ALGEBRE LINEAIRE
TD
2024-2025
Chapitre 2
Correction

941

1 Recherche d'éléments propres

Exercice 1 *(Centrale, ancien mais classique)*

Soit $\theta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\theta(P)(X) = P(X) - P(X-1)$. Déterminer le noyau, l'image et les valeurs propres de θ.
Correction :
Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(\theta)$.
$P(X) = P(X-1)$.
Par une récurrence triviale, on a
$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) = P(0)$
Donc $Q(X) = P(X) - P(0)$ a une infinité de racines.
D'où $Q = 0$ ie $P(X) = P(0)$
Donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$.
La réciproque est triviale.
$\ker(\theta) = \mathbb{R}_0[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
P s'écrit $P = a_n X^n + (deg \leq n-1)$ avec a_n éventuellement nul.

$$\begin{aligned}
\theta(P)(X) &= a_n X^n + (deg \leq n-1) - a_n(X-1)^n - (deg \leq n-1) \\
&= a_n\Big(X^n - (X^n - nX^{n-1} + deg \leq n-2)\Big) + deg \leq n-1 \\
&= a_n(nX^{n-1} + deg \leq n-2) + deg \leq n-1
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}\,(\theta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
De plus :

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Im}\,(\theta) &= \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathbb{R}_0[X] \\
&= n + 1 - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}\,(\theta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\theta(P) = \lambda P$.

$\theta(P)$ est de degré inférieur ou égal à $deg(P) - 1$ en adaptant ce qui précède. (le degré de $\theta(P)$ vaut $-\infty$ si $P = Cte$).
Donc $\lambda = 0$ ou $P = 0$.
Donc $\mathrm{Sp}(\theta) \subset \{0\}$.
Réciproquement 0 est bien valeur propre de θ car $\ker(\theta) = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}$.
Finalement : $\mathrm{Sp}(\theta) = \{0\}$.

Exercice 2 *(Centrale 2003, 2018)*

$A = X^4 - 1$, $B = X(X^3 - 1)$
$h \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to ? \\ P \mapsto R \end{cases}$ où R est le reste de la division euclidienne de AP par B.
Montrer que h est un endomorphisme.
Déterminer son noyau, ses valeurs propres, ses vecteurs propres.
Correction :
Par définition de la division euclidienne :
$\forall P \in \mathbb{R}_3[X]\ deg(h(P)) < deg(B) = 4$
$\forall P \in \mathbb{R}_3[X]\ h(P) \in \mathbb{R}_3[X]$
h est une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.

Montrons que h est linéaire.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$AP = P_1B + h(P)$
$AQ = Q_1B + h(Q)$
$A(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P_1 + \mu Q_1)B + \lambda h(P) + \mu h(Q)$ avec $\lambda h(P) + \mu h(Q) \in \mathbb{R}_3[X]$
Donc $h(\lambda P + \mu Q) = \lambda h(P) + \mu h(Q)$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $h(P) = 0$.
$\exists P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tq $AP = P_1B$
Or $B(0) = B(i) = B(j) = B(j^2) = 0$
Donc $A(0)P(0) = A(1)P(1) = A(j)P(j) = A(j^2)P(j^2) = 0$
$A(0) \neq 0$, $A(j) = j^4 - 1 = j - 1 \neq 0$ et $A(j^2) = \overline{A(j)} \neq 0$ mais $A(1) = 0$.
Donc $P(0) = P(j) = P(j^2) = 0$.
Donc $X(X^2 + X + 1)$ divise P (a priori dans $\mathbb{C}$ mais à cause de la division euclidienne dans $\mathbb{R}$).
Réciproquement, si P est de la forme $P = \alpha X(X^2 + X + 1)$:

$$\begin{aligned} AP &= (X^4 - 1)\alpha X(X^2 + X + 1) = (X^3 + X^2 + X + 1)(X - 1)\alpha X(X^2 + X + 1) \\ &= \alpha(X^3 + X^2 + X + 1)X(X - 1)(X^2 + X + 1) = \alpha(X^3 + X^2 + X + 1)X(X^3 - 1) \\ &= QB + 0 \end{aligned}$$

Donc $h(P) = 0$ et finalement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, h = \mathbb{R}X(X^2 + X + 1)}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $P \in \mathrm{Ker}\,(h - \lambda Id)$.
$\exists P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tq $(X^4 - 1)P(X) = P_1(X)X(X^3 - 1) + \lambda P(X)$
On évalue en 1 : $P(1) = 0$ (car $\lambda \neq 0$)
On évalue en j : $(j - 1)P(j) = \lambda P(j)$ et $(\lambda + 1 - j)P(j) = 0$
$\lambda \in \mathbb{R}$ donc $\lambda + 1 - j \notin \mathbb{R}$ donc $\lambda + 1 - j \neq 0$

