ALGEBRE LINEAIRE
PC*1
2024 - 2025
Chapitre 2 :
Diagonalisation : le point de vue géométrique

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Sous-espaces stables en dimension quelconque

1.1 Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Un sev F de E est dit stable par u si et seulement si $u(F) \subset F$
ie $\forall x \in F$ $u(x) \in F$ (On dit aussi que u stabilise F).
On peut alors définir un endomorphisme u_F de F par :
$$u_F \begin{cases} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$
u_F s'appelle l'endomorphisme de F induit par u.
Il ne faut pas le confondre avec la restriction de u à F :
$$u_{|F} \begin{cases} F \to E \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$
Ceci dit la confusion est souvent faite dans les sujets de concours.

1.2 Exemples

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.
$\{0\}$, E, $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.
En effet $u(\{0\}) = \{0\}$ et $u(E) = \operatorname{Im} u \subset E$.
Il est possible que $\{0\}$ et E soient les seuls sous-espaces stables : il suffit de considérer la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dans un plan vectoriel euclidien orienté (géométriquement clair : aucune droite n'est stable)

$u(\ker u) = \{0\} \subset \ker u$
L'endomorphisme de $\ker u$ induit par u est l'endomorphisme nul.
$\operatorname{Im} u \subset E$ donc $u(\operatorname{Im} u) \subset u(E) = \operatorname{Im} u$
Remarque :
$u(\operatorname{Im} u) = u(u(E)) = u^2(E) = \operatorname{Im} u^2$

1.3 Propriétés

Ces propriétés ne sont pas mentionnées dans le programme.

- **Intersection de sous-espaces stables**
  Soient E un $\mathbb{K}$ ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E stables par u.
  Alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est stable par u.

  Démonstration
  $\forall i_0 \in I \ \bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset F_{i_0}$
  Donc :
  $\forall i_0 \in I \ u\left(\bigcap\limits_{i\in I} F_i\right) \subset u\left(F_{i_0}\right) \subset F_{i_0}$
  D'où $u\left(\bigcap\limits_{i\in I} F_i\right) \subset \bigcap\limits_{i\in I} F_i$

- **Somme de sous-espaces stables**
  Soient E un $\mathbb{K}$ ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(F_i)_{i\in I}$ une famille finie non vide de sev de E stables par u.
  Alors $\sum\limits_{i\in I} F_i$ est stable par u.

  Démonstration
  Soit $x \in \sum\limits_{i\in I} F_i$.
  Il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E telle que :
  i $x = \sum\limits_{i\in I} x_i$
  ii $\forall i \in I \ x_i \in F_i$
  On a alors :
  $u(x) = u\left(\sum\limits_{i\in I} x_i\right) = \sum\limits_{i\in I} u(x_i)$
  $\forall i \in I \ u(x_i) \in F_i$ car F_i est stable par u.
  D'où $u(x) \in \sum\limits_{i\in I} F_i$.

1.4 Sous-espaces stables et commutation

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et u et v deux endomorphismes de E.
On suppose que u et v commutent ie $u \circ v = v \circ u$.
Alors $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

Démonstration
Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$.
$u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$
Donc $v(x) \in \operatorname{Ker}(u)$.
Donc $\operatorname{Ker}(u)$ est stable par v.

Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$.
$\exists x \in E$ tq $y = u(x)$.
$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \operatorname{Im}(u)$

Donc $\operatorname{Im}(u)$ est stable par v.

Remarque
Le programme ne mentionne que la stabilité du noyau.

1.5 Droites stables

Soient E un $\mathbb{K}$ ev non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit x un vecteur non nul de E.
La droite $\mathbb{K}x$ est stable par $u \iff u(x)$ est colinéaire à x
Démonstration

- $\Longrightarrow$
  $x \in \mathbb{K}x$ donc $u(x) \in u(\mathbb{K}x) \subset \mathbb{K}x$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$
- $\Longleftarrow$
  $u(x)$ est colinéaire à x avec x non nul donc :
  $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda x$
  Soit $y \in \mathbb{K}x$.
  $\exists \mu \in \mathbb{K}$ tq $y = \mu x$
  $u(y) = u(\mu x) = \mu u(x) = \mu.\, \lambda x = (\mu\lambda)x \in \mathbb{K}x$
  $\mathbb{K}x$ est bien stable par u.

2 Définitions des éléments propres

2.1 Vecteurs propres

Soient E un $\mathbb{K}$ ev (non nul) et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $x \in E$.
On dit que x est un vecteur propre pour u si et seulement si :

- $x \neq 0$
- $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda\, x$

Comme on suppose $x \neq 0$, si λ existe λ est unique. λ s'appelle la valeur propre de u associée à x.

Remarque
x est un vecteur propre pour $u \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{la droite } \mathbb{K}x \text{ est stable par } u \end{cases}$

2.2 Valeurs propres, sous-espaces propres

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On dit que λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas injectif.
On a immédiatement :
λ est valeur propre de $u \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E) \neq \{0\} \Leftrightarrow$ il existe x vecteur non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$

Si λ est une valeur propre de u, le sev de E : $\operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E)$ qu'on note $E_\lambda(u)$ s'appelle le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

On a : $E_\lambda(u) = \{x \in E \text{ tq } u(x) = \lambda\, x\}$.
Les éléments non nuls de $E_\lambda(u)$ sont des vecteurs propres pour u pour lesquels la valeur propre associée est λ : on les appelle vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

2.3 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev non nul, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u.
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u ie $u \circ v = v \circ u$.
Alors $E_\lambda(u)$, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ, est stable par v.

Démonstration
Soit $x \in E_\lambda(u)$: $u(x) = \lambda x$
$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$
Donc $v(x) \in \operatorname{Ker}(u - \lambda id_E) = E_\lambda(u)$.
$E_\lambda(u)$ est stable par v.

2.4 Cas de la dimension finie

On sait que si $v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie on a :
v injective $\Longleftrightarrow$ v bijective
On en déduit :
Proposition
Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie non nulle, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a :
λ valeur propre de $u \Longleftrightarrow u - \lambda Id_E$ n'est pas bijective (ou n'est pas inversible : c'est la même chose)

Définition
Soit E un $\mathbb{K}$ ev *de dimension finie* non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u et est noté $\mathrm{Sp}(u)$.

Remarque
En dimension infinie on a :
λ valeur propre de $u \Longrightarrow u - \lambda Id_E$ n'est pas bijective (car λ valeur propre de $u \Leftrightarrow u - \lambda Id_E$ n'est pas injective)
Par contre on peut avoir $u - \lambda Id_E$ qui n'est pas bijective et λ qui n'est pas valeur propre.
Exemple : X
Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ défini par : $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
Déterminer l'image, le noyau et les valeurs propres de u.

Correction
Il est à peu près clair que u est bien défini et que c'est un endomorphisme de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$.
Soit $g \in \operatorname{Im}(u)$.
$\exists f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ tq $\forall x \in [0;1]$ $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
Donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et $g(0) = 0$.

