ANALYSE 2
PC*1
2024 - 2025
Chapitre 1 :
Normes, inégalités, convexité

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

Dans ce chapitre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque.

1 Normes sur un $\mathbb{K}$ ev

1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ ev.
On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in E\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$
- $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $\forall (x,y) \in E^2\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

On appelle $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé (en abrégé $\mathbb{K}$ evn) tout couple (E, N) où E est un $\mathbb{K}$ ev et N une norme sur E.
N est souvent notée $\|.\|$ et $N(x)$ est noté $\|x\|$.

1.2 Exemples

- Si E est un espace préhilbertien réel, la norme euclidienne est une norme sur E.
  Cas particuliers
  — $\|.\|_2 \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \end{cases}$ (pour $n = 1$ il s'agit de la valeur absolue $|.|$)
  — $\|.\|_2$ ou $N_2 \begin{cases} \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \left(\displaystyle\int_{[a;b]} f^2\right)^{1/2} \end{cases}$
  Remarque
  $\|.\|_2 \begin{cases} \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+ \\ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{1/2} \end{cases}$ (pour $n = 1$ il s'agit du module $|.|$) est une norme.
  Démonstration

— On a bien :
$\forall z \in \mathbb{C}^n \ \|z\|_2 \geq 0$

—

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall z \in \mathbb{R}^n\ \|\lambda z\|_2 &= \|(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n)\|_2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda z_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^2\ |z_i|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{1/2} \\ &= |\lambda|\ \|z\|_2\end{aligned}$$

— On a trivialement $\|0_{\mathbb{C}^n}\|_2 = 0$ mais il n'est pas indispensable de l'écrire car dès qu'on a :
$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in E\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$
on a :
$N(0_E) = N(0_{\mathbb{K}}\, 0_E) = |0_{\mathbb{K}}|\ N(0_E) = 0_{\mathbb{R}}$

Soit $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|z\|_2 = 0$.
$\sum_{i=1}^{n} \left(|z_i|^2 \geq 0\right) = 0$ donc :
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ \ |z_i|^2 = 0$
Donc : $\forall i \in [\![1;n]\!]\ z_i = 0$ ie $z = 0$

— Soient $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ et $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$.
Pour tout i compris entre 1 et n soient :
— a_i la partie réelle de u_i
— b_i la partie imaginaire de u_i
— c_i la partie réelle de v_i
— d_i la partie imaginaire de v_i

$$\begin{aligned}\|u+v\|_2 &= \|(u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i+v_i|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \left((a_i+c_i)^2 + (b_i+d_i)^2\right)\right)^{1/2} \\ &= N_2\left((a_1+c_1, b_1+d_1, a_2+c_2, b_2+d_2, \ldots, b_n+d_n)\right) \\ &= N_2\left((a_1, b_1, \ldots) + (c_1, d_1, \ldots)\right) \\ &\ \text{où } N_2 \text{ est la norme euclidienne canonique sur } \mathbb{R}^{2n} \\ &\leq N_2\left((a_1, b_1, \ldots)\right) + N_2\left((c_1, d_1, \ldots)\right) \\ &= \|u\|_2 + \|v\|_2\end{aligned}$$

- $\|.\|_1 \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i| \end{cases}$ est une norme.

Démonstration
— On a bien :
$\forall x \in \mathbb{R}^n\ \ \|x\|_1 \geq 0$

—

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \|\lambda x\|_1 &= \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda|\ |x_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\ \|x\|_1\end{aligned}$$

— Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_1 = 0$.
$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| \geq 0) = 0$ donc :
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ \ |x_i| = 0$
Donc : $\forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i = 0$ ie $x = 0$

— Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \|(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1\end{aligned}$$

On montre de même que :

— $\|.\|_1 \begin{cases} \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+ \\ (z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |z_i| \end{cases}$

— $\|.\|_1 \begin{cases} \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \int_{[a;b]} |f| \end{cases}$

— $\|.\|_1 \begin{cases} \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \int_{[a;b]} |f| \end{cases}$

sont des normes.

