ALGEBRE LINEAIRE
2024-2025
Correction des exercices du deuxième chapitre du cours

Exercice 1 *(X 2010)*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont-ils en somme directe ? Et si f est diagonalisable ?

Correction
En général, le noyau et l'image de f ne sont pas supplémentaires.
Par exemple si $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 1$ et si f est la dérivation alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ne sont pas supplémentaires.
Par contre si f est diagonalisable alors le noyau et l'image de f sont supplémentaires :
on considère $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f.
On note λ_i la valeur propre de f associée à e_i.
On peut s'arranger pour $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ et $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n \neq 0$.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(\lambda_{p+1}e_{p+1}, \ldots, \lambda_n e_n) \\
&= \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)
\end{aligned}$$

On en déduit que le noyau de f est de dimension p.
Mais on a trivialement $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \subset \mathrm{Ker}(f)$ avec $(e_1, \ldots, e_p)$ libre donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
$\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont bien supplémentaires.

Exercice 2 *(X 2015)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Correction
Compte tenu de la formule du rang, c'est le même exercice que le précédent.

Exercice 3 *(CCP 2012)*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.

1. Montrer que le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
2. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

Correction

1. f^2 est un projecteur donc $f^4 = (f^2)^2 = f^2$.
   Le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de f.
   Le spectre de f est inclus dans l'ensemble de ses racines donc le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
2. On suppose f diagonalisable.
   Le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ annule f.
   Il en est de même de ses multiples.
   Mais $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$ donc $X^3 - X = \prod_{\lambda \in \{-1,0,1\}} (X - \lambda)$ est un multiple de $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$.
   On en déduit que $X^3 - X$ annule f ie $f^3 = f$.

   Réciproquement, on suppose $f^3 = f$.
   f est annulé par $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ qui est scindé à racines simples donc f est diagonalisable.