Donc $P(j) = 0$.
P est à coefficients réels donc $P(j^2) = 0$.
On évalue en 0 : $-P(0) = \lambda P(0)$ et $(\lambda + 1)P(0) = 0$.
Si $\lambda \neq -1$ alors $P(0) = P(1) = P(j) = P(j^2) = 0$ et $P = 0$ ($deg(P) \leq 3$). λ n'est pas valeur propre de h.
Si $\lambda = -1$ alors $\operatorname{Ker}(h + \mathrm{Id}) \subset \mathbb{R}(X^3 - 1)$.
$A(X^3 - 1) + X^3 - 1 = (X^3 - 1)(X^4 - 1 + 1) = X^3 B(X)$
Donc $A(X^3 - 1) = X^3 B(X) + \big(-(X^3 - 1)\big)$ avec $deg(-(X^3 - 1)) < 4$.
Donc $h(X^3 - 1) = -(X^3 - 1)$.
Donc -1 est valeur propre de h et $E_{-1}(h) = \mathbb{R}(X^3 - 1)$.
Finalement :

- $\mathrm{Sp}(h) = \{-1; 0\}$
- $E_0(h) = \operatorname{Ker}(h) = \mathbb{R}X(X^2 + X + 1)$
- $E_{-1}(h) = \operatorname{Ker}(h + \mathrm{Id}) = \mathbb{R}(X^3 - 1)$

Exercice 3 *(Centrale 2005)*

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}[X]$ défini par :
$f(P) = X\,P' + P(1)$

Correction
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
Il est commode d'écrire $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ avec $a_k = 0$ APCR.

$f(P) = X \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^k$

$$\begin{aligned} f(P) = \lambda P &\iff \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^k = \lambda a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda a_k X^k \\ &\iff \begin{cases} \lambda a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \\ \forall k \in \mathbb{N}^*\ (\lambda - k) a_k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- **Premier cas :** $\lambda \notin \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} f(P) = \lambda P &\iff \begin{cases} \lambda a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \\ \forall k \in \mathbb{N}^*\ a_k = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\lambda - 1) a_0 = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*\ a_k = 0 \end{cases} \qquad \lambda \neq 1 \text{ car } \lambda \notin \mathbb{N}^* \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

- **Deuxième cas :** $\lambda = d \in \mathbb{N}^*$
$f(P) = \lambda P \iff \begin{cases} d a_0 = a_0 + a_d \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{d\}\ a_k = 0 \end{cases}$

— **Premier sous-cas :** $d = 1$
$f(P) = P \iff \begin{cases} a_d = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \ a_k = 0 \end{cases}$
1 est valeur propre de f et $E_1(f) = \mathbb{R}_0[X]$

— **Deuxième sous-cas :** $d \geq 2$
$f(P) = P \iff \begin{cases} a_d = (d-1)a_0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{d\} \ a_k = 0 \end{cases}$
d est valeur propre de f et $E_d(f) = \mathbb{R}\left((d-1)X^d + 1\right)$

On peut unifier les expressions des vecteurs propres : $\left((1-1)X^1 + 1\right) = 1$.

Autre méthode
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(P) = \lambda P$.
$\forall x > 0 \ xP'(x) - \lambda P(x) = -P(1)$
La solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de $xy' - \lambda y = -C$ où C est une constante est :
$y(x) = ax^\lambda + \dfrac{C}{\lambda}$ lorsque $\lambda \neq 0$.
On examine d'abord le cas $\lambda = 0$.
$\forall x > 0 \ P'(x) = \dfrac{P(1)}{x}$
P' ne peut être polynômiale que si $P(1) = 0$.
P' est alors nul et P est constant (sur $\mathbb{R}_+^*$).
On en déduit que P est le polynôme nul et que $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.
On suppose désormais $\lambda \neq 0$.
$\forall x > 0 \ P(x) = ax^\lambda + \dfrac{P(1)}{\lambda}$
Si λ n'est pas entier positif et est valeur propre alors $P = \dfrac{P(1)}{\lambda}$ est constant.
Réciproquement, si P est constant $f(P) = P$ donc :
Si λ est valeur propre alors $\lambda \in \mathbb{N}^*$
$\lambda = 1$ est valeur propre et $E_1(f) = \mathbb{R}_0[X]$.
Supposons $\lambda \in [\![2; +\infty[\![$.
$\forall x > 0 \ P(x) = ax^\lambda + \dfrac{P(1)}{\lambda}$
En $x = 1$, $P(1) = a + \dfrac{P(1)}{\lambda}$ et $P(1) = \dfrac{a\lambda}{\lambda - 1}$
Donc $P(X)$ est colinéaire à $(\lambda - 1)X^\lambda + 1$.
Il n'y a plus qu'à faire la réciproque.