- $\|.\|_\infty \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{cases}$ est une norme.

Démonstration

— On a bien :
$\forall x \in \mathbb{R}^n\ \ \|x\|_\infty \geq 0$

—

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \|\lambda x\|_\infty &= \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_\infty \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = \max_{1 \leq i \leq n} (|\lambda|\,|x_i|) \\ &= |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \text{ car } |\lambda| \geq 0 \\ &= |\lambda|\ \|x\|_\infty\end{aligned}$$

Il est indispensable de préciser car $|\lambda| \geq 0$:
Si $\mu \leq 0$, alors $\max_{1 \leq i \leq n} (\mu\,|x_i|) = \mu \min_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$.

— Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = 0 &\iff \max_{1 \le i \le n} (|x_i| \in \mathbb{R}_+) = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ |x_i| = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

— Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1;n]\!]\ |x_i + y_i| &\le |x_i| + |y_i| \\ &\le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \text{ indépendant de } i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x+y\|_\infty &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_\infty \\ &= \max_{1 \le i \le n} (|x_i + y_i|) \\ &\le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

On montre de même que les applications suivantes sont des normes :

— $\|.\|_\infty \begin{cases} \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+ \\ (z_1, \dots, z_n) \mapsto \max\limits_{1 \le i \le n} |z_i| \end{cases}$

— $\|.\|_\infty \begin{cases} \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \max\limits_{x \in [a;b]} |f(x)| \end{cases}$ (bien définie : cf le cours de SUP).

Plus généralement si X est un ensemble non vide et si on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$, $\|.\|_\infty \begin{cases} \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \sup\limits_{x \in X} |f(x)| \end{cases}$ est une norme.

Si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(X, \mathbb{N})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées.

— $\|.\|_\infty \begin{cases} \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \max\limits_{x \in [a;b]} |f(x)| \end{cases}$

Plus généralement si X est un ensemble non vide et si on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-ev des applications bornées de X dans $\mathbb{C}$, $\|.\|_\infty \begin{cases} \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \sup\limits_{x \in X} |f(x)| \end{cases}$ est une norme.

1.3 Distance associée

Soit $(E, \|.\|)$ un evn.

On appelle distance associée à $\|.\|$ l'application :

$d \begin{cases} E \times E \to \mathbb{R}_+ \\ (x,y) \mapsto d(x,y) = \|y - x\| \end{cases}$

($d(x,y)$ s'appelle distance de x à y)

On a alors :

1. $\forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$ (en particulier $d(x,x) = 0$)
2. $\forall (x,y) \in E^2\ d(x,y) = d(y,x)$
   $d(x,y)$ se lit donc également "distance entre x et y".

3. $\forall (x,y,z) \in E^3 \; d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire)

Démonstration

1. trivial
2. $\forall (x,y) \in E^2 \; d(y,x) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(x,y)$
3. $$\begin{array}{rcl} \forall (x,y,z) \in E^3 \; d(x,y) & = & \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \\ & \leq & \|x-z\| + \|z-y\| \\ & \leq & d(x,z) + d(z,y) \end{array}$$

1.4 Boules et sphères

1.4.1 Définitions

Soient $(E, \|.\|)$ un evn et d la distance associée.
Soient $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- On appelle sphère de centre x_0 et de rayon r et on note $\mathcal{S}(x_0, r)$ l'ensemble :

$$\mathcal{S}(x_0, r) = \{x \in E \text{ tq } d(x_0, x) = r\} = \{x \in E \text{ tq } \|x - x_0\| = r\}$$

- On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r et on note $\mathcal{B}(x_0, r)$ l'ensemble :

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in E \text{ tq } d(x_0, x) < r\} = \{x \in E \text{ tq } \|x - x_0\| < r\}$$

- On appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r et on note $\mathcal{B}_f(x_0, r)$ l'ensemble :

$$\mathcal{B}_f(x_0, r) = \{x \in E \text{ tq } d(x_0, x) \leq r\} = \{x \in E \text{ tq } \|x - x_0\| \leq r\}$$

$\mathcal{B}(0_E, 1)$ s'appelle boule unité ouverte.
$\mathcal{B}_f(0_E, 1)$ s'appelle boule unité fermée.

