sin x (\ln x)^2}{x^{1/2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc
$\dfrac{\ln x \, (2 - \ln x) \, \sin x}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{\ln x \, (2 - \ln x) \, \sin x}{x^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x\,(2-\ln x)\,\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge et finalement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,(\ln x)^2\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Exercice 9

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b}\,\mathrm{d}x$?

Correction

Soit $f\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(x+1)^a - x^a}{x^b}\end{cases}$.

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Cas** $a = 0$

  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x) = 0$

  $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

- **Cas** $a > 0$

  — $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b}\,\mathrm{d}x$

  $f(x) \sim \dfrac{1}{x^b}$

  f étant positive sur $]0;1]$ (car $a > 0$), on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b}\,\mathrm{d}x \text{ converge} &\iff f \text{ est intégrable sur }]0;1] \\ &\iff x \mapsto \frac{1}{x^b} \text{ est intégrable sur }]0;1] \\ &\iff b < 1\end{aligned}$$

  — $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b}\,\mathrm{d}x$

  $f(x) \sim \dfrac{a}{x^{b-a+1}}$

  f étant positive sur $[1;+\infty[$ (car $a > 0$), on a :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b}\,\mathrm{d}x \text{ converge} &\iff f \text{ est intégrable sur } [1;+\infty[\\ &\iff x \mapsto \frac{a}{x^{b-a+1}} \text{ est intégrable sur } [1;+\infty[\\ &\iff b-a+1 > 1 \\ &\iff b > a\end{aligned}$$

  Lorsque $a > 0$, on a donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b}\,\mathrm{d}x \text{ converge } \iff a < b < 1$$

- **Cas** $a < 0$

  $f(x) \sim_0 -\dfrac{1}{x^{b-a}}$ et $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{a}{x^{b-a+1}}$

  En raisonnant comme dans le cas précédent, lorsque $a < 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b}\,\mathrm{d}x \text{ converge } \iff a < b < 1+a$$

Finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ 0 < a < b < 1 \\ \text{ou} \\ a < b < 1 + a \text{ et } a < 0 \end{cases}$$

Exercice 10

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$?

Correction

Soit $f \begin{cases}]0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} \end{cases}$.

f est continue sur $]0;1]$.

On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant $x = \dfrac{1}{y}$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(y + \frac{1}{y}\right)}{y}\,\mathrm{d}y$

$\dfrac{\sin\left(y + \frac{1}{y}\right)}{y} = \dfrac{\sin y}{y}\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{\cos y}{y}\sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$

En $+\infty$: $\dfrac{\cos y}{y}\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) = O\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$ donc $y \mapsto \dfrac{\cos y}{y}\sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{y}\sin\left(\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$ converge absolument donc converge.

$\dfrac{\sin y}{y}\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{\sin y}{y}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{y^2}\right)\right) = \dfrac{\sin y}{y} + O\left(\dfrac{1}{y^3}\right)$.

On a vu en cours mais il faut savoir le redémontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ converge.

Par ailleurs si $g(y) = O\left(\dfrac{1}{y^3}\right)$ au voisinage de $+\infty$ alors g est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$ converge.

Finalement :

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Exercice 11 *(Centrale 2016)*

Soient a et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et α-périodique.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

On veut déterminer λ tel que $I(\lambda)$ converge.

1. Montrer qu'il existe au plus une valeur de λ tel que $I(\lambda)$ converge.

2. $G_\lambda : x \mapsto \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que si G_λ est bornée alors $I(\lambda)$ converge.
   Conclure.

Correction
Remarquons qu'on introduit $a > 0$ pour que l'intégrale soit uniquement impropre à droite.

1. Si $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ convergent alors en faisant la différence $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda-\mu}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Cela entraîne $\lambda = \mu$.
2. On procède à une intégration par parties :
   $u(t) = \dfrac{1}{t}$, $u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$
   $v'(t) = \lambda - f(t)$, $v = G_\lambda$
   u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (en utilisant G_λ bornée).
   Toujours avec G_λ bornée, $u'v$ est intégrable sur $[a; +\infty[$.
   En effet $u'(t)v(t) = -\dfrac{G(t)}{t^2} = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$.
   On en déduit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
   D'après le cours sur les intégrations par parties, $I(\lambda)$ converge.

   On prend $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ la valeur moyenne de f sur une période.
   Soit $x > a$.
   Soit n la partie entière de $\dfrac{x-a}{\alpha}$ de sorte que $x = a + n\alpha + y$ avec $0 \leq y < \alpha$.

