TD 2024-2025
Analyse 2
Chapitre 2
Normes
Correction

941

1 Exemples de normes

Exercice 1 *(Centrale 2015, planche complète)*

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t$.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soient $(a, b) \in [0;1]^2$.
   Montrer :
   $\forall P \in \mathbb{R}[X] \; N_b(P) \leq 2N_a(P)$

Correction

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   - Il est clair que si $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P)$ est bien défini et appartient à $\mathbb{R}_+$.
   - $$\begin{aligned} \forall (\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X] \; N_a(\lambda P) &= |\lambda P(a)| + \int_0^1 |\lambda P'(t)| \, \mathrm{d}t \\ &= |\lambda| \, |P(a)| + \int_0^1 |\lambda| \, |P'(t)| \, \mathrm{d}t = \lambda \left(|P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t \right) \\ &= |\lambda| \, N_a(P) \end{aligned}$$
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $N_a(P) = 0$.
     $(|P(a)| \geq 0) + \left(\int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t \geq 0 \right) = 0$
     Donc $|P(a)| = \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t = 0$.
     Mais $|P'|$ est une fonction continue et positive donc :
     $\forall t \in [0;1] \;\; |P'(t)| = 0$
     On en déduit :
     $\forall t \in [0;1] \; P'(t) = 0$
     puis P est constant.
     Mais $P(a) = 0$ donc P est le polynôme nul.

- $$\begin{aligned}\forall (P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2\ N_a(P+Q) &= |P(a)+Q(a)|+\int_0^1 \left|P'(t)+Q'(t)\right|\,\mathrm{d}t\\ &\leq |P(a)|+|Q(a)|+\int_0^1 \left(\left|P'(t)\right|+\left|Q'(t)\right|\right)\,\mathrm{d}t\\ &\leq |\lambda P(a)|+\int_0^1 \left|\lambda P'(t)\right|\,\mathrm{d}t+|\lambda Q(a)|+\int_0^1 \left|\lambda Q'(t)\right|\,\mathrm{d}t\\ &\leq N_a(P)+N_a(Q)\end{aligned}$$

  N_a est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}|P(b)| &= \left|P(a)+\int_a^b P'(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq |P(a)|+\left|\int_a^b P'(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq |P(a)|+\int_{[a;b]\text{ ou }[b;a]} |P'|\\ &\leq |P(a)|+\int_0^1 \left|P'(t)\right|\,\mathrm{d}t = N_a(P)\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 \left|P'(t)\right|\,\mathrm{d}t \leq N_a(P)$
D'où :
$\forall P\in\mathbb{R}[X]\ N_b(P)\leq 2N_a(P)$
L'examinateur a demandé si l'inégalité restait vraie en ne prenant plus $a,b\in[0;1]$.
La réponse est non car :

$$\begin{aligned}N_a(X^n) &= a^n+\int_0^1 nx^{n-1}\,\mathrm{d}x\\ &= a^n+1\\ &\sim a^n \text{ si } a>1\end{aligned}$$

Si $b>a>1$, on ne peut pas avoir $N_b\leq CN_a$.

Exercice 2

Soit $N\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto \sup\limits_{t\in[0,1]}|x+ty|\end{cases}$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner $\mathcal{B}_f(0_{\mathbb{R}^2},1)$.

Correction

1. - Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $N(u)$ est bien défini et appartient à $\mathbb{R}_+$.

- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} N(u) = 0 &\iff \sup_{t\in[0,1]} |x + ty| = 0 \\ &\iff \forall t \in [0, 1]\ |x + ty| = 0 \\ &\iff \forall t \in [0, 1]\ x + ty = 0 \\ &\implies x = y = 0 \\ &\implies u = 0 \end{aligned}$$

  En effet si la fonction polynomiale $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto x + ty \end{cases}$ est nulle sur $[0, 1]$ qui est infini, c'est la fonction nulle et $x = y = 0$.
  La réciproque est triviale.

-

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ N(\lambda(x, y)) &= \sup_{t\in[0,1]} |\lambda x + t\lambda y| \\ &= \sup_{t\in[0,1]} |\lambda||x + ty| \\ &= |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |x + ty| \text{ car } |\lambda| \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2\ N((x, y) + (x', y')) &= N((x + x', y + y')) \\ &= \sup_{t\in[0,1]} |x + x' + t(y + y')| \\ &= \sup_{t\in[0,1]} |x + ty + x' + ty'| \end{aligned}$$

  Or :

$$\forall t \in [0, 1]\ |x + ty + x' + ty'| \leq |x + ty| + |x' + ty'| \leq N((x, y)) + N((x', y'))$$

  Donc
  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2\ N((x, y) + (x', y')) \leq N((x, y)) + N((x', y'))$

N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$

2. **Première méthode**
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
   Lorsque t croît de 0 à 1, $x + ty$ croît de x à $x + y$ si y est positif ou décroît de x à $x + y$ si y est négatif.
   Donc $N(x, y) = \max(|x|, |x + y|)$. D'où :