Exercice 4 *(Centrale 2018)*

Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $\varphi(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\varphi(f)$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note toujours $\varphi(f)$ ce prolongement.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   Etudier la parité de $\varphi(f)$.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Correction

1. Soit F la primitive de f nulle en 0.
   F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}^* \ \varphi(f)(x) = \dfrac{F(x) - F(-x)}{2x}$
$\varphi(f)$ est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
De plus :
$\varphi(f)(x) = \dfrac{F(0) + xF'(0) + o(x) - (F(0) - xF'(0) + o(x))}{2x} = \dfrac{2xf(0) + o(x)}{2x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} f(0)$
$\varphi(f)$ est bien prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(f)(0) = f(0)$.

2. On vient de montrer que φ va de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Passons à la linéarité :
Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^* \ \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
&= \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x)
\end{aligned}$$

Par continuité :
$\forall x \in \mathbb{R} \ \varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x)$
et $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$
φ est bien linéaire.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \ \varphi(f)(-x) = \dfrac{1}{-2x}\displaystyle\int_{x}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(f)(x)$
Par continuité :
$\forall x \in \mathbb{R} \ \varphi(f)(-x) = \varphi(f)(x)$
Quelque soit la fonction f, $\varphi(f)$ est paire.

3. On commence par le cas de 0.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\varphi(f) = 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}^* \ F(x) = F(-x)$
On dérive :
$\forall x \in \mathbb{R}^* \ f(x) = -f(-x)$
et par continuité :
$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = -f(-x)$
f est donc impaire.
Réciproquement, on suppose f impaire.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^* \ \varphi(f)(-x) &= \frac{1}{-2x}\int_{x}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{-2x}\int_{-x}^{x} f(-u)(-\,\mathrm{d}u) \text{ changement de variable } t = -u \\
&= \frac{1}{-2x}\int_{-x}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u \text{ car } f \text{ est impaire} \\
&= -\varphi(f)(x)
\end{aligned}$$

Par continuité, $\varphi(f)$ est impaire.
$\varphi(f)$ est à la fois paire et impaire donc $\varphi(f) = 0$.

0 est valeur propre de φ et le sous-espace propre associé est l'ensemble des fonctions impaires.

On suppose désormais $\lambda \neq 0$.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\varphi(f) = \lambda f$.
$f = \dfrac{1}{\lambda}\varphi(f)$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et f est paire.
$\forall x \in \mathbb{R}^*\ F(x) - F(-x) = 2\lambda x f(x)$
On dérive :
$\forall x \in \mathbb{R}^*\ f(x) + f(-x) = 2\lambda(xf'(x) + f(x))$
Par continuité et parité :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x))$
On en déduit :
$\forall x > 0\ f'(x) = \dfrac{1-\lambda}{\lambda x} f(x)$
puis :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > 0\ f(x) = Cx^{(1-\lambda)/\lambda}$.
La parité donne :
$\forall x \neq 0\ f(x) = C\,|x|^{(1-\lambda)/\lambda}$.
Si on veut obtenir autre chose que la fonction nulle on doit avoir $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ ie $\lambda \in]0;1]$.
Il ne reste plus qu'à étudier la réciproque.
Soit $\lambda \in]0;1]$.
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^{(1-\lambda)/\lambda} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$.
f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\forall x > 0\ \varphi(f)(x) &= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ car } f \text{ est paire} \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x t^{1/\lambda-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\lambda t^{1/\lambda}\right]_0^x = \lambda x^{1/\lambda-1} \\
&= \lambda f(x)
\end{aligned}$$

Par parité et continuité :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi(f)(x) = \lambda f(x)$

Les valeurs propres de f sont donc les éléments de $[0;1]$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est l'ensemble des fonctions impaires.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in]0;1]$ est la droite engendrée par la fonction $f_\lambda \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^{(1-\lambda)/\lambda} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$.

2 Propriétés des éléments propres

Exercice 5 *(Centrale 2016)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $u,v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si λ est valeur propre de uv alors λ est également valeur propre de vu.
2. On suppose $\lambda \neq 0$ et λ valeur propre de uv et de vu.
   Montrer que $E_\lambda(uv)$ et $E_\lambda(vu)$ ont la même dimension.

Correction

1. On suppose que λ est valeur propre de uv.
   Soit x un vecteur propre associé.
   $uv(x) = \lambda x$.
   Donc $(vu)(v(x)) = \lambda v(x)$.
   Si $v(x)$ est non nul alors c'est un vecteur propre de vu associé à la valeur propre λ.
   Si $v(x) = 0$ alors $uv(x) = u\,(v(x)) = 0$ donc $\lambda x = 0$.
   x est un vecteur propre donc x est non nul et $\lambda = 0$.
   Mais si 0 est valeur propre de uv, c'est que uv n'est pas inversible. vu ne peut alors l'être $(\det(vu) = \det(uv) = \det(u)\,\det(v))$ et 0 est valeur propre de vu.
2. Il résulte du raisonnement précédent que $\mathrm{Ker}\,(v) \cap E_\lambda(uv) = \{0\}$ et $v\,(E_\lambda(uv)) \subset E_\lambda(vu)$
   D'où $\dim(E_\lambda(uv)) \leq \dim(E_\lambda(vu))$.
   Il suffit ensuite d'inverser les rôles de u et de v.