Réciproquement, soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ telle que $g(0) = 0$.

Soit $f = g' \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0;1]\ u(f)(x) &= \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t = g(x) - g(0) \quad (g\ \mathcal{C}^1) \\ &= g(x) - 0 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Donc $g = u(g') \in \mathrm{Im}\,(u)$.
D'où :

$$\mathrm{Im}\,(u) = \{g \in \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R}) \text{ tq } g(0) = 0\}$$

Soit $f \in \mathrm{Ker}\,(u)$.
$\forall x \in [0;1]\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
En dérivant, ce qui est licite :
$\forall x \in [0;1]\ f(x) = 0$
Donc $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$.
$u = u - 0\mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective mais 0 n'est pas valeur propre de u.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
$\forall x \in [0;1]\ f(x) = \dfrac{1}{\lambda} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut dériver :
$\forall x \in [0;1]\ f'(x) = \dfrac{1}{\lambda} f(x)$
ie f est solution sur $[0;1]$ de $y' = \dfrac{1}{\lambda} y$
Donc :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in [0;1]\ f(x) = C\,\mathrm{e}^{x/\lambda}$
Mais :

$$\begin{aligned} f(0) &= C \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

Donc $f = 0$.
u n' a aucune valeur propre.

2.5 Exemples

- **Proposition**
  Soient E un $\mathbb{K}$-ev non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} 0 \text{ est valeur propre de } u &\iff u \text{ n'est pas injective} \\ &\iff u \text{ n'est pas bijective si } \dim E < +\infty \end{aligned}$$

- Soient E un $\mathbb{K}$-ev non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  1 est valeur propre de $u \iff$ il existe au moins un vecteur invariant non nul
  Dans ce cas $E_1(u) = \mathrm{Ker}\,(u - Id_E)$ est l'ensemble des vecteurs invariants.

- Soient E un $\mathbb{K}$-ev non nul et $u = \lambda Id_E$ l'homothétie de E de rapport λ.
Tout vecteur non nul de E est propre, la valeur propre associée étant λ.
On en déduit que u a une et une seule valeur propre : λ.

Récapitulons les éléments propres de u :
— valeurs propres : λ
— sous-espaces propres : $E_\lambda(u) = E$
— vecteurs propres : les vecteurs non nuls

Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que tout vecteur non nul est propre alors u est une homothétie.
Démonstration
On a donc :
$\forall x \in E \setminus \{0\}\ \exists! \lambda_x \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda_x x$
Soient x et $y \in E \setminus \{0\}$.
— **Premier cas** y et x colinéaires
$\exists \mu \in \mathbb{K}$ tq $y = \mu x$
$u(y) = \lambda_y y = u(\mu x) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y$
Or $y \neq 0$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.

— **Deuxième cas** (x, y) est libre
$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$
$u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$
Donc $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
On a donc : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\forall x \in E \setminus \{0\}\ u(x) = \lambda x$
Le cas $x = 0$ est clair donc on a $u = \lambda Id_E$.

- **Eléments propres d'un projecteur**
Soient E un espace vectoriel (de dimension quelconque, finie ou infinie) et F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \oplus G$.
Soit p la projection sur F parallèlement à G.
Si $F = \{0\}$, $p = 0$ et si $F = E$, $p = Id_E$: dans ces deux cas, p est également une homothétie et ce qui précède s'applique.
On suppose donc F différent de $\{0\}$ et de E et on cherche les éléments propres de p.
$\forall x \in E\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G$ tq $x = x_F + x_G$
$p \begin{cases} E \to E \\ x = x_F + x_G \mapsto x_F \end{cases}$
Soit $x = x_F + x_G \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} p(x) = \lambda x &\iff (x_F \in F) + (0 \in G) = (\lambda x_F \in F) + (\lambda x_G \in G) \\ &\iff \begin{cases} x_F = \lambda x_F \\ 0 = \lambda x_G \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (1-\lambda) x_F = 0 \\ \lambda x_G = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

— **Premier cas :** $\lambda \neq 0, 1$

$$\begin{aligned} p(x)=\lambda x &\iff \begin{cases} x_F=0 \\ x_G=0 \end{cases} \\ &\iff x=0 \end{aligned}$$

$\ker(p-\lambda \mathrm{Id}_E)=\{0\}$
λ n'est pas valeur propre de p.

— **Deuxième cas :** $\lambda=0$
$p(x)=0 \iff x_F=0 \iff x=x_G\in G$
0 est valeur propre de p et $E_0(p)=\mathrm{Ker}\,(p)=G$

— **Troisième cas :** $\lambda=1$
$p(x)=x \iff x_G=0 \iff x=x_F\in F$
1 est valeur propre de p et $E_1(p)=F$

- **Eléments propres d'une symétrie**
Soient E un espace vectoriel (de dimension quelconque, finie ou infinie) et F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E=F\oplus G$.
Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Si $F=\{0\}$, $s=-Id_E$ et si $F=E$, $s=Id_E$: dans ces deux cas, s est également une homothétie et ce qui précède s'applique.
On suppose donc F différent de $\{0\}$ et de E et on cherche les éléments propres de s.
$s\begin{cases} E\to E \\ x=x_F+x_G\mapsto x_F-x_G \end{cases}$
Soit $x=x_F+x_G\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} s(x)=\lambda x &\iff (x_F\in F)+(-x_G\in G)=(\lambda x_F\in F)+(\lambda x_G\in G) \\ &\iff \begin{cases} x_F=\lambda x_F \\ -x_G=\lambda x_G \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (1-\lambda)x_F=0 \\ (1+\lambda)x_G=0 \end{cases} \end{aligned}$$

— **Premier cas :** $\lambda\neq -1,1$
$\ker(s-\lambda \mathrm{Id}_E)=\{0\}$
λ n'est pas valeur propre de s.

— **Deuxième cas :** $\lambda=1$
$s(x)=x \iff x_G=0 \iff x=x_F\in F$
1 est valeur propre de s et $E_1(s)=F$

— **Troisième cas :** $\lambda=-1$
$s(x)=-x \iff x_F=0 \iff x=x_G\in G$
-1 est valeur propre de s et $E_{-1}(s)=G$

- **Eléments propres de la dérivation des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$**
Soient $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u: f\mapsto f'$.
u est un endomorphisme de E.
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(f)=\lambda f &\iff f'=\lambda f \\ &\iff \exists C\in\mathbb{R} \text{ tq } \forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=C\,\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

Soit $f_\lambda \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x} \end{cases}$.
$f_\lambda \neq 0$ et $u(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ donc :
— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de u.
— $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ E_\lambda(u) = \mathbb{R} f_\lambda$

- **Eléments propres de la dérivation des polynômes**
Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $v : P \mapsto P'$.
v est un endomorphisme de E.
f_λ n'est polynomiale que si $\lambda = 0$.
On peut préférer une solution auto-contenue.
— **Premier cas :** $\lambda = 0$
$v(P) = 0 \iff P' = 0 \iff P$ est un polynôme constant.
0 est valeur propre de v et $E_0(v) = \mathbb{R}_0[X]$
— **Deuxième cas :** $\lambda \neq 0$
Soit $P \in \operatorname{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_E)$
$P' = \lambda P$
λP est de même degré que P.
P' est de degré strictement inférieur au degré de P sauf si $P = 0$
Donc $P = 0$
Donc λ n'est pas valeur propre de v.

