DM 1
Correction

941

1 Préliminaires

1. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$.
   Par définition :
   $\exists x \in V$ tq $y = (g \circ f)(x)$
   On a alors $y = g(f(x)) \in \mathrm{Im}\,(g)$.
   Donc $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$.
2. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ ie $x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.
   Donc $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.
3. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f + g)$.
   $\exists x \in V$ tq $y = (f + g)(x)$
   On a $y = f(x) + g(x)$ avec $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ et $g(x) \in \mathrm{Im}\,(g)$ donc $y \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.
   D'où $\mathrm{Im}\,(f + g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$
4. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$.
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$ ie $x \in \mathrm{Ker}\,(f + g)$
   D'où $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,(f + g)$
5. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(\lambda f)$.
   $\exists x \in V$ tq $y = (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
   $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ sev de V donc $y \in \mathrm{Im}\,(f)$.
   Donc $\mathrm{Im}\,(\lambda f) \subset \mathrm{Im}\,(f)$.
   Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$.
   $\exists x \in V$ tq $y = f(x)$.
   $\lambda \neq 0$ donc $y = (\lambda f)\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ et $y \in \mathrm{Im}\,(\lambda f)$.
   D'où $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(\lambda f)$ puis $\mathrm{Im}\,(\lambda f) = \mathrm{Im}\,(f)$.

   $\mathrm{Im}\,(0.f) = \mathrm{Im}\,(0_{\mathcal{L}(V)}) = \{0_V\} \subset \mathrm{Im}\,(f)$

   Soit $\lambda \neq 0$.
   Soit $x \in V$.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\,(\lambda f) &\iff \lambda f(x) = 0 \\ &\iff f(x) = 0 \text{ car } \lambda \neq 0 \\ &\iff x \in \mathrm{Ker}\,(f) \end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Ker}\,(\lambda f) = \mathrm{Ker}\,(f)$.
   Enfin $\mathrm{Ker}\,(0.f) = \mathrm{Ker}\,(0_{\mathcal{L}(V)}) = E$ contient $\mathrm{Ker}\,(f)$.

6. • $\Longrightarrow$
   On suppose $W_1 \subset W_3$ et $W_2 \subset W_3$.
   Soit $x \in W_1 + W_2$.
   $\exists (x_1, x_2) \in W_1 \times W_2$ tq $x = x_1 + x_2$.
   $x_1 \in W_1 \subset W_3$ donc $x_1 \in W_3$
   $x_2 \in W_2 \subset W_3$ donc $x_2 \in W_3$
   W_3 est un sev de E donc $x \in W_3$.
   D'où $W_1 + W_2 \subset W_3$.
   • $\Longleftarrow$
   $W_1 \subset W_1 + W_2 \subset W_3$ donc $W_1 \subset W_3$
   $W_2 \subset W_1 + W_2 \subset W_3$ donc $W_2 \subset W_3$
7. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p)$.
   $\exists y \in V$ tq $x = p(y)$.
   $p(x) = p^2(y) = p(y)$ car p est un projecteur.
   Donc $p(x) = x$ et $x \in \mathrm{Ker}\,(id_V - p)$.
   Donc $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}\,(id_V - p)$.
   Réciproquement soit $x \in \mathrm{Ker}\,(id_V - p)$.
   $x = p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$ donc $\mathrm{Ker}\,(id_V - p) \subset \mathrm{Im}\,(p)$.

2 Exemples d'idéaux

1. (a) On commence par prouver que Δ_f est un idéal à droite.
   - $\Delta_f \subset \mathcal{L}(V)$: clair
   - $0 = f \circ 0 \in \Delta_f$
   - Δ_f est stable par combinaisons linéaires :
     Soient $(\psi_1, \psi_2) \in \Delta_f^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
     $\psi_1 \in \Delta_f$ donc il existe $\varphi_1 \in \mathcal{L}(V)$ tq $\psi_1 = f \circ \varphi_1$
     $\psi_2 \in \Delta_f$ donc il existe $\varphi_2 \in \mathcal{L}(V)$ tq $\psi_2 = f \circ \varphi_2$
     On a alors :
     $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 = \lambda_1 f \circ \varphi_1 + \lambda_2 f \circ \varphi_2 = f \circ (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \in \Delta_f$

   On a donc prouvé que Δ_f est un sev de $\mathcal{L}(V)$.
   - Soient $\psi \in \Delta_f$ et $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.
     $\psi \in \Delta_f$ donc il existe $\varphi_1 \in \mathcal{L}(V)$ tq $\psi = f \circ \varphi_1$
     Donc $\psi \circ \varphi = (f \circ \varphi_1) \circ \varphi = f \circ (\varphi_1 \circ \varphi) \in \Delta_f$
     Donc Δ_f est un idéal à droite.