3 Diagonalisation : le point de vue géométrique

Exercice 6 *(CCP 2022)*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 2u + id_E = 0$ et $u \neq id_E$.

1. Montrer que $u \in GL(E)$ et déterminer u^{-1}.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(u - id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de u.
   L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Soient f et g deux projecteurs. Montrer :
   $f \circ g = g \iff \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f)$
4. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $v^2 = 0$.
   Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(v)$ dans E.
   Soit p_1 la projection sur $\mathrm{Im}\,(v)$ parallèlement à S.
   On pose $q_1 = p_1 - v$.
   Montrer que q_1 est un projecteur et que $\mathrm{Im}\,(q_1) = \mathrm{Im}\,(p_1)$.
5. Montrer qu'il existe p et q deux projecteurs tels que $u = p + q$ et $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(q)$.

Correction

1. $u \circ (2id_E - u) = 2u - u^2 = id_E$: u est inversible à droite d'inverse $2id_E - u$.
   Comme on est en dimension finie, u est inversible d'inverse $2id_E - u$.
2. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u - id_E)$.
   $\exists x \in E$ tq $y = u(x) - x$.
   $u(y) - y = u(u(x) - x) - u(x) + x = u^2(x) - 2u(x) + x = 0$ car $u^2 - 2u + id_E = 0$.

(b) Le polynôme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ annule u donc les valeurs propres de u sont racines de ce polynôme.
Donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1\}$.
Par ailleurs χ_u est un polynôme de degré $n \geq 1$ donc il a au moins une racine (théorème de d'Alembert-Gauss).
Donc $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$.
On en déduit $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$.

Si u était diagonalisable avec une seule valeur propre égale à 1, on aurait $u = id_E$, ce qu'on a exclus.
Par conséquent, u n'est pas diagonalisable.

3. - $\Longrightarrow$
   Soit $y \in \mathrm{Im}\,(g)$.
   $\exists x \in E$ tq $y = g(x)$.
   $f \circ g = g$ donc $y = g(x) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}\,(f)$
   - $\Longleftarrow$
   Soit $x \in E$.
   $g(x) \in \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ donc $g(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$.
   Donc, il existe $y \in E$ tq $g(x) = f(y)$.
   On a alors :
   $f(g(x)) = f(f(y)) = f^2(y) = f(y)$ car f est un projecteur.
   Donc $f(g(x)) = g(x)$.
4. $q_1^2 = (p_1 - v)(p_1 - v) = p_1^2 - p_1 v - v p_1 + v^2 = p_1 - p_1 v - v p_1$
   Dans la question précédente, on ne s'est pas servi de l'hypothèse g projecteur. Ici $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Im}\,(p_1)$ et on a donc $p_1 v = v$.
   Soit $x \in E$.
   $p_1(x) \in \mathrm{Im}\,(p_1) \subset \mathrm{Im}\,(v)$ donc il existe $y \in E$ tel que $p_1(x) = v(y)$.
   Donc $v p_1(x) = v(p_1(x)) = v(v(y)) = 0$ car $v^2 = 0$.
   Par conséquent, $v p_1 = 0$ et $q_1^2 = p_1 - v = q_1$: q_1 est un projecteur.

   $q_1 p_1 = (p_1 - v) p_1 = p_1^2 - v p_1 = p_1$ donc $\mathrm{Im}\,(p_1) \subset \mathrm{Im}\,(q_1)$.
   $p_1 q_1 = p_1(p_1 - v) = p_1 - p_1 v = p_1 - v = q_1$ donc $\mathrm{Im}\,(q_1) \subset \mathrm{Im}\,(p_1)$
5. $v = u - id_E \neq 0$ et $v^2 = (u - id_E)^2 = 0$.
   Donc il existe deux projecteurs p_1 et q_1 tels que $\mathrm{Im}\,(p_1) = \mathrm{Im}\,(q_1)$ et $v = p_1 - q_1$.
   $u = v + id_E = p_1 + id_E - q_1$.
   $p = p_1$ et $q = id_E - q_1$ sont des projecteurs tels que $u = p + q$.
   Enfin $\mathrm{Ker}\,(q) = \mathrm{Ker}\,(id_E - q_1) = \mathrm{Im}\,(q_1) = \mathrm{Im}\,(p_1) = \mathrm{Im}\,(p)$.

Exercice 7 *(CCP 2011)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(-4)X + P(6) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Correction
$\mathrm{Ker}\,(u) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } P(-4) = P(6) = 0\}$
Si $n = 1$ alors $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$, u est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathrm{Im}\,(u) = \mathbb{R}_n[X]$.
Si $n \geq 2$, $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Vect}((X+4)(X-6)) = \{(X+4)(X-6)Q\ , Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}$.