1.4.2 Propriétés

- Pour tout $x_0 \in E$, $\mathcal{B}(x_0, 0) = \emptyset$ et $\mathcal{S}(x_0, 0) = \mathcal{B}_f(x_0, 0) = \{x_0\}$.
- Pour tout $x_0 \in E$ et tous r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}_+$ tq $r_1 < r_2$ on a :
  $\mathcal{B}(x_0, r_1) \subset \mathcal{B}_f(x_0, r_1) \subset \mathcal{B}(x_0, r_2)$
  les inclusions étant strictes (sauf dans le cas $E = \{0\}$).
- Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(x_0, r) & = & x_0 + \mathcal{S}(0_E, r) \text{ ie } \{x_0 + y, y \in \mathcal{S}(0_E, r)\} \\ & = & x_0 + r\mathcal{S}(0_E, 1) \text{ ie } \{x_0 + ry, y \in \mathcal{S}(0_E, 1)\} \end{array}$$

- Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(x_0, r) & = & x_0 + \mathcal{B}(0_E, r) \text{ ie } \{x_0 + y, y \in \mathcal{B}(0_E, r)\} \\ & = & x_0 + r\mathcal{B}(0_E, 1) \text{ ie } \{x_0 + ry, y \in \mathcal{B}(0_E, 1)\} \end{array}$$

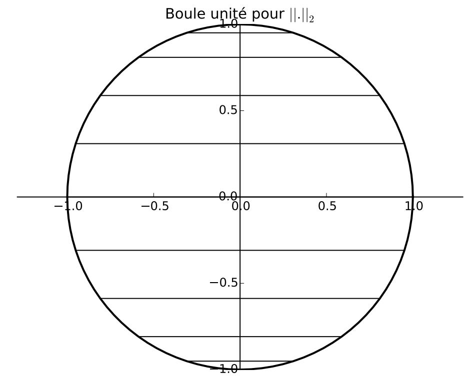
- Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$, on a :

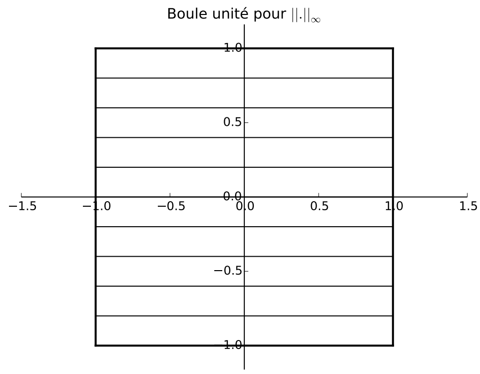
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}_f(x_0, r) & = & x_0 + \mathcal{B}_f(0_E, r) \text{ ie } \{x_0 + y, y \in \mathcal{B}_f(0_E, r)\} \\ & = & x_0 + r\mathcal{B}_f(0_E, 1) \text{ ie } \{x_0 + ry, y \in \mathcal{B}_f(0_E, 1)\} \end{array}$$

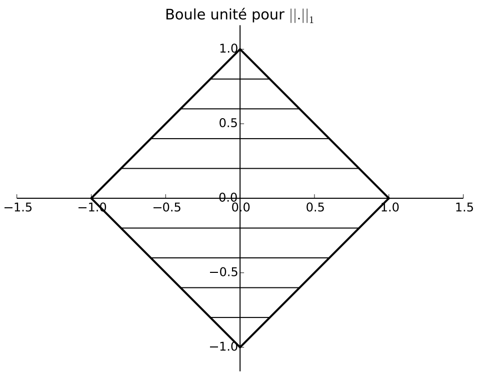
1.5 Exemples

- Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue :
  $\mathcal{S}(x_0, r) = \{x_0 - r; x_0 + r\}$ si $r > 0$, $\{x_0\}$ si $r = 0$.
  $\mathcal{B}(x_0, r) =]x_0 - r; x_0 + r[$
  $\mathcal{B}_f(x_0, r) = [x_0 - r; x_0 + r]$