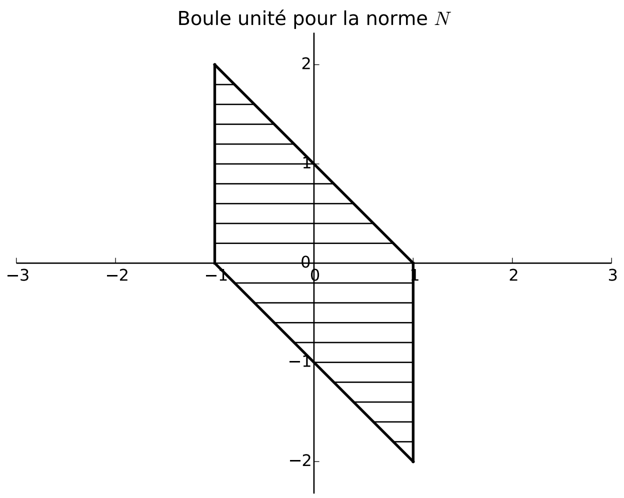
$$N(x, y) \leq 1 \iff \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |x + y| \leq 1 \end{cases}$$

   Donc la boule unité pour N est un parallélogramme.
   Deuxième méthode

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} N((x,y))\leq 1 &\iff \forall t\in[0,1]\ |x+ty|\leq 1\\ &\iff \forall t\in[0,1]\ -1\leq x+ty\leq 1\\ &\implies \begin{cases}|x|\leq 1 \text{ (on prend } t=0)\\ |x+y|\leq 1 \text{ (on prend } t=1)\end{cases}\end{aligned}$$

Réciproquement on suppose $|x|\leq 1$ et si $|x+y|\leq 1$
$x+ty=t(y+x)+(1-t)x$
Or x et $y+x$ appartiennent à $[-1;1]$ qui est une partie convexe de $\mathbb{R}$ donc $x+ty\in[0,1]$ et $N((x,y))\leq 1$



Exercice 3 *(X 2014)*

1. Pour $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, on pose $\|X\|_\infty=\max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}|x_i|$.
   Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer : $\sup\limits_{\|X\|_\infty=1}(\|A\,X\|_\infty)=\max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{j=1}^n|a_{i,j}|\right)$
2. On considère cette fois-ci : $\|X\|_1=\sum\limits_{i=1}^n|x_i|$.
   Montrer : $\sup\limits_{\|X\|_1=1}(\|A\,X\|_1)=\max\limits_{j\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{i=1}^n|a_{i,j}|\right)$

Correction

1. On note $M_A=\max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{j=1}^n|a_{i,j}|\right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\|X\|_\infty = 1$.

$$\begin{aligned}
\|A\,X\|_\infty &= \max_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \right| \right) \\
&\leq \max_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}\, x_j| \right) \\
&\leq \max_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\ |x_j| \right) \\
&\leq \max_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\ \|X\|_\infty \right) \\
&\leq \max_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \ \text{car}\ \ \|X\|_\infty = 1 \\
&\leq M_A
\end{aligned}$$

De plus, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $x_j = 1$ si $a_{i_0,j} \geq 0$, -1 sinon.

$\|X_0\|_\infty = 1$ et :

$M_A \geq \|A\,X_0\|_\infty \geq \left| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\, x_j \right| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$

On a donc établi :

i Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\|_\infty = 1$, $\|A\,X\|_\infty \leq M_A$

ii Il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X_0\|_\infty = 1$ et $\|A\,X_0\|_\infty = M_A$

D'où le résultat et plus précisément :

$$\max_{\|X\|_\infty = 1} (\|A\,X\|_\infty) = \max_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

2. On note $N_A = \displaystyle\max_{j \in [\![1;n]\!]} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\|X\|_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
\|A\,X\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\ |x_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\ |x_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} (|x_j|\ N_A) = N_A \sum_{j=1}^{n} |x_j| = N_A
\end{aligned}$$

De plus, il existe $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}| = N_A$.
Soit X_0 le vecteur d'indice j_0 de la base canonique.
$A\,X_0 = \begin{pmatrix} a_{1,j_0} \\ \vdots \\ a_{n,j_0} \end{pmatrix}$ donc $\|X_0\|_1 = 1$ et $\|A\,X_0\|_1 = N_A$.
On conclut comme dans le premier cas.

Exercice 4 *(Centrale maths 1 2022)*

Pour tout polynôme à coefficients réels P et tout entier n, on pose $a_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n \,\mathrm{d}t$.
Pour tout polynôme à coefficients réels P, on pose :

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|\,, \quad N_\infty(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n(P)|\,, \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2}$$

1. Justifier que ces quantités sont bien définies.
2. Montrer que $\|.\|_\infty$, N_∞ et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Trouver des constantes α et β strictement positives telles que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ N_\infty(P) \leq \alpha N_2(P) \text{ et } N_2(P) \leq \beta \|P\|_\infty$$

4. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes entre elles.

Correction

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   - $|P|$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes $|P|$ est bornée sur $[0;1]$ et atteint ses bornes. $\|P\|_\infty$ existe donc, c'est même un maximum.

- $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |a_n(P)| \leq \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\, t^n \,\mathrm{d}t \leq \|P\|_\infty \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{\|P\|_\infty}{n+1} \leq \|P\|_\infty$ indépendant de n

  On en déduit que $N_\infty(P)$ est bien défini : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq a_n(P)^2 \leq \dfrac{\|P\|_\infty^2}{(n+1)^2}$

  Donc la série de terme général $a_n(P)^2$ converge.