$\mathrm{Ker}\,(u)$ est de dimension $n-1$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ est donc de dimension $n+1-(n-1)=2$ par la formule du rang.
Comme $\mathrm{Im}\,(u)\subset\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, $\mathrm{Im}\,(u)=\mathbb{R}_1[X]$.

Si $n=1$, 0 n'est pas valeur propre de u.
Si $n\geq 2$, 0 est valeur propre de u et le sous-espace propres associé est $\mathrm{Vect}((X+4)(X-6))$ de dimension $n-1$.
Comme remarqué en cours, si P est propre pour une valeur propre non nulle alors P est dans l'image de u.
On cherche donc d'éventuels nouveaux vecteurs propres, sous la forme $P(X)=aX+b$.
$u(P)=(-4a+b)X+6a+b$
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
u(P)=\lambda P &\iff \begin{cases}-4a+b=\lambda a\\ 6a+b=\lambda b\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}b=(\lambda+4)a\\ 6a+(\lambda+4)a=\lambda(\lambda+4)a\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}b=(\lambda+4)a\\ (\lambda^2+3\lambda-10)a=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}b=(\lambda+4)a\\ (\lambda+5)(\lambda-2)a=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Si $\lambda\neq -5,2$ alors :
$u(P)=\lambda P \iff \begin{cases}b=(\lambda+4)a\\ a=0\end{cases} \iff P=0$
λ n'est pas valeur propre de u.
Si $\lambda=-5$ alors :
$u(P)=\lambda P\iff b=-a$
-5 est valeur propre de u et $E_{-5}(u)=\mathbb{R}(X-1)$
Si $\lambda=2$ alors :
$u(P)=\lambda P\iff b=6a$
-5 est valeur propre de u et $E_2(u)=\mathbb{R}(X+6)$
La somme des dimensions des sous-espaces propres de u est $1+1+n-1=n+1$ (y compris dans le cas $n=1$).
Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, on en déduit que u est diagonalisable.

Exercice 8 *(X 2018)*

Soit $A\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$.
Soit φ_A l'application qui à $P\in\mathbb{C}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de XP par A.
Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer ses valeurs propres.
Remarque
J'ajoute la question suivante :
Donner une CNS, portant sur A, pour que φ_A soit diagonalisable.

Correction
Par définition de la division euclidienne :

$\forall P \in \mathbb{C}_n[X]\ deg(\varphi_A(P)) < deg(A) = n+1$
$\forall P \in \mathbb{C}_n[X]\ \varphi_A(P) \in \mathbb{C}_n[X]$
φ_A est une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même.
Montrons que φ_A est linéaire.
Soient $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
$XP = P_1A + \varphi_A(P)$
$XQ = Q_1A + \varphi_A(Q)$
$X(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P_1 + \mu Q_1)A + \lambda\varphi_A(P) + \mu\varphi_A(Q)$ avec $\lambda\varphi_A(P) + \mu\varphi_A(Q) \in \mathbb{C}_n[X]$
Donc $\varphi_A(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi_A(P) + \mu\varphi_A(Q)$.

Passons aux valeurs propres de φ_A.
A se factorise en $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ avec des notations naturelles.
Soit P un polynôme propre pour φ_A.
$P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi_A(P) = \lambda P$.
Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tq $XP = QA + \lambda P$
$(X-\lambda)P = QA$
Pour des raisons de degré, Q est constant et P de degré n.
On en déduit que λ est l'une des racines de A, disons λ_{i_0}, et $P = c\dfrac{A}{X-\lambda_{i_0}}$.
Réciproquement :

$$\begin{aligned} X\frac{A}{X-\lambda_{i_0}} &= (X-\lambda_{i_0}+\lambda_{i_0})\frac{A}{X-\lambda_{i_0}} \\ &= A + \lambda_{i_0}\frac{A}{X-\lambda_{i_0}} \end{aligned}$$

$\dfrac{A}{X-\lambda_{i_0}}$ est bien un élément non nul de $\mathbb{C}_n[X]$.
C'est donc un vecteur propre de φ_A.
On remarquera :

$$\varphi_A \text{ diagonalisable} \iff A \text{ est scindé à racines simples}$$

Exercice 9 *(X 2019)*

Soit $u \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to ? \\ P \mapsto X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right) \end{cases}$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. u est-elle diagonalisable ?
3. Eléments propres de u ?

Correction

1. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $u(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$.
   On conclut facilement.
2. u est une symétrie donc u est diagonalisable.