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_a^x \lambda\,\mathrm{d}t - \int_a^{a+n\alpha+y} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda(x-a) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+k\alpha}^{a+(k+1)\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{a+n\alpha}^{a+n\alpha+y} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda(x-a) - n\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{a+n\alpha}^{a+n\alpha+y} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda(x-a-n\alpha) - \int_{a+n\alpha}^{a+n\alpha+y} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}
|G(x)| &\leq |\lambda|\,(x-a-n\alpha) + \int_{a+n\alpha}^{a+n\alpha+y} |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq |\lambda|\,\alpha + \int_{a+n\alpha}^{a+(n+1)\alpha} |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq |\lambda|\,\alpha + \int_0^\alpha |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ par périodicité}
\end{aligned}$$

   G est bornée sur $[a; +\infty[$.

2.3 Calculs d'intégrales

Exercice 12

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1-x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x\mapsto 1-x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)\end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

En $+\infty$: $f(x)=1-x\left(\dfrac{1}{x}+O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

On réalise une intégration par parties :

$u(x)=1-x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)\quad u'x)=-\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{x}{1+x^2}$

$v'(x)=1\quad v(x)=x$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$u(x)v(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $u(x)v(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc l'intégration par parties est justifiée.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(1-x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\left(x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\left(x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^{+\infty}\left(1-x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 13

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer..

Correction

Soit $f\begin{cases}]0;\pi/2[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\cos x\ln(\tan x)\end{cases}$

f est continue sur $]0;\pi/2[$.

$f(x)=\cos x\ln(\sin x)-\cos x\ln(\cos x)\xrightarrow[x\to\pi/2]{} 0$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $]0;\pi/2]$.

En 0 : $\tan x\sim x$ et ce sont des infiniment petits donc $f(x)\sim\ln x$. Comme ln est intégrable sur $]0;\pi/2]$, on en déduit que f est intégrable sur $]0;\pi/2]$ ou $]0;\pi/2[$.

On réalise une intégration par parties :

$u(x)=\ln(\tan x)\quad u'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x\tan x}=\dfrac{1}{\cos x\sin x}$

$v'(x)=\cos x\quad v(x)=\sin x$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;\pi/2[$.

$u(x)v(x)\sim_0 x\ln x$ donc $u(x)v(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ mais en $\pi/2$ il y a un problème.

On peut néanmoins légitimement écrire, pour $X \in]0;\pi/2[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^X \cos x \ln(\tan x)\,\mathrm{d}x &= \sin X \ln(\tan X) - \int_0^X \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sin X \ln(\tan X) - \int_0^X \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sin X \ln(\tan X) - \int_0^X \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sin X \ln(\tan X) - \int_0^{\sin X} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \\
&= \sin X \ln(\tan X) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin X}{1-\sin X}\right) \\
&= \sin X \ln(\sin X) - \sin X \ln(\cos X) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin X) + \frac{1}{2}\ln(1-\sin X)
\end{aligned}$$

$\sin X \ln(\sin X) \xrightarrow[X\to\pi/2]{} 0$

$-\frac{1}{2}\ln(1+\sin X) \xrightarrow[X\to\pi/2]{} -\frac{\ln 2}{2}$

On pose $h = \frac{\pi}{2} - X$, $X = \frac{\pi}{2} - h$

$$\begin{aligned}
\sin X \ln(\cos X) &= \cos h \ln(\sin h) = \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)\ln\left(h\left(1-\frac{h^2}{6}+o(h^2)\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)\left(\ln h + \ln\left(1-\frac{h^2}{6}+o(h^2)\right)\right) \\
&= \ln h + o(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(1-\sin X) &= \frac{1}{2}\ln(1-\cos h) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{h^2}{2}(1+o(1))\right) \\
&= \frac{1}{2}(2\ln h - \ln 2 + o(1)) \\
&= \ln h - \frac{\ln 2}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

On déduit : $\int_0^X \cos x \ln(\tan x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to\pi/2]{} -\ln 2$ et finalement :

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x)\,\mathrm{d}x = -\ln 2$$

Exercice 14

Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x = y^2$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$
On réalise une intégration par parties :
$u(y) = y \quad u'(y) = 1$
$v'(y) = \mathrm{e}^{-y} \quad v(y) = -\mathrm{e}^{-y}$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
$u(y)v(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ et il n'y a pas de problème en 0 donc l'intégration par parties est justifiée.