2. - $\|.\|_\infty$ est une norme.
     — $\forall P \in \mathbb{R}[X]\ \ \|P\|_\infty \in \mathbb{R}_+$
     — $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall P \in \mathbb{R}[X]\ \ \|\lambda P\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0;1]} (|\lambda|\ |P(x)|) = |\lambda| \sup\limits_{t\in[0;1]} |P(t)|$ car $|\lambda| \in \mathbb{R}_+$
       Donc :
       $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall P \in \mathbb{R}[X]\ \ \|\lambda P\|_\infty = |\lambda|\ \|P\|_\infty$
     — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|P\|_\infty = 0$.
       $\forall t \in [0;1]\ P(t) = 0$
       P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul.
     — Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.
       $\forall t \in [0;1]\ \ |(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ indépendant de t
       Donc $\|P+Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$
   - N_∞ est une norme.
     — $\forall P \in \mathbb{R}[X]\ N_\infty(P) \in \mathbb{R}_+$
     — $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall P \in \mathbb{R}[X]\ N_\infty(\lambda P) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (|\lambda|\,|a_n(P)|) = |\lambda| \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n(P)|$ car $|\lambda| \in \mathbb{R}_+$
       Donc :
       $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall P \in \mathbb{R}[X]\ N_\infty(\lambda P) = |\lambda|\, N_\infty(P)$
     — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N_\infty(P) = 0$.
       $\forall n \in \mathbb{N}\ \displaystyle\int_0^1 P(t) t^n \,\mathrm{d}t = 0$
       Par linéarité de l'intégrale :
       $\forall Q \in \mathbb{R}[X]\ \ \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t) \,\mathrm{d}t = 0$
       En particulier : $\displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$.
       Mais P^2 est une fonction continue et positive donc :
       $\forall t \in [0;1]\ P(t)^2 = 0$
       P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul.
     — Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.
       $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |a_n(P+Q)| = |a_n(P) + a_n(Q)| \leq |a_n(P)| + |a_n(Q)| \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$ indépendant de n
       Donc $N_\infty(P+Q) \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$
   - N_2 est une norme.
     — $\forall P \in \mathbb{R}[X]\ N_2(P) \in \mathbb{R}_+$
     — $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall P \in \mathbb{R}[X]\ N_2(\lambda P) = \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^2 a_n(P)^2} = \sqrt{\lambda^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2} = |\lambda| \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2} = |\lambda|\, N_2(P)$
     — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N_2(P) = 0$.
       $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n(P)^2 \geq 0\right) = 0$

Donc :
$\forall n \in \mathbb{N} \int_0^1 P(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0$
On en déduit comme ci-dessus que P est le polynôme nul.

— Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.
L'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^{N+1}$ muni de sa structure euclidienne canonique donne :
$\sqrt{\sum_{n=0}^{N} a_n(P+Q)^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} (a_n(P) + a_n(Q))^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} a_n(P)^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{N} a_n(Q)^2}$
En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q)$

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
$\forall N \in \mathbb{N}\ a_N(P)^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2 = N_2(P)^2$
Donc :
$\forall N \in \mathbb{N}\ |a_N(P)| \leq N_2(P)$ indépendant de N
Donc $N_\infty(P) \leq N_2(P)$.
Supposons qu'il y ait égalité avec $P \neq 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n(P)| \leq \frac{\|P\|_\infty}{n+1}$
Donc $a_n(P) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Donc :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ |a_n(P)| \leq \frac{1}{2} N_\infty(P)$ ($P \neq 0$ donc $N_\infty(P) > 0$)
$[\![0; n_0]\!]$ étant fini :
$\exists N_0 \in [\![0; n_0]\!]$ tel que $\forall n \in [\![0; n_0]\!]\ |a_n(P)| \leq |a_{N_0}(P)|$
$|a_{N_0}(P)| > \frac{1}{2} N_\infty(P)$ car sinon :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n(P)| \leq \frac{1}{2} N_\infty(P)$
puis $N_\infty(P) \leq \frac{1}{2} N_\infty(P)$ avec $N_\infty(P) > 0$
On a donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n(P)| \leq |a_{N_0}(P)|$
Donc $|a_{N_0}(P)| = N_\infty(P)$ puis :
$a_{N_0}(P)^2 = N_\infty(P)^2 = N_2(P)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{N_0\}\ a_n(P) = 0$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n(X^{N_0+1}P) = a_{N_0+n+1}(P) = 0$
Donc $X^{N_0+1}P = 0$ et $P = 0$: contradiction.
Reste deux possibilités : améliorer l'inégalité ou trouver une suite de polynômes non nuls telle que $\frac{N_\infty(P_n)}{N_2(P_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
Avec $P = 1$, on trouve $C \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}} \simeq 0,78$

Avec $P = X - 1$, on trouve $C \geq \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{\pi^2 - 9}{3}}} \simeq 0,93$

Une exploration numérique suggère que les polynômes $(X-1)^p$ pourraient être les bons.
On va plutôt prendre $P_p = (1-X)^p$ qui est positif qu $[0;1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n(P_p) = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^p \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)^p \,\mathrm{d}t = a_0(P_p)$

Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}\ \ |a_n(P_p)| = a_n(P_p) \leq a_0(P_p) \leq |a_0(P_p)|$