3. Si $n = 0$, alors $s = id$.
   On conclut facilement.
   Si $n > 0$, alors $s \neq \pm id$.
   Les valeurs propres de s sont -1 et 1.
   On suppose d'abord $n = 2p$ pair.
   Le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 est de dimension $p + 1$ et a pour base (par exemple) :
   $(X^n + 1, X^{n-1} + X, \ldots, X^{p+1} + X^{p-1}, X^p)$
   Le sous-espace propre de s associé à la valeur propre -1 est de dimension p et a pour base (par exemple) :
   $(X^n - 1, X^{n-1} - X, \ldots, X^{p+1} - X^{p-1})$
   On suppose ensuite $n = 2p + 1$ impair.
   Le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 est de dimension $p + 1$ et a pour base (par exemple) :
   $(X^n + 1, X^{n-1} + X, \ldots, X^{p+1} + X^p)$
   Le sous-espace propre de s associé à la valeur propre -1 est de dimension $p+1$ et a pour base (par exemple) :
   $(X^n - 1, X^{n-1} - X, \ldots, X^{p+1} - X^p)$

Exercice 10 *(CCP 2022)*

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k \end{cases}$

1. Montrer que cette application est un endomorphisme.
2. Déterminer $\varphi \circ \varphi$.
3. φ est-elle diagonalisable ?

Correction

1. Il s'agit de montrer que φ est linéaire et qu'elle va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Cela me paraît clair.
2. $\varphi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}_n[X]}$
3. φ étant une symétrie, elle est diagonalisable.
   On peut aussi dire que le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ annule φ.

Exercice 11 *(Mines 2021)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ f(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$

1. Déterminer l'image et le noyau de f.
2. f est-il diagonalisable ?

Correction

1. La linéarité de f est facile à établir.
   Il est clair que le degré de $f(P)$ est plus petit que 2.
   Dans la mesure où on suppose $n \geq 2$, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   On a clairement $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}(X^2 - X, X^2 + X)$.
   Réciproquement, $f(X+1) = 2(X^2 - X)$ donc $X^2 - X \in \mathrm{Im}\,(f)$.
   $f(X-1) = -2(X^2 + X)$ donc $X^2 + X \in \mathrm{Im}\,(f)$
   Donc $\mathrm{Vect}(X^2 - X, X^2 + X) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ puis $\mathrm{Vect}(X^2 - X, X^2 + X) = \mathrm{Im}\,(f)$.

   $X^2 - X$ et $X^2 + X$ ne sont pas colinéaires donc :
   $\mathrm{Ker}\,(f) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } P(1) = P(-1)\} = \{(X^2 - 1)Q, Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$
   $\mathrm{Ker}\,(f)$ est donc de dimension $\dim\,(R_{n-2}[X]) = n - 1$, en accord avec la formule du rang.
2. 0 est valeur propre de f. Le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $f(P) = \lambda P$.
   $\lambda \neq 0$ donc $P \in \mathrm{Im}\,(f)$ et P est de la forme $P = a(X^2 - X) + b(X^2 + X)$.
   $f(P) = 2b(X^2 - X) + 2a(X^2 + X)$.
   Donc :
   $\begin{cases} 2b = \lambda a \\ 2a = \lambda b \end{cases}$
   Donc $b = \dfrac{\lambda}{2}a$ puis $2a = \dfrac{\lambda^2}{2}a$.
   Donc si $\lambda \neq \pm 2$, $a = 0$ puis $b = 0$ et $P = 0$: λ n'est pas valeur propre.
   SI $\lambda = 2$ alors $b = a$.
   Réciproquement :
   $f((X^2 - X) + X^2 + X) = f(2X^2) = 2(X^2 - X) + 2(X^2 + X) = 4X^2$
   Donc 2 est valeur propre et $E_2(f) = \mathbb{R}X^2$.
   SI $\lambda = -2$ alors $b = -a$.
   Réciproquement :
   $f((X^2 - X) - (X^2 + X)) = f(2X) = 2(X^2 - X) - 2(X^2 + X) = -4X$
   Donc -2 est valeur propre et $E_2(f) = \mathbb{R}X$.
   La somme des dimensions des sous-espaces propres est $n-1+1 = 1 = n+1 = \dim\,(\mathbb{R}_n[X])$.
   f est diagonalisable.

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non nulle.
Soient f, u, v 3 endomorphismes de E tels que :
$f = u + 2v$
$f^2 = u + 4v$
$f^3 = u + 8v$
Montrer que f est diagonalisable.
Montrer que u et v sont des projections.

Correction
Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned} P(f) &= af^3 + bf^2 + cf = a(u + 8v) + b(u + 4v) + c(u + v) \\ &= (a + b + c)u + (8a + 4b + 2c)v = P(1)u + P(2)v \end{aligned}$$

Si on prend $P = X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$ alors $P(f) = 0$ avec P scindé à racines simples.
On en déduit que f est diagonalisable.