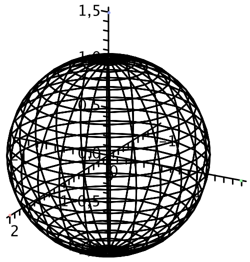
- Dans $\mathbb{R}^2$:



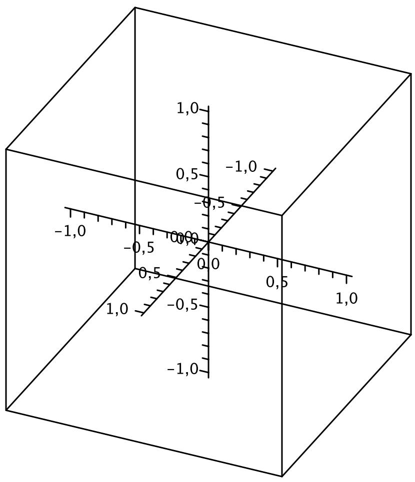




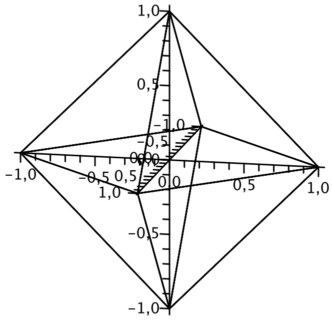
- Dans $\mathbb{R}^3$:
  — Pour la norme $\|.\|_2$:



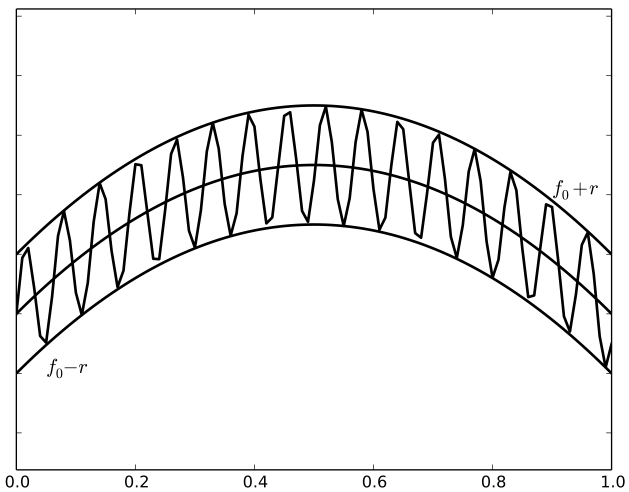
— Pour la norme $\|.\|_\infty$:



— Pour la norme $\|.\|_1$:



- Dans $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, on ne peut pas représenter les boules (l'espace est de dimension infinie) mais pour $\|.\|_\infty$, on peut faire un dessin.



Les éléments de $\mathcal{B}_f(f_0,r)$ sont les fonctions g telles que la courbe d'équation $y=g(x)$ soit toute entière contenue dans la partie du plan limitée par $y=f_0(x)+r$, $y=f_0(x)-r$ et $x\in[0;1]$.