Donc :

$N_\infty(P_p) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^p \,\mathrm{d}t = \left[\frac{-(1-t)^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2\ 0 \leq a_n(P_p) &= \int_0^1 t^n(1-t)^p \,\mathrm{d}t = \left[t^n\frac{-(1-t)^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 + \frac{n}{p+1}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{p+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{p+1}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{p+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n(n-1)\ldots 1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}\int_0^1 (1-t)^{p+n}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n(n-1)\ldots 1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)(p+n+1)} \\
&= \frac{1}{p+1}\times\frac{2}{p+2}\times\frac{3}{p+3}\times\ldots\frac{n}{p+n}\times\frac{1}{p+n+1} \\
&\leq \frac{1}{p+1}\times\frac{2}{p+2}\times\frac{1}{p+n+1} \\
&\leq \frac{2}{p^2}\times\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Tout étant positif, on a :

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n(P_p)^2 \leq \frac{4C}{p^4}$ avec $C = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ indépendant de p

Donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n(P_p)^2 = o_{p\to+\infty}\left(a_0(P_p)^2\right)$

De plus $a_1(P_p)^2 = \dfrac{1}{(p+1)^2(p+2)^2} = o_{p\to+\infty}\left(a_0(P_p)^2\right)$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P_p)^2 \sim_{p\to+\infty} a_0(P_p)^2$

On en déduit $N_2(P_p) \sim_{p\to+\infty} a_0(P_p) = \dfrac{1}{p+1}$

On en déduit $\dfrac{N_\infty(P_p)}{N_2(P_p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$

L'inégalité $N_\infty \leq N_2$ est donc optimale.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq a_n(P)^2 \leq \dfrac{\|P\|_\infty^2}{(n+1)^2}$

Donc $N_2(P)^2 \leq \|P\|_\infty^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \|P\|_\infty^2 \frac{\pi^2}{6}$
Donc $N_2(P) \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{6} \|P\|_\infty$
Il y a égalité pour $P = 1$.
Donc si pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_2(P) \leq \beta \|P\|_\infty$ alors :
$\beta \geq \frac{N_2(1)}{\|1\|_\infty} = \frac{\pi\sqrt{6}}{6}$
Donc $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$ est la meilleure constante possible.

Remarque
On a vu dans la première question :
$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n(P)| \leq \|P\|_\infty$
Donc :
$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ N_\infty(P) \leq \|P\|_\infty$
Il y a égalité pour $P = 1$.

4. - On suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ $\|P\|_\infty \leq CN_\infty(P)$.
     $\forall p \in \mathbb{N}\ \|X^p\|_\infty = 1$
     $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2\ a_n(X^p) = \frac{1}{n+p+1}$
     Donc :
     $\forall p \in \mathbb{N}\ N_\infty(X^p) = \frac{1}{p+1}$
     Donc :
     $\forall p \in \mathbb{N}\ 1 \leq \frac{C}{p+1}$
     On fait tendre p vers $+\infty$: $1 \leq 0$
     C'est absurde donc $\|.\|_\infty$ et N_∞ ne sont pas équivalentes.
   - On suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ $N_2(P) \leq CN_\infty(P)$.
     $\forall p \in \mathbb{N}\ N_2(X^p) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+p+1)^2}} = \sqrt{\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$
     Par comparaison série-intégrale, on en déduit :
     $\forall p \in \mathbb{N}\ N_2(X^p) \geq \sqrt{\int_{p+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{p+1}}$
     On a donc :
     $\sqrt{\frac{1}{p+1}} \leq \frac{C}{p+1}$
     Donc :
     $\forall p \in \mathbb{N}\ \sqrt{p+1} \leq C$
     C'est absurde donc N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
   - On suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ $\|P\|_\infty \leq CN_2(P)$.
     On a alors :
     $\forall p \in \mathbb{N}\ \|X^p\|_\infty \leq CN_2(P)$
     Donc :

$\forall p \in \mathbb{N}\ 1 \leq C\sqrt{\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$
On fait tendre p vers $+\infty$: $1 \leq 0$
C'est absurde donc $\|.\|_\infty$ et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 5 *(X 2020)*

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0;1]) \text{ tq } f(0) = f(1) = 0\}$.
Soit $N \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \|f''\|_\infty \end{cases}$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer :
   $\exists C \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall f \in E\ \ \|f\|_\infty \leq CN(f)$
3. Montrer que $C = \dfrac{1}{8}$ est la meilleure constante possible.