- **Eléments propres du shift à gauche**
Soient $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{K}$-ev des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $L \begin{cases} E \to E \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$.
En d'autres termes L envoie la suite $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ sur la suite $(x_1, x_2, \dots)$.
L est un endomorphisme de E.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

$$\begin{aligned} L(x) = \lambda x &\iff (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = \lambda x_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ x_n = \lambda^n x_0 \end{aligned}$$

On note $x_\lambda = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(x_0 = (1, 0, \dots) \neq 0)$.
— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de L.
— $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ E_\lambda(L) = \mathbb{R} x_\lambda$

- **Eléments propres du shift à droite**
Soient $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{K}$-ev des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et
$R \begin{cases} E \to E \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ définie par } \begin{cases} y_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ y_n = x_{n-1} \end{cases} \end{cases}$.
En d'autres termes R envoie la suite $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ sur la suite $(0, x_0, x_1, x_2, \dots)$.
R est un endomorphisme de E.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
$R(x) = \lambda x \iff \begin{cases} 0 = \lambda x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$

— **Premier cas :** $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} R(x) = \lambda x &\iff \forall n \in \mathbb{N}^* \ x_{n-1} = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N} \ x_n = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

0 n'est pas valeur propre de R.

— **Deuxième cas :** $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} R(x) = \lambda x &\iff \begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ x_n = \dfrac{x_{n-1}}{\lambda} \end{cases} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N} \ x_n = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

λ n'est pas valeur propre de R.

- **Centrale 2015** (Maths 1 : 30 minutes sans préparation)
  Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par : $u(P) = X(X-2)P' - nXP$
  Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
  Déterminer les éléments propres de u.
  u est-il diagonalisable ?
  Correction
  La linéarité de u ne pose pas de problème :

$$\begin{aligned} \forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ u(\lambda P + \mu Q) &= X(X-2)(\lambda P + \mu Q)' - nX(\lambda P + \mu Q) \\ &= X(X-2)(\lambda P' + \mu Q') - nX(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda X(X-2)P' + \mu X(X-2)Q' - \lambda nXP - \mu nXQ \\ &= \lambda(X(X-2)P' - nXP) + \mu(X(X-2)Q' - nXQ) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.
$nXP = na_n X^{n+1} + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
$X(X-2)P' = (X^2 - 2X)(na_n X^{n-1} + R_1)$ avec R_1 de degré inférieur ou égal à $n-2$.
Donc $X(X-2)P' = na_n X^{n+1} + R_2$ avec $R_2 \in \mathbb{R}_n[X]$.
On a bien $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} u(P) = \lambda P &\iff X(X-2)P' = (nX + \lambda)P \\ &\iff \forall x > 2 \ x(x-2)P'(x) = (nx + \lambda)P(x) \text{ car }]2; +\infty[\text{ est infini} \end{aligned}$$

On cherche donc les solutions polynômiales de degré inférieur ou égal à n sur $]2; +\infty[$ de $(E_\lambda) : x(x-2)P'(x) = (nx + \lambda)P(x)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{nx + \lambda}{x(x-2)} \, \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{n}{x-2} + \frac{\lambda}{x(x-2)} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{n}{x-2} + \frac{\lambda}{2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \right) \right) \mathrm{d}x \\ &= \left(n + \frac{\lambda}{2} \right) \ln(x-2) - \frac{\lambda}{2} \ln(x) \end{aligned}$$

La solution générale de (E_λ) est donc :

$$y(x) = A(x-2)^{n+\lambda/2} \times x^{-\lambda/2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \exists (k,l) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } \begin{cases} n + \dfrac{\lambda}{2} = k \\ -\dfrac{\lambda}{2} = l \\ k + l \leq n \end{cases} \\
&\iff \exists (k,l) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } \begin{cases} \lambda = -2l \\ n - l = k \\ n - l + l \leq n \end{cases} \\
&\iff \exists l \in [\![0;n]\!] \text{ tq } \lambda = -2l
\end{aligned}$$

$\mathrm{Sp}(u) = \{-2l, l \in [\![0;n]\!]\}$
$\forall l \in [\![0;n]\!]\ E_{-2l}(u) = \mathbb{R}(X-2)^{n-l}X^l$
$\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ et u a $n+1$ valeurs propres distinctes donc u est diagonalisable.

- Soient $E = \mathbb{C}_n[X]$ et $u \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto (1+X^2)P'(X) - nXP(X) \end{cases}$.

  1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
  2. Noyau de u ?
  3. Valeurs propres et vecteurs propres de u ?

  Correction
  L'utilisation d'équations différentielles est ici délicate : il faudrait identifier les $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels $(1+x^2)^{n/2} \exp(\lambda \arctan x)$ est polynômiale.

  1. La linéarité de u ne pose pas de problème :

  $$\begin{aligned}
  \forall (P,Q) \in \mathbb{C}_n[X]^2\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\ u(\lambda P + \mu Q) &= (1+X^2)(\lambda P + \mu Q)' - nX(\lambda P + \mu Q) \\
  &= (1+X^2)(\lambda P' + \mu Q') - nX(\lambda P + \mu Q) \\
  &= \lambda(1+X^2)P' + \mu(1+X^2)Q' - \lambda nXP - \mu nXQ \\
  &= \lambda((1+X^2)P' - nXP) + \mu((1+X^2)Q' - nXQ) \\
  &= \lambda u(P) + \mu u(Q)
  \end{aligned}$$

  Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$.
  $nXP = na_nX^{n+1} + Q$ avec $Q \in \mathbb{C}_n[X]$.
  $(1+X^2)P' = (1+X^2)(na_nX^{n-1} + R_1)$ avec R_1 de degré inférieur ou égal à $n-2$.
  Donc $(1+X^2)P' = na_nX^{n+1} + R_2$ avec $R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$.
  On a bien $u(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

  2. Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(u)$.
  Supposons P non constant.
  Soit z une racine de P et α sa multiplicité.
  z est racine de multiplicité au moins α de $nXP(X)$ donc de $(1+X^2)P'(X)$ mais z

est racine de multiplicité exactement $\alpha - 1$ de $P'(X)$ donc z est racine de $X^2 + 1$.
D'où $z \in \{-i; i\}$.
D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, $P(X) = C(X-i)^\alpha (X+i)^\beta$ avec $C \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ non tous deux nuls et $\alpha + \beta \leq n$.
Si P est constant, il est de cette forme avec $\alpha = \beta = 0$ (en autorisant $C = 0$ pour récupérer le polynôme nul).
On a donc une condition nécessaire pour que P soit dans le noyau.
Réciproquement, on calcule $u\left((X-i)^\alpha (X+i)^\beta\right)$.