   On montre ensuite que Γ_f est un idéal à gauche.
   - $\Gamma_f \subset \mathcal{L}(V)$: clair
   - $0 = 0 \circ f \in \Gamma_f$
   - Γ_f est stable par combinaisons linéaires :
     Soient $(\psi_1, \psi_2) \in \Gamma_f^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
     $\psi_1 \in \Gamma_f$ donc il existe $\varphi_1 \in \mathcal{L}(V)$ tq $\psi_1 = \varphi_1 \circ f$
     $\psi_2 \in \Gamma_f$ donc il existe $\varphi_2 \in \mathcal{L}(V)$ tq $\psi_2 = \varphi_2 \circ f$
     On a alors :
     $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 = \lambda_1\varphi_1 \circ f + \lambda_2\varphi_2 \circ f = (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \circ f \in \Gamma_f$

   On a donc prouvé que Γ_f est un sev de $\mathcal{L}(V)$.
   - Soient $\psi \in \Gamma_f$ et $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.
     $\psi \in \Gamma_f$ donc il existe $\varphi_1 \in \mathcal{L}(V)$ tq $\psi = \varphi_1 \circ f$

Donc $\varphi \circ \psi = \varphi(\varphi_1 \circ f) = (\varphi \circ \varphi_1) \circ f \in \Gamma_f$
Donc Γ_f est un idéal à gauche.

(b) On commence par prouver que $\mathcal{J}_W$ est un idéal à droite.
- $\mathcal{J}_W \subset \mathcal{L}(V)$: clair
- $0 \in \mathcal{J}_W$: clair.
En effet $\operatorname{Im}\left(0_{\mathcal{L}(V)}\right) = \{0_V\} \subset W$.
- $\mathcal{J}_W$ est stable par combinaisons linéaires :
Soient $(f_1, f_2) \in \mathcal{J}_W^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &\subset \operatorname{Im}(\lambda_1 f_1) + \operatorname{Im}(\lambda_2 f_2) \text{ cf la question 3 des préliminaires} \\ &\subset \operatorname{Im}(f_1) + \operatorname{Im}(f_2) \text{ cf la question 5 des préliminaires} \\ &\subset W \text{ cf la question 6 des préliminaires} \end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{J}_W$.
On a donc prouvé que $\mathcal{J}_W$ est un sev de $\mathcal{L}(V)$.
- Soient $f \in \mathcal{J}_W$ et $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.
D'après la question 1 des préliminaires :
$\operatorname{Im}(f \circ \varphi) \subset \operatorname{Im}(f) \subset W$ donc $f \circ \varphi \in \mathcal{J}_W$.

On montre ensuite que $\mathcal{K}_W$ est un idéal à gauche.
- $\mathcal{K}_W \subset \mathcal{L}(V)$: clair
- $0 \in \mathcal{K}_W$: clair.
En effet $\operatorname{Ker}\left(0_{\mathcal{L}(V)}\right) = V$ contient W.
- $\mathcal{K}_W$ est stable par combinaisons linéaires :
Soient $(f_1, f_2) \in \mathcal{K}_W^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
$f_1 \in \mathcal{K}_W$ donc $W \subset \operatorname{Ker}(f_1)$.
Mais d'après les préliminaires, $\operatorname{Ker}(f_1) \subset \operatorname{Ker}(\lambda_1 f_1)$ donc $W \subset \operatorname{Ker}(\lambda_1 f_1)$.
De même $W \subset \operatorname{Ker}(\lambda_2 f_2)$ donc $W \subset \operatorname{Ker}(\lambda_1 f_1) \cap \operatorname{Ker}(\lambda_2 f_2)$.
D'après la question 4 des préliminaires, $W \subset \operatorname{Ker}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$.
Donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{K}_W$.
On a donc prouvé que $\mathcal{K}_W$ est un sev de $\mathcal{L}(V)$.
- Soient $f \in \mathcal{J}_W$ et $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.
$f \in \mathcal{J}_W$ donc $W \subset \operatorname{Ker}(f)$
D'après la première question des préliminaires, $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(\varphi \circ f)$ donc
$W \subset \operatorname{Ker}(\varphi \circ f)$ et $\varphi \circ f \in \mathcal{K}_W$.