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad = \quad 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 2$$

Exercice 15 *(Centrale 2018)*

1. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. A l'aide de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de I.

Correction

1. L'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ a été justifiée en cours.
2. On justifie rapidement l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$:
   la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est clairement continue sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et elle est prolongeable par continuité en 0 car : $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \sim_0 \dfrac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(t)\cos((2n+2)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+2)t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2n+2}\right]_0^{\pi/2} = 0\end{aligned}$$

   On en déduit :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ I_n = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$
3. $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
   On fait le changement de variable $t = (2n+1)x$:
   $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Mais :
   $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)\mathrm{d}x$

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$.
f est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
En 0 : $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \sim \dfrac{-x^3/6}{x^2} = -\dfrac{x}{6}$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. On note toujours f ce prolongement et on a donc $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{1}{\sin^2(x)}\left(\cos(x) - \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

On fait un DL du numérateur en 0 :

$$\begin{aligned}
\cos(x) - \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\
&= -\frac{x^2}{6} + o(x^2)
\end{aligned}$$

On en déduit facilement que $f'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\dfrac{1}{6}$.
D'après le théorème de la dérivée f est $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
On peut alors faire une IPP :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} f(x)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)x) f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)x) f'(x)\,\mathrm{d}x \\
\left|\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right| &\leq \frac{1}{2n+1}\left(|f(0)| + \int_0^{\pi/2} |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On conclut facilement : $I = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 16 *(Centrale 2005)*

1. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ dont la valeur sera notée I.

2. Calcul de I avec Maple [1].
   Maple donne $I = \dfrac{3}{4}\ln 3$
3. $J(\epsilon) = \displaystyle\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
   Trouver a et b tels que $J(\epsilon) = a\displaystyle\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t + b\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   Montrer que $J(\epsilon) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_{\epsilon}^{3\epsilon} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   En déduire I.

Correction

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^3 t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En 0 : $f(t) \sim \dfrac{t^3}{t^2} = t$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus en $+\infty$, $f(t) = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
2.
3. Il s'agit de linéariser $\sin^3 t$.

$$\begin{aligned}
\sin^3(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(\mathrm{e}^{3ix} - 3\,\mathrm{e}^{ix} + 3\,\mathrm{e}^{-ix} - \mathrm{e}^{-3ix}\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin(3x) - 6i\sin(x)\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}$$

$a = \dfrac{3}{4}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$ conviennent.
On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x = 3t$ dans $\displaystyle\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $J(\epsilon) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_{\epsilon}^{3\epsilon} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
Pour la conclusion, il y a plusieurs justifications possibles.
On peut, par exemple, utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour prouver :
$\forall t \in \mathbb{R}\ \ |\sin t - t| \leq \dfrac{t^2}{2} \leq t^2$

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}\ \sin(t) &= t + \int_0^t (t-x)\sin^{(2)}(x)\,\mathrm{d}x = t - \int_0^t (t-x)\sin(t)\,\mathrm{d}x \\
\forall t \in \mathbb{R}_+\ |\sin(t) - t| &= \left|\int_0^t (t-x)\sin(t)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_0^t (t-x)\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}x \text{ car les bornes sont dans le bon sens et } t - x \geq 0 \\
&\leq \int_0^t (t-x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(t-x)^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

1. Maple est le logiciel de calcul symbolique en vigueur dans les classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs avant l'introduction de Python

Comme la fonction sin est impaire, on en déduit :
$\forall t \in \mathbb{R}\ |\sin t - t| \leq \dfrac{t^2}{2} \leq t^2$
On a alors :

$$\begin{aligned} |J(\epsilon) - \ln 3| &= \left|\frac{3}{4}\int_\epsilon^{3\epsilon} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{4}\int_\epsilon^{3\epsilon} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{3}{4}\left|\int_\epsilon^{3\epsilon} \frac{\sin(t) - t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{3}{4}\int_\epsilon^{3\epsilon} \frac{|\sin(t) - t|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{3}{4}\int_\epsilon^{3\epsilon} \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{3\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc $J(\epsilon) \underset{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}}{\longrightarrow} \ln(3)$.
Mais $J(\epsilon) \underset{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}}{\longrightarrow} I$ donc $I = \ln(3)$.