$$\begin{aligned}
u\left((X-i)^\alpha (X+i)^\beta\right) &= (X^2+1)\left(\alpha (X-i)^{\alpha-1}(X+i)^\beta + \beta (X-i)^\alpha (X+i)^{\beta-1}\right) \\
&\quad -nX(X-i)^\alpha (X+i)^\beta \\
&= \alpha (X-i)^\alpha (X+i)^{\beta+1} + \beta (X-i)^{\alpha+1}(X+i)^\beta - nX(X-i)^\alpha (X+i)^\beta \\
&= (X-i)^\alpha (X+i)^\beta \left(\alpha(X+i) + \beta(X-i) - nX\right) \\
&= (X-i)^\alpha (X+i)^\beta \left((\alpha+\beta-n)X + (\alpha-\beta)i\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$(X-i)^\alpha (X+i)^\beta \in \operatorname{Ker}(u) \iff \begin{cases} \alpha + \beta = n \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Si n est impair alors $\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$.
Si n est pair alors $\operatorname{Ker}(u) = \mathbb{C}(X-i)^{n/2}(X+i)^{n/2} = \mathbb{C}(X^2+1)^{n/2}$.

3. Soit λ une valeur propre de u et P un vecteur propre associé.
Supposons que P n'est pas constant.
Soit z une racine de P et α sa multiplicité.
z est racine de multiplicité au moins α de $(nX+\lambda)P(X)$ donc de $(1+X^2)P'(X)$ mais z est racine de multiplicité exactement $\alpha - 1$ de $P'(X)$ donc z est racine de $X^2 + 1$.
D'où $z \in \{-i; i\}$.
D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, $P(X) = C(X-i)^\alpha (X+i)^\beta$ avec $C \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ et $\alpha + \beta \leq n$.
Si P est constant, il est de cette forme avec $\alpha = \beta = 0$.
A ce stade, on ne sait rien de λ.
Si P est propre, il est de la forme $P(X) = C(X-i)^\alpha (X+i)^\beta$ avec $C \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ et $\alpha + \beta \leq n$.
Il est temps de passer à la réciproque.
D'après la question précédente :
$u\left((X-i)^\alpha (X+i)^\beta\right) = \left((\alpha+\beta-n)X + (\alpha-\beta)i\right)(X-i)^\alpha (X+i)^\beta$
Si $\alpha + \beta - n \neq 0$, $u\left((X-i)^\alpha (X+i)^\beta\right)$ n'est pas colinéaire à $(X-i)^\alpha (X+i)^\beta$
A ce stade, on ne sait rien de λ.
Si P est propre, il est de la forme $P(X) = C(X-i)^\alpha (X+i)^{n-\alpha}$ avec $C \neq 0$, $\alpha \in [\![0; n]\!]$.
Toujours d'après la question précédente :
$u\left((X-i)^\alpha (X+i)^{n-\alpha}\right) = i(2\alpha - n)(X-i)^\alpha (X+i)^{n-\alpha}$
donc $(X-i)^\alpha (X+i)^{n-\alpha}$ est propre pour la valeur propre $i(2\alpha - n)$.
Les nombres $i(2\alpha - n)$ étant deux à deux distincts, on peut récapituler :

i $\operatorname{Sp}(u) = \{(2k-n)i,\ k \in [\![0; n]\!]\}$

ii $\forall k \in [\![0; n]\!]$ $E_{(2k-n)i}(u) = \mathbb{C}(X-i)^k (X+i)^{n-k}$

iii u est diagonalisable : u a $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$.

- Soit $E = \mathcal{C}^0([0;+\infty[,\mathbb{R})$.
Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f)$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in]0;+\infty[\; T(f)(x) & = & \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ T(f)(0) & = & f(0) \end{array}$$

Vérifier que $T \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Correction
Soit $f \in E$.
La continuité de $T(f)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est claire.
$\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est une primitive de f valable sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\begin{array}{rcl} T(f)(x) & = & \dfrac{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x} = \dfrac{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t}{x} \\ & & \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{\text{def de la dérivée}} f(0) = T(f)(0) \end{array}$$

Donc $T(f)$ est continue en 0.
Donc $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
T est bien une application de E dans E.

Linéarité de T :
Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} \forall x > 0\; T(\lambda f + \mu g)(x) & = & \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t \\ & = & \dfrac{1}{x}\left(\lambda \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ & = & \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x) \\ T(\lambda f + \mu g)(0) & = & (\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) \\ & = & \lambda T(f)(0) + \mu T(g)(0) \end{array}$$

Donc $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$.
On a bien $T \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On résoud $T(f) = \lambda f$ ie $\begin{cases} \lambda f(0) = f(0) \\ \forall x > 0 \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda x f(x) \; (1) \end{cases}$.
On veut dériver [1] mais a priori f n'est que continue.
On suppose donc $T(f) = \lambda f$.

1. raisonner par équivalence est donc délicat

— **Premier cas :** $\lambda = 0$

$$\forall x > 0 \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } 0f(0) = f(0)$$

On dérive la première partie :
$\forall x > 0\ f(x) = 0$
La seconde donne $f(0) = 0$.
Donc $f = 0$.
0 n'est pas valeur propre de T.

On suppose donc $\lambda \neq 0$.
$\forall x > 0\ f(x) = \dfrac{1}{\lambda x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$: f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
On peut donc dériver (1) :
$\forall x > 0\ f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x)$
f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda x} y$.
$\exists C > 0$ tq $\forall x > 0\ f(x) = Cx^{(1-\lambda)/\lambda}$
De plus $f(0) = \lambda f(0)$.

— **Deuxième cas :** $\lambda = 1$
$f \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \Longrightarrow f = Cte$
Réciproquement si $f = C$:
$\forall x > 0\ T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x C\,\mathrm{d}t = C = f(x)$
et $T(f)(0) = f(0)$
Donc $T(f) = f$.

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } T \text{ et } E_1(T) = \{Cte\}}$$

Désormais, on suppose $\lambda \neq 0, 1$.
$f \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id}) \Longrightarrow \begin{cases} \exists C > 0 \text{ tq } \forall x > 0\ f(x) = Cx^{(1-\lambda)/\lambda} \\ f(0) = 0 \end{cases}$
$\dfrac{1-\lambda}{\lambda} > 0 \Longleftrightarrow \lambda \in]0;1[$ (faire un tableau avec le signe de λ, $1 - \lambda$ et $(1 - \lambda)/\lambda$)

— **Troisième cas :** $\lambda \in]-\infty;0[\cup]1;\infty[$
$\dfrac{1-\lambda}{\lambda} < 0$
f devant être continue en 0, $C = 0$.
λ n'est pas valeur propre de T.