Correction

1. Il semble acquis que $\|.\|_\infty$ est bien une norme sur $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$.
   Dans ce cas, N est bien définie sur E et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   $\forall(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E\ N(\lambda f) = \|\lambda f''\|_\infty = |\lambda|\, \|f''\|_\infty = |\lambda|\, N(f)$
   Soit f telle que $N(f) = 0$.
   $\|f''\|_\infty = 0$ donc f'' est la fonction nulle.
   f est donc affine :
   $\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall t \in [0;1]\ f(t) = at + b$
   $f(0) = 0$ donne $b = 0$, puis $f(1) = 0$ donne $a = 0$.
   f est donc la fonction nulle.
   $\forall(f,g) \in E^2\ N(f+g) = \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty = N(f) + N(g)$
   N est bien une norme sur E.
2. Plusieurs méthodes sont possibles. En voici une simple :
   D'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. D'après les accroissements finis, pour tout t compris entre 0 et 1 il existe s compris entre 0 et 1 tel que $f'(t) = f'(t) - f'(\alpha) = (t-\alpha)f''(s)$
   On en déduit facilement :
   $\forall t \in [0;1]\ \ |f'(t)| \leq N(f)$
   On a alors, toujours avec les accroissements finis :
   $\forall t \in [0;1]\ \ |f(t)| = |f(t) - f(0)| \leq tN(f)$
   On en déduit que $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
3. On va améliorer ce qui précède, en revenant à la démonstration du théorème de Rolle.
   On commence par écarter le cas de la fonction nulle pour laquelle on a évidemment $\|f\|_\infty \leq \dfrac{1}{8}N(f)$.
   On suppose désormais que f n'est pas la fonction nulle.
   f étant continue sur le *segment* $[0;1]$:
   $\exists \alpha \in [0;1] \text{ tq } \forall x \in [0;1]\ \ |f(x)| \leq |f(\alpha)|$.
   f n'étant pas la fonction nulle, $\alpha \neq 0, 1$.
   Si $f(\alpha) > 0$ alors :
   $\forall x \in [0;1]\ f(x) \leq |f(x)| \leq |f(\alpha)| = f(\alpha)$
   Si $f(\alpha) < 0$ alors :

$\forall x \in [0;1]\ f(x) \geq -|f(x)| \geq -|f(\alpha)| = f(\alpha)$
de sorte que dans tous les cas, f présente un extremum local en α.
On en déduit $f'(\alpha) = 0$.

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha) & = & f(\alpha) - f(0) = \displaystyle\int_0^\alpha f'(t)dt \\ & = & [tf'(t)]_0^\alpha - \displaystyle\int_0^\alpha tf''(t)\,\mathrm{d}t = -\displaystyle\int_0^\alpha tf''(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha) & = & f(\alpha) - f(1) = \displaystyle\int_1^\alpha f'(t)dt \\ & = & [(t-1)f'(t)]_1^\alpha - \displaystyle\int_1^\alpha (t-1)f''(t)\,\mathrm{d}t = \displaystyle\int_\alpha^1 (t-1)f''(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} 2\,\|f\|_\infty & = & 2\,|f(\alpha)| \\ & \leq & \displaystyle\int_0^\alpha tN(f)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^1 (1-t)N(f)\,\mathrm{d}t \\ & \leq & \dfrac{N(f)}{2}\left(\alpha^2 + (1-\alpha)^2\right) \end{array}$$

Une étude de la fonction $\alpha \mapsto \alpha^2 + (1-\alpha)^2$ montrer qu'elle est maximale en $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
Donc :
$\forall \alpha \in [0;1]\ \alpha^2 + (1-\alpha)^2 \leq \dfrac{1}{2}$
D'où $\|f\|_\infty \leq \dfrac{1}{8}N(f)$.

Reste à montrer qu'on ne peut pas faire mieux.
On s'arrange pour avoir $f'' = Cte$ ie f polynômiale de degré 2.
On prend donc $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x(1-x) \end{cases}$.
Une étude de fonction élémentaire donne $\|f\|_\infty = \dfrac{1}{4}$.
f'' est constante, égale à -2 donc $N(f) = 2$.
Par conséquent $\dfrac{1}{4} \leq 2C$ et $C \geq \dfrac{1}{8}$.

Exercice 6 *(X 2021)*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille génératrice de E.
Pour tout $x \in E$, on pose $N(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq p} (|< e_i, x >|)$.

1. Montrer que N est une norme.
2. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
   Déterminer une famille génératrice de E telle que $N = \|.\|_\infty$.
   On rappelait :
   $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ \ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$

3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
   Déterminer une famille génératrice de E telle que $N = \|.\|_1$.
   On rappelait :
   $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
4. On suppose $n = 2$.
   Déterminer les vecteurs x de E tels que $N(x) \leq 1$ et dessiner la sphère de centre 0 et de rayon 1.
5. Soit $S = \{x \in E \text{ tq } \|x\| = 1\}$.
   Montrer :
   $\forall x \in E \ \|x\| = \sup_{s \in S} (|< s, x >|)$.

Correction

1.
   - La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ étant finie, il n'y a pas de problème de définition et :
     $\forall x \in E \ N(x) \in \mathbb{R}_+$
   - Soit $x \in E$ tel que $N(x) = 0$.
     On a alors :
     $\forall i \in [\![1; p]\!] \ < e_i, x >= 0$
     Donc x est orthogonal à $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = E$ ie $x = 0$.
   - $$\begin{aligned}\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \ N(\lambda x) &= \max_{1 \leq i \leq p} (|< e_i, \lambda x >|)\\ &= \max_{1 \leq i \leq p} (|\lambda < e_i, x >|)\\ &= \max_{1 \leq i \leq p} (|\lambda|\,|< e_i, x >|)\\ &= |\lambda| \max_{1 \leq i \leq p} (|< e_i, x >|) \text{ car } |\lambda| \in \mathbb{R}_+\\ &= |\lambda|\, N(x)\end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned}\forall(x, y) \in E^2 \ N(x + y) &= \max_{1 \leq i \leq p} (|< e_i, x + y >|)\\ &= \max_{1 \leq i \leq p} (|< e_i, x > + < e_i, y >|)\\ &\leq \max_{1 \leq i \leq p} (|< e_i, x >| + |< e_i, y >|)\\ &\leq \max_{1 \leq i \leq p} (|< e_i, x >|) + \max_{1 \leq i \leq p} (|< e_i, y >|)\\ &\leq N(x) + N(y)\end{aligned}$$