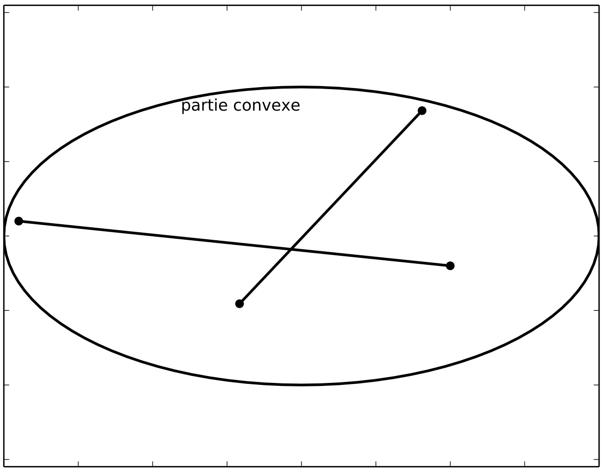
2 Parties convexes

2.1 Définition

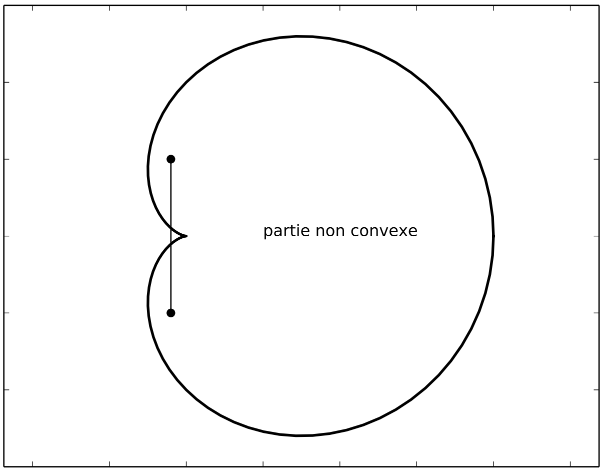
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et C une partie de E.
C est dite convexe lorsque, pour tous x et y de C, le segment $[x;y]$ est tout entier contenu dans C, i.e. :

$$C \text{ convexe } \iff \forall (x,y)\in C^2\ \forall t\in[0;1]\ (1-t)\,x+t\,y\in C$$

- **Un exemple de partie convexe du plan**



- **Un exemple de partie non convexe du plan**



2.2 Exemples

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  Tout sous-espace vectoriel de E est une partie convexe de E.

- **Exemple mentionné dans le programme**
  Soit $(E, \|.\|)$ un evn.
  Les boules (ouvertes ou fermées) de E sont des parties convexes de E.

  Démonstration

Soient x et $y \in \mathcal{B}(x_0, r)$.

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in [0;1]\ \|(1-t)\,x + t\,y - x_0\| & = & \|(1-t)\,x + t\,y - (1-t+t)\,x_0\| \\ & = & \|(1-t)\,(x-x_0)\| + \|t\,(y-x_0)\| \\ & \leq & |1-t|\ \|x-x_0\| + |t|\ \|y-x_0\| \\ & \leq & (1-t)\ \|x-x_0\| + t\ \|y-x_0\| \end{array}$$

$\|x - x_0\| < r$ et $\|y - x_0\| < r$. De plus t ou $1-t$ est *strictement* positif donc
$\|(1-t)\,x + t\,y - x_0\| < (1-t)r + tr = r$
Idem (en plus facile) pour les boules fermées.

3 Parties, suites et fonctions bornées

3.1 Parties bornées

Soit $(E, \|.\|)$ un evn.
Soit A une partie de E.
On dit que A est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tq pour tout $x \in A$ $\|x\| \leq M$.

Les sphères et les boules (ouvertes ou fermées) sont des exemples de parties bornées de E.
Démonstration
Soit $x \in \mathcal{S}(x_0, r)$.
$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| = r + \|x_0\| = M$
Idem pour les boules.

3.2 Fonctions bornées

Soit $(E, \|.\|)$ un evn.
Soit X un ensemble non vide.
Une application $f : X \to E$ est dite bornée si et seulement si $f(X)$ est une partie bornée de E.
On a donc :

$$f : X \to E \text{ bornée } \iff \exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall x \in X\ \ \|f(x)\| \leq M$$

Exemple
On prend $E = \mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne usuelle.
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) \mapsto (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta) \end{cases}$
f est bornée car $f(\mathbb{R}^2)$ est la sphère (euclidienne) de centre O et de rayon R.

3.3 Suites bornées

C'est le cas particulier où $X = \mathbb{N}$ ou plus généralement $X = [\![n_0; +\infty [\![$ dans la définition précédente :

Soit $(E, \|.\|)$ un evn.
Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à valeurs dans E.

$$(u_n)_{n \geq n_0} \text{ bornée } \iff \exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall n \geq n_0\ \ \|u_n\| \leq M$$

Exemple
On prend $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(n\,x) \end{cases}$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.