— **Quatrième cas :** $\lambda \in]0;1[$
On note $f_\lambda \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{(1-\lambda)/\lambda} \end{cases}$.
$f_\lambda \in E$
$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id}) \subset \mathbb{R} f_\lambda$.
Réciproquement :

$$\begin{array}{rcl} \forall x > 0\ T(f_\lambda)(x) &=& \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^{1/\lambda - 1}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{t^{1/\lambda}}{1/\lambda}\right]_0^x = \lambda x^{1/\lambda - 1} \\ &=& \lambda f_\lambda(x) \\ T(f_\lambda)(0) &=& f_\lambda(0) = 0 = \lambda\, 0 \\ &=& \lambda f_\lambda(0) \end{array}$$

Donc $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } T \text{ et } E_\lambda(T) = \mathbb{R} f_\lambda}$$

3 Définition des endomorphismes diagonalisables

3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit u un endomorphisme de E.
On dit que u est diagonalisable (en abrégé DZ) si, et seulement si, il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

3.2 Remarque

La définition du programme est :

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale

Ces deux définitions sont équivalentes car si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on a immédiatement :
$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) = D$ est diagonale $\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1; n]\!]$ e_i est propre pour u, la valeur propre associée étant $d_{i,i}$

3.3 Exemples

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Toute homothétie $u = \lambda Id_E$ de E est diagonalisable.
- Tout projecteur p de E est diagonalisable.
- Toute symétrie s de E est diagonalisable.

3.4 Remarque

Il existe des endomorphismes qui ne sont pas diagonalisables :
par exemple prenons $E = \mathbb{R}_n[X]$, avec $n \geq 1$, et D la dérivation.
D n'est pas diagonalisable.

Se posent alors naturellement les questions suivantes :

- Comment décider si un endomorphisme est diagonalisable ? Peut-on trouver des CNS pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable ?
- Y a-t-il un moyen algorithmique de traiter ces questions ? Peut-on remplacer les raisonnements géométriques de 2.2 par des calculs, matriciels notamment ?
- Que faire d'un endomorphisme qui n'est pas diagonalisable ?

4 Famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

4.1 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev non nul (de dimension finie ou infinie) et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soient λ une valeur propre de u et $x \in E_\lambda(u)$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u^n(x) = \lambda^n x$.

Démonstration
On raisonne par récurrence sur n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u^n(x) = \lambda^n x$.
$u^0(x) = x$ par convention.
$\lambda^0 x = x$ par convention.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
$\mathcal{P}(1)$ est vraie par hypothèse.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie ($n \geq 1$).
$u^{n+1}(x) = u(u^n(x)) = u(\lambda^n x) = \lambda^n u(x) = \lambda^n . \lambda x = \lambda^{n+1} x$
D'où le résultat.

4.2 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev non nul (de dimension finie ou infinie), $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs propres de u associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes.
Alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Démonstration
Soit λ_i la valeur propre associée à x_i.
Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0$
On applique $u, u^2, \ldots, u^{p-1}$.
$\forall k \in [\![0; p-1]\!]$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i \lambda_i^k x_i = 0$
Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \mu_i P(\lambda_i) x_i &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{p-1} a_k \lambda_i^k \mu_i x_i = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i \lambda_i^k x_i = 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On prend alors $P = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (X - \lambda_k)$ de sorte que $P(\lambda_i) \neq 0$ et que $P(\lambda_k) = 0$ pour $k \neq i$.
On a :
$0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) \mu_k x_k = P(\lambda_i) \mu_i x_i$
$P(\lambda_i) \neq 0$ et $x_i \neq 0$ donc $\mu_i = 0$.

4.3 Majoration du nombre de valeurs propres en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E.
Le spectre de u est fini et son cardinal est majoré par n.

C'est une conséquence directe de ce qui précède.
Les exemples du paragraphe 2.2.4 montrent qu'en dimension infinie un endomorphisme peut avoir une infinité de valeurs propres.

4.4 Une condition suffisante de diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E.
Si le cardinal du spectre de u est n alors u est diagonalisable.

En effet, u a n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et on peut choisir pour chacune d'elles un vecteur propre x_i.
D'après 4.2, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre. Comme c'est une famille libre de n vecteurs de E qui est de dimension n, c'est une base de E. Elle est formée de vecteurs propres de u.

La condition est suffisante, elle n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple des homothéties, des projections ou des symétries.

5 Sommes de sous-espaces propres

5.1 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev non nul, $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un entier ≥ 2.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de u.
Alors la somme $E_{\lambda_1}(u) + \cdots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe.

Démonstration
Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E_{\lambda_1}(u) \times \cdots \times E_{\lambda_p}(u)$ tel que $0 = x_1 + \cdots + x_p$.
Supposons les x_i non tous nuls.
Soit $I = \{i \in [\![1; p]\!] \text{ tq } x_i \neq 0\}$.
$I \neq \emptyset$, $(x_i)_{i \in I}$ est libre et pourtant $\displaystyle\sum_{i \in I} 1\, x_i = 0$.
C'est absurde.
Donc les x_i sont tous nuls et la somme est directe.

5.1.1 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E.
On a :
u diagonalisable $\iff \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$

Démonstration

- $\Longrightarrow$ On suppose u diagonalisable.
  Il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ $(n = \dim E)$ une base de E formée de vecteurs propres de u.
  Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, e_i appartient à l'un des sous-espaces propres donc à leur somme.

D'où $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \subset E$

D'où $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

- On suppose $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$.
  Une base de E adaptée à cette décomposition est formée de vecteurs propres de u.
  u est bien diagonalisable.

5.2 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E. On a :

$$u \text{ diagonalisable } \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) = \dim E$$

Démonstration

- $\Longrightarrow$ On suppose u diagonalisable.
  $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et il suffit de prendre les dimensions.
- $\Longleftarrow$ $\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) = \dim E$ et $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ est un sev de E donc $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$.
  u est bien diagonalisable.

5.3 Exemple

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\varphi \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ g \mapsto f \circ g \end{cases}$.

On va montrer :

φ diagonalisable $\iff f$ diagonalisable

Démonstration

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $g \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \varphi(g) = \lambda g &\iff f \circ g = \lambda g \iff \forall x \in E \ f(g(x)) = \lambda g(x) \\ &\iff \forall x \in E \ g(x) \in E_\lambda(f) \\ &\iff \mathrm{Im}\,(g) \subset E_\lambda(f) \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E, E_\lambda(f))$ $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \dim E_\lambda(f)$ (cf l'exercice qui figure au paragraphe 1.4.7).