   N est bien une norme.
2. Soit $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ N(x) = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) = \|x\|_\infty$
3. Soit $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   On considère les 2^n vecteurs suivants : $\sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_i$ avec $a_i = \pm 1$.
   Ils forment bien une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall i \in [\![1;n]\!]\ \epsilon_i = \frac{1}{2}\left(\left(\epsilon_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \epsilon_j\right) + \left(\epsilon_i - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \epsilon_j\right)\right).$$

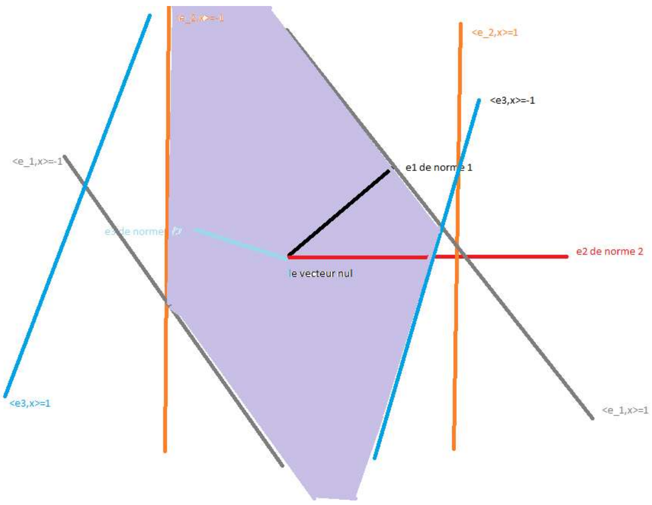
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \left| < x, \sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_i > \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|\,|x_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 \end{aligned}$$

De plus, il y a égalité si on prend $a_i = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i \geq 0 \\ -1 \text{ si } x_i < 0 \end{cases}$.

Donc $N(x) = \|x\|_1$.

4. $N(x) \leq 1 \iff \forall i \in [\![1;p]\!]\ -1 \leq < e_i, x > \leq 1$
Il peut exister des i pour lesquels e_i est nul. La condition correspondante est vérifiée par tous les vecteurs de E.
On retire donc ces éventuelles valeurs de i.
Cela revient à dire que x est de la forme $a_i e_i + f_i$ avec $-\frac{1}{\|e_i\|} \leq a_i \leq \frac{1}{\|e_i\|}$ et f_i orthogonal à e_i.
La boule unité fermée de N est une intersection de bandes.



5. Soit $x \in E$.
Le résultat est clair si $x = 0$: $0 = \sup_{s \in S}(0)$.
On suppose donc x non nul.

$\forall s \in S\ |< s, x >| \leq \|s\|\ \|x\| = \|x\|$ par Cauchy-Schwarz.
De plus si $s = \dfrac{x}{\|x\|}$ alors $s \in S$ et :
$|< s, x >| = \|x\|$
ce qui permet de conclure.

2 Boules

Exercice 7 *(Mines 2021)*

Soit E un espace vectoriel.
Soit N_1 une norme sur E et B_1 la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour N_1.
Soit N_2 une norme sur E et B_2 la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour N_2.
Montrer :
$N_1 = N_2 \iff B_1 = B_2$

Correction
Le sens direct est trivial.
On suppose $B_1 = B_2$.

- **Première méthode**
  Soit x un vecteur non nul de E et $t \in]0; 1[$.
  $\dfrac{t}{N_1(x)}x$ appartient à B_1 donc à B_2 :
  $N_2\left(\dfrac{t}{N_1(x)}x\right) < 1$
  Donc : $\dfrac{t}{N_1(x)}N_2(x) < 1$
  On fait tendre t vers 1 : $\dfrac{N_2(x)}{N_1(x)} \leq 1$
  Donc $N_2(x) \leq N_1(x)$.
  C'est trivial pour $x = 0$ donc : $N_2 \leq N_1$
  N_1 et N_2 jouant des rôles symétriques, $N_2 \leq N_1$.
  D'où $N_1 = N_2$.
- **Deuxième méthode**
  Soit x un vecteur non nul de E.
  $N_1\left(\dfrac{x}{N_1(x)}\right) = 1$ donc $\dfrac{x}{N_1(x)} \notin B_1$.
  Mais $B_1 = B_2$ donc $\dfrac{x}{N_1(x)} \notin B_2$.
  On en déduit : $N_2\left(\dfrac{x}{N_1(x)}\right) \geq 1$
  Donc $\dfrac{N_2(x)}{N_1(x)} \geq 1$ et $N_2(x) \geq N_1(x)$.
  C'est trivial pour $x = 0$ donc : $N_1 \leq N_2$
  N_1 et N_2 jouant des rôles symétriques, $N_2 \leq N_1$.
  D'où $N_1 = N_2$.

