ALGEBRE LINEAIRE
TD
2024-2025
Chapitre 2

941

1 Recherche d'éléments propres

Exercice 1 *(Centrale, ancien mais classique)*

Soit $\theta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\theta(P)(X) = P(X) - P(X-1)$. Déterminer le noyau, l'image et les valeurs propres de θ.

Exercice 2 *(Centrale 2003, 2018, 2023)*

$A = X^4 - 1$, $B = X(X^3 - 1)$

$h \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to ? \\ P \mapsto R \end{cases}$ où R est le reste de la division euclidienne de AP par B.

Montrer que h est un endomorphisme.

Déterminer son noyau, ses valeurs propres, ses vecteurs propres.

Exercice 3 *(Centrale 2005)*

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}[X]$ défini par :

$f(P) = X\,P' + P(1)$

Exercice 4 *(Centrale 2018)*

Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $\varphi(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\varphi(f)$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note toujours $\varphi(f)$ ce prolongement.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   Etudier la parité de $\varphi(f)$.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

2 Propriétés des éléments propres

Exercice 5 *(Centrale 2016)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $u,v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si λ est valeur propre de uv alors λ est également valeur propre de vu.
2. On suppose $\lambda \neq 0$ et λ valeur propre de uv et de vu.
   Montrer que $E_\lambda(uv)$ et $E_\lambda(vu)$ ont la même dimension.

3 Diagonalisation : le point de vue géométrique

Exercice 6 *(CCP 2022)*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 2u + id_E = 0$ et $u \neq id_E$.

1. Montrer que $u \in GL(E)$ et déterminer u^{-1}.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(u - id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de u.
   L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Soient f et g deux projecteurs. Montrer :
   $f \circ g = g \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f)$
4. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $v^2 = 0$.
   Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(v)$ dans E.
   Soit p_1 la projection sur $\mathrm{Im}\,(v)$ parallèlement à S.
   On pose $q_1 = p_1 - v$.
   Montrer que q_1 est un projecteur et que $\mathrm{Im}\,(q_1) = \mathrm{Im}\,(p_1)$.
5. Montrer qu'il existe p et q deux projecteurs tels que $u = p + q$ et $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(q)$.

Exercice 7 *(CCP 2011)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(-4)X + P(6) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 8 *(X 2018)*

Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n + 1$.
Soit φ_A l'application qui à $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de XP par A.
Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer ses valeurs propres.
Remarque
J'ajoute la question suivante :
Donner une CNS, portant sur A, pour que φ_A soit diagonalisable.

Exercice 9 *(X 2019)*

Soit $u \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to ? \\ P \mapsto X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right) \end{cases}$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. u est-elle diagonalisable ?
3. Eléments propres de u ?

Exercice 10 *(CCP 2022)*

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k \end{cases}$

1. Montrer que cette application est un endomorphisme.
2. Déterminer $\varphi \circ \varphi$.
3. φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 11 *(Mines 2021)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ f(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$

1. Déterminer l'image et le noyau de f.
2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non nulle.
Soient f, u, v 3 endomorphismes de E tels que :
$f = u + 2v$
$f^2 = u + 4v$
$f^3 = u + 8v$
Montrer que f est diagonalisable.
Montrer que u et v sont des projections.

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit σ une bijection de $[\![1; n]\!]$ sur lui-même.
Soit $f\sigma \in \mathcal{L}(E)$ défini par :
$\forall k \in [\![1; n]\!]\ f_\sigma(e_k) = e_{\sigma(k)}$
Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 14

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\varphi \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ g \mapsto g \circ f \end{cases}$.
Montrer :
φ diagonalisable $\iff f$ diagonalisable

Exercice 15

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit f un automorphisme de E.
   Montrer :
   f diagonalisable $\iff f^2$ diagonalisable.
2. Soit f un endomorphisme de E.
   Montrer :
   f diagonalisable $\iff \begin{cases} f^2 \text{ diagonalisable} \\ \mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f) \end{cases}$

Exercice 16 *(X 2019)*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Montrer :
$\big(\exists v \in E$ tq $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ est une base de $E\big) \iff \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(v)) = n$