On en déduit :

- $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(f)$
- $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(f) \ \dim E_\lambda(\varphi) = \dim E \ \dim E_\lambda(f)$

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ DZ} &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)} \dim E_\lambda(\varphi) = \dim \mathcal{L}(E) \\
&\iff \dim E \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = (\dim E)^2 \\
&\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E \\
&\iff f \text{ DZ}
\end{aligned}$$

Cet exercice est très classique et a encore été posé aux Mines en 2021 sous la forme suivante :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit u un endomorphisme de E.
Soit $\varphi_u \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ v \mapsto u \circ v \end{cases}$.
Montrer que si u est diagonalisable alors φ_u est diagonalisable.

6 Deux exercices

Exercice 1 *(X 2010)*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont-ils en somme directe ? Et si f est diagonalisable ?

Exercice 2 *(X 2015)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.

7 Polynômes d'un endomorphisme

7.1 Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
(p n'est pas forcément le degré de P c'est à dire qu'on peut avoir $a_p = 0$, cela ne pose pas de problème de définition et cela facilite les calculs)
Par définition $P(u)$ est l'endomorphisme de E défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k$$

(avec la convention usuelle : $u^0 = Id_E$)

7.2 Propriétés

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $u \in \mathcal{L}(E)$
On a pour tous P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et pour tout λ dans $\mathbb{K}$:

- $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$
- $(\lambda P)(u) = \lambda P(u)$
- $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$

Démonstration

On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$, a_p ou b_p pouvant être nul.

On a alors : $P + Q = \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k$. Donc :

$$\begin{aligned}
(P+Q)(u) &= \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) u^k = \sum_{k=0}^{p} (a_k u^k + b_k u^k) \\
&= \sum_{k=0}^{p} a_k u^k + \sum_{k=0}^{p} b_k u^k = P(u) + Q(u)
\end{aligned}$$

$\lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$ donc : $(\lambda P)(u) = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k u^k = \lambda \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = \lambda P(u)$

$PQ = \sum_{k=0}^{2p} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{\substack{l_1 + l_2 = k \\ 0 \leq l_1, l_2 \leq p}} a_{l_1} b_{l_2}$ donc :

$(PQ)(u) = \sum_{k=0}^{2p} c_k u^k$

$$\begin{aligned}
P(u) \circ Q(u) &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k u^k \right) \circ \left(\sum_{k=0}^{p} b_k u^k \right) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{p} a_k b_l u^{k+l} \\
&= \sum_{i=0}^{2p} \left(\sum_{\substack{k+l=i \\ 0 \leq k, l \leq p}} a_k b_l \right) u^i \quad \text{(on regroupe suivant les puissances de } u\text{)} \\
&= (PQ)(u)
\end{aligned}$$

7.3 Remarque fondamentale

Deux polynômes d'un même endomorphisme commutent toujours :
Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On a pour tous P et Q dans $\mathbb{K}[X]$:
$P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$
En effet :
$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u)$ car le produit est commutatif dans $\mathbb{K}[X]$.
D'où $P(u) \circ Q(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$

En particulier si P est un polynôme, u et $P(u)$ commutent et d'après 1.4, le noyau de $P(u)$ est stable par u.

Rappel

Dès que E est de dimension (finie ou infinie) supérieure ou égale à 2, $\circ$ n'est pas commutative dans $\mathcal{L}(E)$.

7.4 Polynôme annulateur d'un endomorphisme

7.4.1 Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle polynôme annulateur de u tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.

7.4.2 Exemples

Soit E un $\mathbb{K}$ ev.
Soit u un endomorphisme de E.
u est une symétrie si, et seulement si, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de u.
u est une projection si, et seulement si, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de u.
Attention, si u est une projection $X^2 - X$ n'est pas le seul polynôme annulateur non nul de u : $X^3 - X$ est aussi un polynôme annulateur de u.
Plus généralement, d'après le paragraphe précédent, l'application $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{cases}$ est linéaire.
Son noyau est l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

7.4.3 Existence d'un polynôme annulateur

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et u un endomorphisme de E.
Si E est de dimension finie, u a un polynôme annulateur non nul.
En effet la famille $\left(Id_E, u, \ldots, u^{n^2}\right)$ est une famille de $n^2 + 1$ éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n^2. C'est donc une famille liée et il existe $(a_0, \ldots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n^2} a_i u^i = 0$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$ est un polynôme annulateur non nul de u.

Par contre, si E est de dimension infinie il est tout à fait possible que u n'ait pas de polynôme annulateur.
On prend $E = \mathbb{K}[X]$ et u la dérivation des polynômes.
Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme non nul.

$$P(u) \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ Q \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k u^k(Q) = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^{(k)} \end{cases}$$

P est non nul donc $\{k \in [\![0; p]\!] \text{ tq } a_k \neq 0\} \neq \emptyset$.
Comme c'est un ensemble fini, il a un plus petit élément qu'on note v.
On a donc :
$\forall Q \in \mathbb{K}[X] \ P(u)(Q) = \displaystyle\sum_{k=v}^{p} a_k Q^{(k)}$ avec $a_v \neq 0$.
Si Q est de degré inférieur ou égal à $v - 1$ alors $P(u)(Q) = 0$.
Si Q est de degré d supérieur ou égal à v alors $Q^{(v)}$ est de degré $d - v$, $Q^{(v+1)}$ est nul ou de degré $d - v - 1$...
Comme a_v est non nul, $P(u)(Q)$ est de degré $d - v$ donc est non nul.
$P(u)$ n'est donc pas l'endomorphisme nul.

7.4.4 Application au calcul de l'inverse d'un automorphisme de E

Soient E un $\mathbb{K}$ ev non nul et u un endomorphisme de E.

- Si on trouve un polynôme P tel que $P(0) \neq 0$ et $P(u) = 0$ alors u est inversible :
  le polynôme P s'écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_0 \neq 0$.
  $P(u) = 0$ donc $\sum_{k=0}^{p} a_k u^k = 0$.
  $p = 0$ n'est pas possible : on aurait $0 = P(u) = a_0 id_E$ avec $a_0 \neq 0$.
  On a donc : $\sum_{k=1}^{p} a_k u^k = -a_0 id_E$
  D'où :
  $u \circ \left(-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{p} a_k u^{k-1}\right) = \left(-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{p} a_k u^{k-1}\right) \circ u = id_E$
  (une seule égalité suffit si E est de dimension finie, mais les deux sont indispensables en dimension finie). Donc u est inversible.
  On peut présenter le même calcul différemment :
  Il existe un polynôme Q tel que $P(X) = XQ(X) + a_0$:
  il suffit de prendre $Q(X) = \sum_{k=1}^{p} a_k u^{k-1} = \sum_{l=0}^{p-1} a_{l+1} X^l$ mais on peut aussi parler de la division euclidienne de P par X.
  $0 = P(u) = u \circ Q(u) + a_0 id_E$ donc :
  $u \circ \left(-\frac{1}{a_0}Q(u)\right) = \left(-\frac{1}{a_0}Q(u)\right) \circ u = id_E$
- Si on sait que u est un automorphisme de E et si on trouve un polynôme annulateur non nul de u, on peut exprimer u^{-1} comme combinaison linéaire des puissances de u :
  On suppose que $P(u) = 0$ avec $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme non nul.
  P est non nul donc $\{k \in [\![0;p]\!] \text{ tq } a_k \neq 0\} \neq \emptyset$.
  Comme c'est un ensemble fini, il a un plus petit élément qu'on note v.
  On a donc : $P(X) = X^v R(X)$ avec $R(0) = a_v \neq 0$.
  $0 = P(u) = u^v R(u)$ avec u automorphisme de E donc $R(u) = 0$ ce qui nous ramène au point précédent.