On prend ensuite $P = -X(X-2)$ de sorte que $P = aX^3 + bX^2 + cX$ avec $a = 0$, $b = -1$ et $c = 2$.
$P(1) = 1$ et $P(2) = 0$ donc $P(f) = P(1)u + P(2)v = u$.
Par conséquent, $u^2 = P^2(f)$.
On effectue la division euclidienne de P^2 par $X(X-1)(X-2)$.
$P^2 = Q(X)X(X-1)(X-2) + R(X)$ avec R de degré inférieur ou égal à 2.
En évaluant cette relation en 0, on obtient $R(0) = 0$.
En évaluant cette relation en 2, on obtient $R(2) = 0$.
On a déjà $R(X) = \lambda P(X)$.
En évaluant en 1, on obtient $P(1)^2 = R(1) = \lambda P(1)$.
$P(1) = 1$ donc $\lambda = 1$ et $R(X) = P(X)$.
$u^2 = P^2(f) = Q(f)f(f - id)(f - 2id) + R(f) = R(f) = P(f) = u$ donc u est un projecteur.

On recommence avec $P = \dfrac{X(X-1)}{2}$ de sorte que $P = aX^3 + bX^2 + cX$ avec $a = 0$, $b = \dfrac{1}{2}$ et $c = -\dfrac{1}{2}$.
$P(1) = 0$ et $P(2) = 1$ donc $P(f) = P(1)u + P(2)v = v$.
Par conséquent, $v^2 = P^2(f)$.
On effectue la division euclidienne de P^2 par $X(X-1)(X-2)$.
$P^2 = Q(X)X(X-1)(X-2) + R(X)$ avec R de degré inférieur ou égal à 2.
En évaluant cette relation en 0, on obtient $R(0) = 0$.
En évaluant cette relation en 1, on obtient $R(1) = 0$.
On a déjà $R(X) = \lambda P(X)$.
En évaluant en 2, on obtient $P(2)^2 = R(2) = \lambda P(2)$.
$P(2) = 1$ donc $\lambda = 1$ et $R(X) = P(X)$.
$v^2 = P^2(f) = Q(f)f(f - id)(f - 2id) + R(f) = R(f) = P(f) = v$ donc v est un projecteur.

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit σ une bijection de $[\![1; n]\!]$ sur lui-même.
Soit $f\sigma \in \mathcal{L}(E)$ défini par :
$\forall k \in [\![1; n]\!]\ f_\sigma(e_k) = e_{\sigma(k)}$
Montrer que f est diagonalisable.

Correction
On montre par récurrence :
$\forall p \in \mathbb{N}\ (f_\sigma)^p = f_{\sigma^p}$
L'ensemble des permutations de $[\![1; n]\!]$ est fini donc : il existe deux entiers p et q avec $p < q$ tels que $\sigma^p = \sigma^q$.
On a donc $(f_\sigma)^p = (f_\sigma)^q$
Mais f_σ transforme une base en une autre base donc f_σ est inversible et $(f_\sigma)^{q-p} = id_E$.
f_σ est donc annulé par $X^{q-1} - 1$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
On en déduit que f_σ est diagonalisable.

Exercice 14

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\varphi \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ g \mapsto g \circ f \end{cases}$.
Montrer :
φ diagonalisable $\Longleftrightarrow f$ diagonalisable

Correction
On montre par récurrence :
$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall g \in \mathcal{L}(E)\ \varphi^k(g) = g \circ f^k$
On en déduit :
$\forall P \in \mathbb{K}[X]\ \forall g \in \mathcal{L}(E)\ P(\varphi)(g) = g \circ P(f)$
Si f est diagonalisable, il existe P scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$.
On a alors $P(\varphi) = 0$ avec P scindé à racine simples donc φ est diagonalisable.
Si φ est diagonalisable alors il existe P scindé à racines simples tel que $P(\varphi) = 0$.
On a donc :
$\forall g \in \mathcal{L}(E)\ g \circ P(f) = 0$
En prenant $g = id_E$, on obtient $P(f) = 0$.
Comme P est scindé à racines simples, f est diagonalisable.

Exercice 15

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit f un automorphisme de E.
   Montrer :
   f diagonalisable $\Longleftrightarrow f^2$ diagonalisable.
2. Soit f un endomorphisme de E.
   Montrer :
   f diagonalisable $\Longleftrightarrow \begin{cases} f^2 \text{ diagonalisable} \\ \mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f) \end{cases}$

Correction

1. On suppose f diagonalisable.
   Il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E formée de vecteurs propres de f :
   $\forall k \in [\![1; n]\!]\ \exists \lambda_k \in [\![1; n]\!]$ tq $f(e_k) = \lambda_k e_k$
   $\forall k \in [\![1; n]\!]\ f^2(e_k) = \lambda_k^2 e_k$
   Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de f^2 et f^2 est diagonalisable.
   Plus généralement, si P est un polynôme :
   $\forall k \in [\![1; n]\!]\ P(f)(e_k) = P(\lambda_k) e_k$
   Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de $P(f)$ et $P(f)$ est diagonalisable.