Exercice 8 *(X 2021)*

Soient a et $a' \in \mathbb{R}^n$ tels que les boules fermées $\mathcal{B}_f(a, 1)$ et $\mathcal{B}_f(a', 1)$ soient tangentes à la boule $\mathcal{B}_f(0, 1)$ aux points b et b'.

Montrer que les boules $\mathcal{B}_f(a,1)$ et $\mathcal{B}_f(a',1)$ sont disjointes si et seulement si $(Ob|Ob') < \frac{1}{2}$ et qu'elles sont tangentes si et seulement si le triangle Obb' est équilatéral.

Correction
Les boules ne peuvent pas être tangentes intérieurement : on aurait a ou $a' = 0$ et b et b' seraient mal définis.
Par conséquent, $a = 2b$ et $a' = 2b'$ (faire un dessin).

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_f(a,1) \cap \mathcal{B}_f(a',1) = \emptyset &\iff \|a'-a\| > 2 \\
&\iff \|2b'-2b\| > 2 \\
&\iff \|b'-b\| > 1 \\
&\iff \|b'-b\|^2 > 1 \\
&\iff \|b'\|^2 + \|b\|^2 - 2(b'|b) > 1 \\
&\iff 2 - 2(b'|b) > 1 \\
&\iff 1 > 2(b'|b) \\
&\iff (b'|b) < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Les deux boules sont tangentes si, et seulement si, $\|a'-a\| = 2$.
Il suffit d'adapter le calcul précédent pour obtenir la CNS $(b|b') = \frac{1}{2}$.
Mais b et b' étant de norme 1, $(b|b')$ est le cosinus de l'angle en 0.
Obb' est donc un triangle isocèle en O d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$.
Les deux autres sont égaux et la somme des angles vaut π donc ils sont égaux eux aussi à $\frac{\pi}{3}$.
Les trois angles sont égaux donc le triangle est équilatéral.
Remarques

- En fait comme $\|b\| = \|b'\| = 1$ et $\|b - b'\| = \left\|\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a'\right\| = \frac{1}{2}\|a-a'\|$, on a directement :
  $\mathcal{B}_f(a,1)$ et $\mathcal{B}_f(a',1)$ tangentes $\iff$ Obb' est équilatéral
- Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
  Soit $(a_1,a_2) \in E^2$ et $(R_1,R_2)_i n\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
  Montrons :
  $\mathcal{B}_f(a_1,R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2,R_2) \neq \emptyset \iff \|a_2 - a_1\| \leq R_1 + R_2$

  On suppose d'abord $\mathcal{B}_f(a_1,R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2,R_2) \neq \emptyset$.
  Soit $x \in \mathcal{B}_f(a_1,R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2,R_2)$.
  $\|a_2 - a_1\| = \|a_2 - x + x - a_1\| \leq \|a_2 - x\| + \|x - a_1\| \leq R_2 + R_1$

  Réciproquement, on suppose $\|a_2 - a_1\| \leq R_1 + R_2$.
  Si $\|a_2 - a_1\| \leq R_1$ alors $a_2 \in \mathcal{B}_f(a_1,R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2,R_2)$ et $\mathcal{B}_f(a_1,R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2,R_2)$ est non vide.
  On suppose donc $\|a_2 - a_1\| > R_1$.
  On pose $x = a_1 + R_1 \frac{a_2 - a_1}{\|a_2 - a_1\|}$.

$\|x - a_1\| = R_1$ donc $x \in \mathcal{B}_f(a_1, R_1)$.

$$\begin{aligned}
\|x - a_2\| &= \left\| a_1 + R_1 \frac{a_2 - a_1}{\|a_2 - a_1\|} - a_2 \right\| \\
&= \left\| \left(1 - \frac{R_1}{\|a_2 - a_1\|}\right)(a_1 - a_2) \right\| \\
&= \left| 1 - \frac{R_1}{\|a_2 - a_1\|} \right| \|a_1 - a_2\| = |\|a_2 - a_1\| - R_1| \\
&= \|a_2 - a_1\| - R_1 \text{ car } \|a_2 - a_1\| > R_1 \\
&\leq R_1 + R_2 - R_1 = R_2
\end{aligned}$$

Donc :
$x \in \mathcal{B}_f(a_2, R_2)$ et $x \in \mathcal{B}_f(a_1, R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2, R_2)$ qui est donc non vide.

Exercice 9

Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in [-1; 1]\ \ \mathrm{e}^{\lambda x} \leq \cosh \lambda + x \sinh \lambda$$

On rappelle :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \cosh \lambda = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}}{2}$ et $\sinh \lambda = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2}$

Correction
On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $f \begin{cases} [-1; 1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x} \end{cases}$
$\forall x \in [-1; 1]\ f''(x) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} \geq 0$.
Donc f est convexe et f est en dessous de la corde joignant $(-1, f(-1))$ et $(1, f(1))$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-1; 1]\ \ \mathrm{e}^{\lambda x} &\leq f(-1) + \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}(x - (-1)) \\
&\leq \mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2}(x + 1) \\
&\leq \frac{\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\, x \\
&\leq \cosh \lambda + x \sinh \lambda
\end{aligned}$$

Exercice 10

Prouver :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n\ \ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Correction
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$
ln est concave donc :
$\dfrac{1}{n}\left(\ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) + \ln\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{x_n}{x_1}\right)\right) \leq \ln\left(\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1}\right)\right)$

$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\times\frac{x_2}{x_3}\times\cdots\times\frac{x_n}{x_1}\right)\leq\ln\left(\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}\right)\right)$
$\frac{1}{n}\ln 1=0\leq\ln\left(\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}\right)\right)$
$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}\right)\geq 1$
D'où le résultat.