7.4.5 Application au calcul des puissances d'un endomorphisme de E

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et u un endomorphisme de E.
On suppose connu un polynôme annulateur non nul de E.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que n est supérieur ou égal au degré de p (sinon le calcul ci-dessous n'apporte rien).
On effectue la division euclidienne de X^n par P :
$\exists!(Q_n, R_n) \in \mathbb{K}[X]$ tq $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ avec le degré de R_n strictement inférieur à celui de P
$u^n = P(u)Q_n(u) + R_n(u) = R_n(u)$

Se pose alors la question de la détermination de R_n.
On va supposer P scindé.
C'est forcément le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. (Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, il faut passer par les

matrices : on sait multiplier une matrice réelle par un complexe, pas un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).
Soit $z_1, \dots, z_p$ les racines de P (deux à deux distinctes).
Pour tout k compris entre 1 et p, on note α_i la multiplicité de z_i.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_i = d$ le degré de P.
$\forall k \in [\![1;p]\!]\ z_k^n = P(z_k)Q_n(z_k) + R_n(z_k) = R_n(z_k)$
Cela fait p équations pour déterminer les d coefficients de R_n.
Le cas le plus simple est donc celui où $p = d$ ie celui où les racines de P sont toutes simples.
Si on note $c_0, \dots, c_{d-1}$ les coefficients de R_n, on a :

$$\begin{cases} c_0 + c_1 z_1 + \dots + c_{d-1} z_1^{d-1} = z_1^n \\ \vdots \\ c_0 + c_1 z_d + \dots + c_{d-1} z_d^{d-1} = z_d^n \end{cases}$$

ou encore matriciellement $\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{d-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & z_d & \dots & z_d^{d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ z_d^n \end{pmatrix}$

On reconnaît une matrice de Vandermonde. Elle est inversible car les z_k sont deux à deux distincts.
Pour des exemples où d est petit, on obtient les coefficients de R_n en résolvant le système par la méthode du pivot.

D'un point de vue plus théorique, on a $\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{d-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & z_d & \dots & z_d^{d-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ z_d^n \end{pmatrix}$.

La base canonique n'est pas la seule base de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$.

Pour tout $k \in [\![1;d]\!]$, soit $L_k = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{d} (X - z_l)}{\displaystyle\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{d} (z_k - z_l)}$.

On a vu dans le cours sur l'interpolation de Lagrange que $(L_1, \dots, L_d)$ est une base de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ avec :
$\forall Q \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\ Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} Q(z_k) L_k$
On a donc ici :
$R_n(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} R_n(z_k) L_k(X) = \sum_{k=1}^{d} z_k^n L_k(X)$
Revenons au cas général.
z_k est racine de multiplicité au moins α_k du polynôme $Q_n P$ donc :
$\forall l \in [\![0;\alpha_k - 1]\!]\ (Q_n P)^{(l)}(z_k) = 0$
et on a :
$\forall l \in [\![0;\alpha_k - 1]\!]\ n(n-1)\dots(n-l+1) z_k^{n-l} = R_n^{(l)}(z_k)$
Si on note $c_0, \dots, c_{d-1}$ les coefficients de R_n, on a :

$$\begin{cases} c_0+c_1z_1+\cdots+c_{d-1}z_1^{d-1}=z_1^n \\ \vdots \\ c_{\alpha_1}\alpha_1!+\cdots+c_{d-1}(d-1)\dots(d-1-\alpha_1+1)z_1^{d-1-\alpha_1}=n\dots(n-\alpha_1+1)z_1^{n-\alpha_1} \\ \vdots \\ c_0+c_1z_p+\cdots+c_{d-1}z_p^{d-1}=z_p^n \\ \vdots \\ c_{\alpha_1}\alpha_1!+\cdots+c_{d-1}(d-1)\dots(d-1-\alpha_p+1)z_p^{d-1-\alpha_p}=n\dots(n-\alpha_p+1)z_p^{n-\alpha_p} \end{cases}$$

ou encore matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & \dots & \dots & z_1^{d-1} \\ \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1! & \dots & (d-1)\dots(d-1-\alpha_1+1)z_1^{d-1-\alpha_1} \\ \vdots \\ 1 & z_p & \dots & \dots & \dots & z_p^{d-1} \\ \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_p! & \dots & (d-1)\dots(d-1-\alpha_p+1)z_p^{d-1-\alpha_p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{d-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ n\dots(n-\alpha_1+1)z_1^{n-\alpha_1+1} \\ \vdots \\ z_p^n \\ \vdots \\ n\dots(n-\alpha_p+1)z_p^{n-\alpha_p}\end{pmatrix}$$

La matrice carrée, notée A, est inversible :

Soit $Y=\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{d-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{d-1,1}(\mathbb{K})$ tq $AY=0$.

Soit $Q=\sum_{l=0}^{d-1}c_lX^l$.

Pour tout $k\in[\![1;p]\!]$, z_k est racine de multiplicité supérieure ou égale à α_k de Q.

On a donc au moins $\sum_{k=1}^{p}\alpha_k=d$ racines de Q de degré inférieur ou égal à $d-1$. On en déduit que Q est le polynôme nul. Ses coefficients sont donc tous nuls et X est nulle.

Pour des exemples où d est petit, on obtient les coefficients de R_n en résolvant le système par la méthode du pivot.

D'un point de vue plus théorique, on a :

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{d-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & \dots & \dots & z_1^{d-1} \\ \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1! & \dots & (d-1)\dots(d-1-\alpha_1+1)z_1^{d-1-\alpha_1} \\ \vdots \\ 1 & z_p & \dots & \dots & \dots & z_p^{d-1} \\ \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_p! & \dots & (d-1)\dots(d-1-\alpha_p+1)z_p^{d-1-\alpha_p} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ n\dots(n-\alpha_1+1)z_1^{n-\alpha_1+1} \\ \vdots \\ z_p^n \\ \vdots \\ n\dots(n-\alpha_p+1)z_p^{n-\alpha_p}\end{pmatrix}$$

7.4.6 Lien avec les éléments propres d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $u\in\mathcal{L}(E)$.

- Soient $P\in\mathbb{K}[X]$,$\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in E$ tq $u(x)=\lambda x$.
  On a : $P(u)(x)=P(\lambda)x$

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  Pour toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.
  Alors toute valeur propre de u est racine de P.