Exercice 17 *(Mines 2018)*

1. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$?
2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction

1. L'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ a été justifiée en cours.
2. Il faut prolonger $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ par continuité en 0. On note g ce prolongement.
   g est continue sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge donc d'après la relation de Chasles, $f(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \displaystyle\int_x^0 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$
   Sous cette forme, on peut invoquer le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral.
   f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = -g(x)$.
   $\forall x > 0\ f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x}$.
3.
$$\begin{aligned} \forall x > 0 \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t \text{ il n'y a rien à justifier : } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ &= xf(x) + \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = x\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + 1 - \cos(x) \\ &= x\left(\left[\frac{-\cos(t))}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) + 1 - \cos(x) \end{aligned}$$

   Justification de l'IPP
   $u'(t) = \sin(t)$, $u(t) = -\cos(t)$

$v(t)=\dfrac{1}{t}$, $v'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$
u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[x;+\infty[$ $(x>0)$ et $u(t)v(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$

$$\begin{aligned}
\forall x>0\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \cos(x)-x\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t+1-\cos(x)\\
&= 1-x\left(\left[\frac{\sin(t)}{t^2}\right]_x^{+\infty}+2\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\right)\\
&\quad \text{On justifie l'IPP comme ci-dessus}\\
&= 1+\frac{\sin(x)}{x}-2x\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\\
&= 1+\frac{\sin(x)}{x}-2xO\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\forall x>0\ \left|\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_x^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t^3}\,\mathrm{d}t\\
&\leq \int_x^{+\infty}t^{-3}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_x^{+\infty}\\
&\leq \frac{1}{2x^2}
\end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre x vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=1$$

Exercice 18 *(X 2016)*

Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, telle que $f(x)=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $a>0$.

Prouver que $g:x\mapsto f\left(\sqrt{4a+x^2}\right)$ et $h:x\mapsto f\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}g=\int_0^{+\infty}h$.

Correction

- g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  On pose $u(x)=\sqrt{4a+x^2}\sim_{+\infty}x$.
  $g(x)=f(u(x))=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{u(x)^2}\right)=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
  g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
  $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc $h(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$.
  On peut prolonger h par continuité en 0.
  On pose $v(x)=x+\dfrac{a}{x}\sim_{+\infty}x$.
  $h(x)=f(v(x))=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{v(x)^2}\right)=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
  h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- Passons à l'égalité.
  On cherche un changement de variable $x = \varphi(t)$ tel que $\sqrt{4a + x} = t + \dfrac{a}{t}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{4a + x^2} = t + \frac{a}{t} \quad &\iff \quad 4a + x^2 = t^2 + 2a + \frac{a^2}{t^2} \\ &\iff \quad x^2 = t^2 - 2a + \frac{a^2}{t^2} = \left(t - \frac{a}{t}\right)^2\end{aligned}$$

On fait donc le changement de variable $\mathcal{C}^1$: $x = \varphi(t) = t - \dfrac{a}{t}$.
$\forall t > 0\ \varphi'(t) = 1 + \dfrac{a}{t^2} > 0$: le changement de variable est bien strictement monotone.
De plus, $\varphi(\sqrt{a}) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$ donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \quad &= \quad \int_0^{+\infty} f(\sqrt{4a + x^2})\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(\sqrt{\left(t + \frac{a}{t} > 0\right)^2}\right)\left(1 + \frac{a}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \quad \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(t + \frac{a}{t}\right)\,\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(t + \frac{a}{t}\right)\frac{a\,\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \quad \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(t + \frac{a}{t}\right)\,\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{a}}^{0} f\left(\frac{a}{y} + y\right)(-\,\mathrm{d}y) \quad y = \frac{a}{t}\ \mathcal{C}^1 \searrow\searrow \\ &= \quad \int_0^{+\infty} f\left(t + \frac{a}{t}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2.4 Comportement asymptotique des fonctions intégrables

Exercice 19 *(X 2005, 2007)*

Une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ tend-elle vers zéro à l'infini ?
Montrer que si f est $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée bornée, alors f tend vers zéro.