Exercice 11

Soient $a, b \in [0;1]$ tels que $a+b=1$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \; 1+x^a y^b \leq (1+x)^a(1+y)^b$$

Correction
Soient x et $y \in \mathbb{R}_+^*$.
On pose $x = \mathrm{e}^u$ (ce qui revient à poser $u=\ln(x)$) et $y=\mathrm{e}^v$.
$1+x^a y^b = 1+\mathrm{e}^{au+bv}$ et $\ln\left(1+x^a y^b\right)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{au+bv}\right)$
$\ln\left((1+x)^a(1+y)^b\right)=a\ln(1+\mathrm{e}^u)+b\ln(1+\mathrm{e}^v)$
La fonction $f\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ z\mapsto\ln(1+\mathrm{e}^z)\end{cases}$ convexe :
$\forall z\in\mathbb{R}_+ \; f'(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{1+\mathrm{e}^z}$
$\forall z\in\mathbb{R}_+ \; f''(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^2}>0$
Donc :
$\ln\left(1+x^a y^b\right)\leq\ln\left((1+x)^a(1+y)^b\right)$
et on en déduit le résultat par croissance de l'exponentielle.

Exercice 12 *(Ens 2018)*

1. Montrer que le carré est l'unique façon d'optimiser la surface d'un rectangle de périmètre donné.
2. Soient $a_1,\ldots,a_n$ et $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer :
   $$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\alpha^n}\leq\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\alpha}-n\right)$$
   (b) En déduire :
   $$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$
   (inégalité arithmético-géométrique)
3. Montrer que le cube est l'unique façon d'optimiser le volume d'un parallélépipède rectangle pour une aire donnée.

Correction

1. Soit p le périmètre du rectangle.
   Soit x la longueur d'un des côtés.
   Les autres sont de longueurs $\frac{p}{2} - x$, x et $\frac{p}{2} - x$.
   L'aire est $x\left(\frac{p}{2} - x\right)$.
   L'étude de fonction est triviale. Le maximum est atteint pour $x = \frac{p}{4}$ et seulement pour $x = \frac{p}{4}$, ce qui correspond bien à un carré.
2. (a) Soient $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+^*$.
   $\forall i \in [\![1; n]\!]\ \mathrm{e}^{t_i - 1} \geq t_i > 0$: l'inégalité $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ est facile à démontrer.
   De plus, il y a égalité si, et seulement si, $t_i = 1$.
   On fait le produit de ces inégalités entre nombres strictement positifs :
   $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t_i - 1} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} t_i - n\right) \geq \prod_{i=1}^{n} t_i$.
   Il y a égalité si, et seulement si, tous les t_i sont égaux à 1 (car ce sont des inégalités entre nombres strictement positifs).
   On applique ensuite cette inégalité à $t_i = \frac{a_i}{\alpha}$.
   $$\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\alpha} - n\right) \geq \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\alpha^n}$$
   Il y a égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux à α.

   (b) On prend $\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$.
   On obtient $1 \geq \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\alpha^n}$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} a_i \leq \alpha^n$.
   Il n'y a plus qu'à prendre la racine $n^{\text{ième}}$.
   Il y a égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux.

   Remarque
   Dans l'état actuel du programme, l'inégalité arithmético-géométrique se démontre ainsi :
   La fonction ln est strictement concave donc :
   $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$
   avec égalité si, et seulement si, les a_i sont égaux.
   En prenant l'exponentielle, on obtient :
   $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$
   avec égalité si, et seulement si, les a_i sont égaux.

   Inégalité de Jensen
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$.
Alors :
$f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$
On raisonne par récurrence sur n.
Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer : $t_1 = 1$ et l'inégalité s'écrit $f(x_1) \leq f(x_1)$.
La propriété est vraie pour $n = 2$: c'est la définition d'une fonction convexe.
On suppose la propriété vraie au rang n.
Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(t_1, \dots, t_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 1$.

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) &= f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j \times \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j} x_i + t_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&= f\left((1 - t_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j} x_i + t_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\leq (1 - t_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j} x_i\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\qquad \text{car } f \text{ est convexe et } t_{n+1} \in [0; 1]
\end{aligned}$$

Mais :
$\forall i \in [\![1; n]\!] \ \dfrac{t_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j} \geq 0$
et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j} = 1$
On en déduit :

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} t_j\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j} f(x_i)\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)
\end{aligned}$$

3. Les côtés du parallélépipède sont c_1, c_2, c_3.

Son aire est $A = 2(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)$.
Son volume est $V = c_1c_2c_3$.
$V^2 = c_1c_2 \times c_1c_3 \times c_2c_3$
Donc $V^{2/3} \leq \dfrac{1}{3}(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3) = \dfrac{A}{6}$ avec égalité si, et seulement si, les trois côtés sont égaux.