   Réciproquement, on suppose f^2 diagonalisable.
   f^2 est annulé par $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f^2)} (X - \lambda)$
   f est inversible donc f^2 l'est aussi et 0 n'est pas valeur propre de f^2.
   Par conséquent, chaque valeur propre de f^2 a deux racines carrées distinctes $\omega(\lambda)$ et

$-\omega(\lambda)$.
Si $\lambda \neq \mu$ sont deux valeurs propres de f^2 alors $\pm\omega(\lambda) \neq \pm\omega(\mu)$: si il y avait égalité alors en élevant au carré on aurait $\lambda = \mu$.
Par conséquent le polynôme $Q = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f^2)} (X - \omega(\lambda))(X + \omega(\lambda))$ est scindé à racines simples.
$(f - \omega(\lambda)id_E)(f + \omega(\lambda)id_E) = f^2 - \omega(\lambda)^2 id_E = f^2 - \lambda id_E$ donc Q annule f et f est diagonalisable.

2. On suppose f diagonalisable.
On reprend les notations de la première question :
Il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E formée de vecteurs propres de f :
$\forall k \in [\![1; n]\!]\ \exists \lambda_k \in [\![1; n]\!]$ tq $f(e_k) = \lambda_k e_k$
$\forall k \in [\![1; n]\!]\ f^2(e_k) = \lambda_k^2 e_k$
Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de f^2 et f^2 est diagonalisable.
L'image de f est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $f(e_k) = \lambda_k e_k$ donc par les vecteurs e_k tels que $\lambda_k \neq 0$.
L'image de f est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $f^2(e_k) = \lambda_k^2 e_k$ donc par les vecteurs e_k tels que $\lambda_k^2 \neq 0$.
Ce sont les mêmes que pour f donc f et f^2 ont la même image et par conséquent le même rang.

Réciproquement, on suppose que f^2 est diagonalisable et que f et f^2 ont le même rang.
Si f est inversible, f est diagonalisable d'après la première question.
On suppose désormais que f n'est pas inversible.
f^2 n'est pas non plus inversible et 0 est valeur propre de f et de f^2.
D'après la formule du rang, le noyau de f et le noyau de f^2 ont la même dimension.
Mais le noyau de f est toujours inclus dans celui de f^2 donc f et f^2 ont le même noyau.
f^2 est diagonalisable donc f^2 est annulé par $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f^2)} (X - \lambda)$ qu'on peut écrire $XQ(X)$ avec $Q = 1$ ou Q scindé à racines simples qui ne s'annule pas en 0.
$f^2 \circ Q(f^2) = P(f) = 0$ donc l'image de $Q(f)$ est incluse dans le noyau de f^2 donc dans le noyau de f.
On en déduit $f \circ Q(f^2) = 0$.
On montre comme dans la première question que le polynôme $Q(X^2)$ est scindé à racines simples et pas plus que Q il ne s'annule en 0 (dans le cas où $Q = 1$, on a $f = 0$).
Donc le polynôme $XQ(X^2)$ est scindé à racines simples et annule f.
Par conséquent, f est diagonalisable.

Exercice 16 *(X 2019)*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Montrer :
$(\exists v \in E$ tq $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ est une base de $E) \iff \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(v)) = n$

Correction
On suppose qu'il existe v dans E tel que $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ est une base de E.
Si P est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ alors $P(f)(v)$ est une combinaison

linéaire des vecteurs de cette base dont les coefficients ne sont pas tous nuls. $P(f)(v)$ est donc un vecteur non nul et $P(f)$ un endomorphisme non nul.
Par conséquent, un polynôme annulateur non nul de f est de degré supérieur ou égal à n.
Mais f est diagonalisable donc f est annulé par $\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}(X-\lambda)$ dont le degré est égal au cardinal du spectre.
On en déduit que le cardinal du spectre de f est supérieur ou égal à n. Mais il ne peut pas être plus grand que la dimension de l'espace donc il est égal à n.

Réciproquement, on suppose que le cardinal du spectre est égal à n.
f a donc n valeurs propres 2 à 2 distinctes : $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
Pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, soit x_i un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i (ie un vecteur non nul de $E_{\lambda_i}(f)$).
Soit $v=x_1+\cdots+x_n$.
Soit $(a_0,\dots,a_{n-1})$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_kf^k(v)=0$.
On note $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$ On a :

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{k=0}^{n-1}a_kf^k(v)=P(f)(v)=P(f)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}P(f)(x_i)=\sum_{i=1}^{n}P(\lambda_i)x_i\end{aligned}$$

Mais $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes donc c'est une famille libre.
Donc pour tout i compris entre 1 et n, $P(\lambda_i)$ est nul.
Donc P est de degré au plus $n-1$ et a au moins n racines deux à deux distinctes.
Donc P est le polynôme nul et tous ses coefficients sont nuls.
Donc la famille $(v,f(v),\dots,f^{n-1}(v))$ est libre et au vu de son cardinal, c'est une base de E.