Démonstration

- On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$.
  $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k$ donc :

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k u^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{p} (a_k \lambda^k x) = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k\right).x \\ &= P(\lambda).\,x \end{aligned}$$

- Soient λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé.
  D'après ce qui précède, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
  Comme x *est non nul* $P(\lambda)$ est bien une valeur propre de $P(u)$.

  Remarque
  La réciproque est fausse :
  on prend $u = -Id_E$ et $P = X^2$.
  $P(u) = u^2 = Id_E$ donc $P(1) = 1$ est valeur propre de $P(u)$.
  Mais 1 n'est pas valeur propre de u.

- Soit λ une valeur propre de u.
  D'après ce qui précède, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u) = 0$ donc $P(\lambda) = 0$.

7.5 Une CNS de diagonalisabilité

7.5.1 Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$.
u est diagonalisable si,et seulement si, il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

Démonstration
On suppose que u est diagonalisable.
Soit $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.
P est scindé à racines simples.
u est diagonalisable donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
Soit $x \in E$.

Il existe une famille de vecteurs de E : $(x_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}$ tq $x = \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in E_\lambda(u)$.

$$\begin{array}{rcl} P(u)(x) & = & P(u)\left(\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} x_\lambda\right) \\ & = & \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} P(u)(x_\lambda) \text{ par linéarité de } P(u) \\ & = & \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} P(\lambda)x_\lambda \text{ cf 7.4.6} \\ & = & \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} 0\,x_\lambda \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc $P(u) = 0$.

On suppose que u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples :
Il existe $a_p \in \mathbb{K}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que $P = a_p \prod\limits_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$ annule u :
$a_p(u - \lambda_1 id_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p id_E) = 0$.
(Comme vu plus haut, p ne peut pas être nul)
a_p étant un *scalaire* non nul, on peut simplifier par a_p. On supposera désormais que $a_p = 1$ et $P = \prod\limits_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$.
D'après le paragraphe 7.4.6, le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.
Quitte à renuméroter les racines de P, on peut donc supposer que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1; \dots; \lambda_q\}$ et écrire, en posant $Q(X) = \prod\limits_{k=1}^{q}(X - \lambda_k)$ et en tenant compte de la commutativité des polynômes en u :
$(u - \lambda_{q+1} id_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p id_E) \circ Q(u) = 0$
Pour k compris entre $q+1$ et p, λ_k n'est pas valeur propre de u et E est de dimension finie donc $u - \lambda_k id_E$ st inversible.
Donc $(u - \lambda_{q+1} id_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p id_E)$ est inversible et $Q(u) = 0$.
q ne peut pas être nul, car sinon on aurait $(u - \lambda_{q+1} id_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p id_E) = 0$ et $(u - \lambda_{q+1} id_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p id_E)$ inversible.
On introduit alors les polynômes de Lagrange :
$\forall k \in [\![1; q]\!]\ L_k = \dfrac{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{q}(X - \lambda_l)}{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{q}(\lambda_k - \lambda_l)}$.
D'après le cours sur l'interpolation de Lagrange :
$\sum\limits_{k=1}^{q} L_k(X) = 1$
On en déduit :
$\sum\limits_{k=1}^{q} L_k(u) = id_E$
Soit $x \in E$.

Pour tout k compris entre 1 et q, soit $x_k = L_k(u)(x)$.
$(u - \lambda_k id_E)(x_k) = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{q}(\lambda_k - \lambda_l)} Q(u)(x) = 0$
Donc $x_k \in E_{\lambda_k}(u)$.
Donc $x = id_E(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{q} L_k(u)\right)(x) = \sum\limits_{k=1}^{q} x_k$ appartient à la somme des sous-espaces propres de u.
Donc E est inclus dans la somme des sous-espaces propres de u.
L'inclusion inverse est toujours vraie donc E est la somme des sous-espaces propres de u.
Donc u est diagonalisable.

Remarque
La démonstration met en évidence la proposition suivante, qui figure explicitement au programme :
Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$.
u est diagonalisable si,et seulement si, il admet $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ comme polynôme annulateur.

7.5.2 Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension non nulle et stable par u.
u_F, l'endomorphisme de u induit par F, est diagonalisable.

En effet, u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Ce polynôme annule également u_F.

Exercice 3 *(CCP 2012)*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.

1. Montrer que le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
2. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

7.5.3 Projecteurs spectraux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres (2 à 2 distinctes).

- **Le point de vue géométrique**
  u est diagonalisable donc $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.

  Pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, soit p_i le projecteur sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p} E_{\lambda_j}(u)$.

  Si $i \neq j$, $\mathrm{Im}\,(p_j) = E_{\lambda_j}(u) \subset \mathrm{Ker}\,(p_i)$ donc $p_i \circ p_j = 0$
  On a donc :
  $\forall (i,j) \in [\![1; p]\!]^2\ p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$

Soit $x \in E$.
$\exists!(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tq $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.
p_i est l'application qui à x associe x_i.
$\forall n \in \mathbb{N}\ u^n(x) = \sum_{i=1}^{p} u^n(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n x_i$ cf 4.1
On a donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n p_i$

- **Le point de vue algébrique**

Le polynôme $P = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ annule u.

Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, soit $L_i = \dfrac{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p} (X - \lambda_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p} (\lambda_i - \lambda_j)} \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ et $p_i = L_i(u) \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $i \in [\![1;p]\!]$.
$\forall j \in [\![1;p]\!]\ L_i(\lambda_j)^2 = \delta_{i,j}^2 = \delta_{i,j} = L_i(\lambda_j)$ car $\delta_{i,j} = 0$ ou 1.
Donc le polynôme P divise le polynôme $L_i^2 - L_i$: $L_i^2 - L_i = Q_i P$ avec $Q_i \in \mathbb{K}[X]$.
On en déduit $p_i^2 - p_i = L_i^2(u) - L_i(u) = Q_i(u) \circ P(u) = 0$: p_i est un projecteur.
Soit $j \in [\![1;p]\!] \setminus \{i\}$.
Les racines de L_iL_j sont λ_i et λ_j simples et λ_k, $k \in [\![1;p]\!] \setminus \{i;j\}$ doubles.
Donc P divise L_iL_j et $p_i \circ p_j = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\exists!(Q_n, R_n) \in \mathbb{K}[X]$ tq $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ avec le degré de R_n strictement inférieur à celui de P
$\forall i \in [\![1;p]\!]\ \lambda_i^n = P(\lambda_i)Q_n(\lambda_i) + R_n(\lambda_i) = R_n(\lambda_i)$
$u^n = P(u)Q_n(u) + R_n(u) = R_n(u)$
$R_n \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ donc d'après le cours sur l'interpolation de Lagrange :
$R_n = \sum_{i=1}^{p} R_n(\lambda_i) L_i$
On en déduit $u^n = R_n(u) = \sum_{i=1}^{p} R_n(\lambda_i) p_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n p_i$