Correction
Une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ ne tend pas forcément vers zéro à l'infini. Il y a des exemples dans le cours.
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée bornée.
Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
F est de classe $\mathcal{C}^2$ et $F'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$.
On utilise la formule de Taylor avec reste intégral.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$:
$F(x + h) = F(x) + hF'(x) + \displaystyle\int_x^{x+h} (x + h - t)F''(t)\,\mathrm{d}t$
$f(x) = \dfrac{F(x + h) - F(x)}{h} - \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} (x + h - t)f'(t)\,\mathrm{d}t$

On note $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq \frac{|F(x+h)-F(x)|}{h} + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (x+h-t)\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{|F(x+h)-F(x)|}{h} + \frac{M_1}{h}\left[-\frac{(x+h-t)^2}{2}\right]_x^{x+h} \\
&\leq \frac{|F(x+h)-F(x)|}{h} + \frac{M_1 h}{2}
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$.
$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \geq x_0 \;\; |F(x) - l| \leq \epsilon$
$\forall x \geq x_0 \; \forall h \in \mathbb{R}_+ \;\; |F(x+h) - F(x)| \leq 2\epsilon$
$\forall x \geq x_0 \; \forall h \in \mathbb{R}_+ \;\; |f(x)| \leq \dfrac{2\epsilon}{h} + \dfrac{M_1 h}{2}$
$\dfrac{d}{dh}\left(\dfrac{2\epsilon}{h} + \dfrac{M_1 h}{2}\right) = -\dfrac{2\epsilon}{h^2} + \dfrac{M_1}{2}$
On prend $h = 2\sqrt{\dfrac{\epsilon}{M_1}}$ ($M_1 > 0$ quitte à l'augmenter).
$\forall x \geq x_0 \;\; |f(x)| \leq 2\sqrt{M_1}\,\sqrt{\epsilon}$.
On a bien $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

On raisonne de même en $-\infty$ ou on utilise $x \mapsto f(-x)$.

Exercice 20 *(Mines 2022)*

Soit $f : [0;1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge et $\lim_{1^-} f = 0$.
Montrer que $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} 0$.

Correction
Puisque f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$:
$\forall (x,y) \in [0;1[^2 \;\; f(y) - f(x) = \displaystyle\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t$
Si on suppose $x < y$, on a par Cauchy-Schwarz :
$|f(y) - f(x)| \leq \left(\displaystyle\int_x^y f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\displaystyle\int_x^y 1^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \sqrt{y-x}\left(\displaystyle\int_x^y f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$
On fait tendre y vers 1 :
$|f(x)| \leq \sqrt{1-x}\left(\displaystyle\int_x^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$
$\displaystyle\int_x^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} 0$ donc $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} 0$.

2.5 Propriétés des fonctions intégrables

Exercice 21 *(Mines 2016)*

Soit $f :]0;1[\to \mathbb{R}$ continue, intégrable et monotone sur $]0;1[$.
Montrer :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction
Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer f croissante.
$\forall k \in [\![1; n-1]\!] \quad \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t$
Il n'y a pas de problème pour $k = 1$ ou $k = n-1$ à cause de l'intégralité de f.
On somme :
$\int_0^{1-1/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$
et il n'y a plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$.

2.6 Deux exercices plus difficiles

Exercice 22 *(X 2020)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique ($T > 0$).
Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$.
On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$.

1. Convergence de I.
2. Calcul de I.

Correction
En fait, les deux questions doivent être traitées simultanément.
La fonction $x \mapsto \frac{f(bx) - f(ax)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soient c et $d \in \mathbb{R}$ tels que $0 < c < d$.

$$\begin{aligned}
\int_c^d \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_c^d \frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_c^d \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{bc}^{bd} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ac}^{ad} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{bc}^{ac} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{ac}^{ad} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{ad}^{bd} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ac}^{ad} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{ad}^{bd} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ac}^{bc} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$.
$\exists \delta > 0$ tq $\forall t \in [0; \delta] \quad |f(t) - f(0)| \leq \epsilon$ (continuité de f en 0)
Donc :

$$\begin{aligned}
\forall c \in \left]0; \frac{\delta}{b}\right[\quad \left|\int_{ac}^{bc} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ac}^{bc} \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{ac}^{bc} \frac{|f(t) - f(0)|}{t}\,\mathrm{d}t \\
\forall c \in \left]0; \frac{\delta}{b}\right[\quad \left|\int_{ac}^{bc} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right| &\leq \epsilon \ln\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_{ac}^{bc} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[c \to 0]{} f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Dans l'intégrale de départ, on voit qu'ajouter à f une constante ne change rien.
On peut donc supposer que la valeur moyenne de f sur une période est nulle [2].