2. (a)
- L_1 est injective :
Si $f \in \operatorname{Ker}(L_1)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in V \ f(x) &= f^{|W}(x) = L_1(f)(x) \\ &= 0 \text{ car } f \in \operatorname{Ker}(L_1) \end{aligned}$$

donc $f = 0$.
- L_1 est surjective :
Si $g \in \mathcal{L}(V, W)$, l'application $f \begin{cases} V \to V \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$ est bien définie. C'est une application linéaire donc $f \in \mathcal{L}(V)$.
$\forall x \in V \ f(x) = g(x) \in W$

Donc $f \in \mathcal{J}_W$.
Enfin $L_1(f) = g$.

On a donc montré que L_1 est un isomorphisme de $\mathcal{J}_W$ sur $\mathcal{L}(V, W)$.
On en déduit :
$\dim(\mathcal{J}_W) = \dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(V) \times \dim(W)$

(b) L_2 est injective :
Soit $f \in \mathrm{Ker}(L_2)$.
Ceci signifie que :
$\forall x \in S\ f(x) = 0$
Mais $f \in \mathcal{K}_W$ donc :
$\forall x \in W\ f(x) = 0$
Soit $x \in E$.
$\exists!(x_W, x_S) \in W \times S$ tq $x = x_W + x_S$
$f(x) = f(x_W) + f(x_S) = 0 + 0 = 0$
Donc $f = 0$ et L_2 est injective.
L_2 est surjective.
Soit p la projection sur S parallèlement à W.
Soit $g \in \mathcal{L}(S, V)$.
Soit $f \begin{cases} V \to V \\ x \mapsto g(p(x)) \end{cases}$
$\forall x \in E\ p(x) \in S$ donc f est bien définie
f est linéaire comme composée d'applications linéaires
De plus :
$\forall x \in W\ f(x) = g(p(x)) = g(0) = 0 : f \in \mathcal{K}_W$
$\forall x \in S\ f(x) = g(p(x)) = g(x)$ (les vecteurs de S sont invariants par p)
Donc $f_{|S} = g$ et $L(f) = g$
L_2 est donc un isomorphisme de $\mathcal{K}_W$ sur $\mathcal{L}(S, V)$ et :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{K}_W) &= \dim(\mathcal{L}(S, V)) = \dim(S) \times \dim(V) \\ &= (\dim(V) - \dim(W)) \times \dim(V) \end{aligned}$$

(c) D'après les propriétés de $\mathcal{L}(V)$, L_3 est linéaire.
Soit $\phi \in \mathcal{L}(V)$.

$$\begin{aligned} \phi \in \mathrm{Ker}(L_3) &\iff f \circ \phi = 0 \iff \forall x \in V\ f(\phi(x)) = 0 \\ &\iff \forall x \in V\ \phi(x) \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\iff \{\phi(x); x \in V\} \subset \mathrm{Ker}(f) \\ &\iff \mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Ker}(f) \\ &\iff \phi \in \mathcal{J}_{\mathrm{Ker}(f)} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(L_3) = \mathcal{J}_{\mathrm{Ker}(f)}$.
Mais $\Delta_f = \mathrm{Im}(L_3)$ donc par la formule du rang :

$$\begin{aligned} \dim(\Delta_f) &= \dim(\mathcal{L}(V)) - \dim(\mathcal{J}_{\mathrm{Ker}(f)}) \\ &= (\dim(V))^2 - \dim(V) \times \dim(\mathrm{Ker}(f)) \\ &= \dim(V)(\dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(f))) \\ &= \mathrm{rg}(f) \times \dim(V) \text{ (formule du rang)} \end{aligned}$$

