1 Exemples de normes

Exercice 1 (*Centrale 2015, planche complète*)

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soient $(a, b) \in [0; 1]^2$.

Montrer :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_b(P) \leq 2N_a(P)$$

Exercice 2

Soit $N \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |x + ty| \end{cases}$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Dessiner $\mathcal{B}_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$.

Exercice 3 (*X 2014*)

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on pose $\|X\|_\infty = \max_{i \in [1;n]} |x_i|$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer : $\sup_{\|X\|_\infty=1} (\|AX\|_\infty) = \max_{i \in [1;n]} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$

2. On considère cette fois-ci : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Montrer : $\sup_{\|X\|_1=1} (\|AX\|_1) = \max_{j \in [1;n]} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$

Exercice 4 (*Centrale maths 1 2022*)

Pour tout polynôme à coefficients réels P et tout entier n , on pose $a_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n dt$.

Pour tout polynôme à coefficients réels P , on pose :

$$\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |P(t)|, \quad N_\infty(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n(P)|, \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2}$$

1. Justifier que ces quantités sont bien définies.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$, N_∞ et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Trouver des constantes α et β strictement positives telles que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_\infty(P) \leq \alpha N_2(P) \text{ et } N_2(P) \leq \beta \|P\|_\infty$$

4. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes entre elles.

Exercice 5 (*X 2020*)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0;1]) \text{ tq } f(0) = f(1) = 0\}$.

Soit $N \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \|f''\|_\infty \end{cases}$.

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Montrer :
 $\exists C \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall f \in E \quad \|f\|_\infty \leq CN(f)$
3. Montrer que $C = \frac{1}{8}$ est la meilleure constante possible.

Exercice 6 (*X 2021*)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E .

Pour tout $x \in E$, on pose $N(x) = \max_{1 \leq i \leq p} (|\langle e_i, x \rangle|)$.

1. Montrer que N est une norme.
2. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
 Déterminer une famille génératrice de E telle que $N = \|\cdot\|_\infty$.

On rappelait :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
 Déterminer une famille génératrice de E telle que $N = \|\cdot\|_1$.

On rappelait :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

4. On suppose $n = 2$.
 Déterminer les vecteurs x de E tels que $N(x) \leq 1$ et dessiner la sphère de centre 0 et de rayon 1.
5. Soit $S = \{x \in E \text{ tq } \|x\| = 1\}$.
 Montrer :
 $\forall x \in E \quad \|x\| = \sup_{s \in S} (|\langle s, x \rangle|)$.

1.1 Boules

Exercice 7 (Mines 2021)

Soit E un espace vectoriel.

Soit N_1 une norme sur E et B_1 la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour N_1 .

Soit N_2 une norme sur E et B_2 la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour N_2 .

Montrer :

$$N_1 = N_2 \iff B_1 = B_2$$

Exercice 8 (X 2021)

Soient a et $a' \in \mathbb{R}^n$ tels que les boules fermées $\mathcal{B}_f(a, 1)$ et $\mathcal{B}_f(a', 1)$ soient tangentes à la boule $\mathcal{B}_f(0, 1)$ aux points b et b' .

Montrer que les boules $\mathcal{B}_f(a, 1)$ et $\mathcal{B}_f(a', 1)$ sont disjointes si et seulement si $(Ob|Ob') < \frac{1}{2}$ et qu'elles sont tangentes si et seulement si le triangle Obb' est équilatéral.

2 Fonctions convexes

Exercice 9

Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in [-1; 1] \quad e^{\lambda x} \leq \cosh \lambda + x \sinh \lambda$$

On rappelle :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \cosh \lambda = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh \lambda = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$$

Exercice 10

Prouver :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Exercice 11

Soient $a, b \in [0; 1]$ tels que $a + b = 1$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad 1 + x^a y^b \leq (1 + x)^a (1 + y)^b$$

Exercice 12 (Ens 2018)

1. Montrer que le carré est l'unique façon d'optimiser la surface d'un rectangle de périmètre donné.
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer :

$$\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\alpha^n} \leq \exp \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\alpha} - n \right)$$

(b) En déduire :

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

(inégalité arithmético-géométrique)

3. Montrer que le cube est l'unique façon d'optimiser le volume d'un parallélépipède rectangle pour une aire donnée.