2. Une rédaction soignée commencerait par ce point, mais on ne le découvre qu'en faisant l'exercice

Soit F la primitive de f nulle en 0. F est T-périodique :
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F(t+T)-F(t)\right)=f(t+T)-f(t)=0$
et $F(0+T)-F(0)=\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=0$
Par conséquent F est bornée.

$$\begin{aligned}\int_{ad}^{bd}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{F(t)}{t}\right]_{ad}^{bd}+\int_{ad}^{bd}\frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{F(bd)}{bd}-\frac{F(ad)}{ad}+\int_{ad}^{bd}\frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

La fonction $t\mapsto\dfrac{F(t)}{t^2}$ étant intégrable sur $[1;+\infty[$ (facile à justifier) :
$\displaystyle\int_{ad}^{bd}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[d\to+\infty]{}0$ pour une fonction de valeur moyenne nulle.
On a donc pour une fonction de moyenne nulle $I=-f(0)\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.
Dans le cas général :

$$I=\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t-f(0)\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Exercice 23 *(Centrale 2019)*

Soit F définie sur $]0;1]$ par :
$\forall x\in]0;1]\ F(x)=\displaystyle\int_0^x\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$
Soit f définie sur $[0;1]$ par :
$\forall x\in]0;1]\ f(x)=x(x+1)+F(x)$
et
$f(0)=0$

1. Définition et dérivabilité de f.
2. Déterminer $f'([0;1])$.

Correction

1. Soit $x\in]0;1]$.
   La fonction $t\mapsto\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0;x]$.
   $\forall t\in]0;x]\ \left|\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\right|\leq 1$
   et la fonction $t\mapsto 1$ est intégrable sur $]0;x]$.
   On en déduit que la fonction $t\mapsto\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est intégrable sur $]0;x]$.
   F est donc définie sur $]0;1]$.
   La relation de Chasles permet d'écrire :
   $\forall x\in]0;1]\ F(x)=\displaystyle\int_0^1\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t+\int_1^x\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$
   Sous cette forme, on peut appliquer le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral. F est donc $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$ avec :
   $\forall x\in]0;1]\ F'(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   f est donc bien définie sur $[0;1]$.

f est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$ et :
$\forall x \in]0;1]\ f'(x) = 1 + 2x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
$f'(x)$ n'a pas de limite en 0. Cela n'empêche pas f d'être dérivable en 0 mais elle ne sera pas $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.
En 0 le taux d'accroissement est :
$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x + 1 + \frac{1}{x}\int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = x + 1 + \frac{1}{x}\int_{1/x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} \mathrm{d}u$
$\forall X > 0\ \int_X^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} \mathrm{d}u = \frac{\cos(X)}{X^2} - 2\int_X^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^3} \mathrm{d}u = O_{+\infty}\left(\frac{1}{X^2}\right)$ (classique)
On en déduit :
$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x + 1 + \frac{1}{x} O(x^2) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

2. $f'([0;1]) = \{f'(0)\} \cup f'(]0;1]) = \{1\} \cup f'(]0;1])$
f' est continue sur $]0;1]$ donc $f'(]0;1])$ est un intervalle.
$\forall x \in]0;1]\ f'(x) = 1 + 2x + \sin\left(\frac{1}{x}\right) > 1 - 1 = 0$
De plus $f'\left(\frac{1}{-\pi/2 + 2n\pi}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc la borne inférieure de $f'(]0;\pi])$ est 0 et elle n'est pas atteinte.
Comme $f'([0;1]) = \{1\} \cup f'(]0;1])$, 0 est la borne inférieure de $f'([0;1])$ et elle n'est pas atteinte. L'image du segment $[0;1]$ par f' n'est pas un segment.
$f'(1) = 3 + \sin(1) \simeq 3,84$
$\forall x \in \left]0; \frac{f'(1)-2}{2}\right[\ f'(x) < 1 + f'(1) - 2 + 1 = f'(1)$
On note $a = \frac{f'(1)-2}{2} \simeq 0,92$
f' est continue sur le segment $[a;1]$ donc il existe x_0 dans ce segment tel que :
$\forall x \in [a;1]\ \ f'(x) \leq f'(x_0)$
On a donc :
$\forall x \in [0;1]\ f'(x) \leq f'(x_0)$
$x_0 > 0$ donc si $x_0 < 1$ alors $f''(x_0) = 0$.
Donc $x_0^{-2}\cos(x_0^{-1}) = 2$
Mais $x_0^{-2}\cos(x_0^{-1}) \leq x_0^{-2} \leq a^{-2} \simeq 1,18$ donc on aboutit à une contradiction.
Par conséquent $x_0 = 1$ et $f'([0;1]) =]0, f'(1)]$.