D'après les préliminaires :
$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V)$ Im $(f \circ \varphi) \subset$ Im (f) ie $\Delta_f \subset \mathcal{J}_{\text{Im}}(f)$
Mais :

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{J}_{\text{Im}}(f)) &= \dim(\mathcal{J}_{\text{Im}(f)}) \times \dim(V) \text{ cf 2)a)} \\
&= \text{rg}(f) \times \dim(V) \\
&= \dim(\Delta_f)
\end{aligned}$$

Donc $\Delta_f = \mathcal{J}_{\text{Im}}(f)$

(d) Soit $L_4 \begin{cases} \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V) \\ \phi \mapsto \phi \circ f \end{cases}$.

D'après les propriétés de $\mathcal{L}(V)$, L_4 est linéaire.
Soit $\phi \in \mathcal{L}(V)$.

$$\begin{aligned}
\phi \in \text{Ker}(L_4) &\iff \phi \circ f = 0 \\
&\iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\phi) \\
&\iff \phi \in \mathcal{K}_{\text{Im}(f)}
\end{aligned}$$

Donc Ker $(L_4) = \mathcal{K}_{\text{Im}(f)}$.
Mais $\Gamma_f =$ Im (L_4) donc par la formule du rang :

$$\begin{aligned}
\dim(\Gamma_f) &= \dim(\mathcal{L}(V)) - \dim(\mathcal{K}_{\text{Im}(f)}) \\
&= (\dim(V))^2 - \dim(V) \times (\dim(V) - \dim(\text{Im}(f))) \\
&= \text{rg}(f) \times \dim(V)
\end{aligned}$$

D'après les préliminaires :
$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V)$ Ker $(f) \subset$ Ker $(\varphi \circ f)$ ie $\Gamma_f \subset \mathcal{K}_{\text{Ker}}(f)$
Mais :

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{K}_{\text{Ker}}(f)) &= (\dim(V) - \dim(\text{Ker}(f))) \times \dim(V) \text{ cf 2)b)} \\
&= \text{rg}(f) \times \dim(V) \text{ par la formule du rang} \\
&= \dim(\Gamma_f)
\end{aligned}$$

Donc $\Gamma_f = \mathcal{K}_{\text{Ker}}(f)$

3 Etude des idéaux de $\mathcal{L}(V)$: première méthode

1. (a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_W \cap \mathcal{J}_{W'} &= \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq Im}(f) \subset W\} \cap \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq Im}(f) \subset W'\} \\
&= \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq Im}(f) \subset W \text{ ET Im}(f) \subset W'\} \\
&= \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq Im}(f) \subset W \cap W'\} = \mathcal{J}_{W \cap W'}
\end{aligned}$$

En effet si A, B et C sont trois ensembles :
$(A \subset B$ et $A \subset C) \iff A \subset B \cap C$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_W \cap \mathcal{K}_{W'} &= \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq } W \subset \text{Ker}(f)\} \cap \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq } W' \subset \text{Ker}(f)\} \\
&= \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq } W \subset \text{Ker}(f) \text{ ET } W' \subset \text{Ker}(f)\} \\
&= \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq } W + W' \subset \text{Ker}(f)\} \text{ cf la question 6 des préliminaires} \\
&= \mathcal{K}_{W+W'}
\end{aligned}$$

(b) Soit $f \in \mathcal{J}_W + \mathcal{J}_{W'}$.
$\exists (f_1, f_2) \in \mathcal{J}_W \times \mathcal{J}_{W'}$ tq $f = f_1 + f_2$
$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f_1 + f_2) \subset \mathrm{Im}\,(f_1) + \mathrm{Im}\,(f_2)$ cf question 3 des préliminaires
$f_1 \in \mathcal{J}_W$ donc $\mathrm{Im}\,(f_1) \subset W$. Mais $W \subset W + W'$ donc $\mathrm{Im}\,(f_1) \subset W + W'$.
$f_2 \in \mathcal{J}_{W'}$ donc $\mathrm{Im}\,(f_2) \subset W'$. Mais $W' \subset W + W'$ donc $\mathrm{Im}\,(f_2) \subset W + W'$.
D'après la question 6 des préliminaires, $\mathrm{Im}\,(f_1) + \mathrm{Im}\,(f_2) \subset W + W'$.
On en déduit $\mathrm{Im}\,(f) \subset W + W'$ ie $f \in \mathcal{J}_{W+W'}$.
Donc $\mathcal{J}_W + \mathcal{J}_{W'} \subset \mathcal{J}_{W+W'}$.
De plus :

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{J}_W + \mathcal{J}_{W'}) &= \dim(\mathcal{J}_W) + \dim(\mathcal{J}_{W'}) - \dim(\mathcal{J}_W \cap \mathcal{J}_{W'}) \text{ formule de Grassman} \\
&= \dim(\mathcal{J}_W) + \dim(\mathcal{J}_{W'}) - \dim(\mathcal{J}_{W\cap W'}) \text{ cf la question précédente} \\
&= \dim(V) \times \dim(W) + \dim(V) \times \dim(W') - \dim(V) \times \dim(W \cap W') \text{ cf 1.2.a} \\
&= \dim(V) \times \big(\dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')\big) \\
&= \dim(V) \times \dim(W + W') = \dim(\mathcal{J}_{W+W'})
\end{aligned}$$

On en déduit $\mathcal{J}_W + \mathcal{J}_{W'} = \mathcal{J}_{W+W'}$.

(c) Soit $f \in \mathcal{K}_W + \mathcal{K}_{W'}$.
$\exists (f_1, f_2) \in \mathcal{K}_W \times \mathcal{K}_{W'}$ tq $f = f_1 + f_2$
$f_1 \in \mathcal{K}_W$ donc $W \subset \mathrm{Ker}\,(f_1)$.
$f_2 \in \mathcal{K}_{W'}$ donc $W' \subset \mathrm{Ker}\,(f_2)$.
On en déduit $W \cap W' \subset \mathrm{Ker}\,(f_1) \cap \mathrm{Ker}\,(f_2)$
$\mathrm{Ker}\,(f_1) \cap \mathrm{Ker}\,(f_2) \subset \mathrm{Ker}\,(f_1 + f_2) = \mathrm{Ker}\,(f)$ cf question 4 des préliminaires
On en déduit $W \cap W' \subset \mathrm{Ker}\,(f)$ ie $f \in \mathcal{K}_{W\cap W'}$.
Donc $\mathcal{K}_W + \mathcal{K}_{W'} \subset \mathcal{K}_{W\cap W'}$.
De plus :

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{K}_W + \mathcal{K}_{W'}) &= \dim(\mathcal{K}_W) + \dim(\mathcal{K}_{W'}) - \dim(\mathcal{K}_W \cap \mathcal{K}_{W'}) \text{ formule de Grassman} \\
&= \dim(\mathcal{K}_W) + \dim(\mathcal{K}_{W'}) - \dim(\mathcal{K}_{W+W'}) \text{ cf la question précédente} \\
&= \dim(V) \times (\dim(V) - \dim(W)) + \dim(V) \times (\dim(V) - \dim(W')) \\
&\quad - \dim(V) \times (\dim(V) - \dim(W + W')) \text{ cf 1.2.a} \\
&= \dim(V) \times \big(\dim(V) - \big(\dim(W) + \dim(W') - \dim(W + W')\big)\big) \\
&= \dim(V) \times (\dim(V) - \dim(W \cap W')) = \dim(\mathcal{K}_{W\cap W'})
\end{aligned}$$

On en déduit $\mathcal{K}_W + \mathcal{K}_{W'} = \mathcal{K}_{W\cap W'}$.

2. **Idéaux à droite de $\mathcal{L}(V)$**

(a) Soit $E = \{\dim(W) \text{ pour } W \text{ sev de } V \text{ tel que } \mathcal{J}_W \subset \mathcal{M}\}$.
- $E \neq \emptyset$
  En effet $\mathcal{J}_{\{0\}} = \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq } \mathrm{Im}\,(f) \subset \{0_V\}\} = \{0_{\mathcal{L}(V)}\} \subset \mathcal{M}$ car $\mathcal{M}$ est un sev de $\mathcal{L}(V)$.
  Donc $0 \in E$.
- E est une partie majorée (par $\dim(V)$) de $\mathbb{N}$.

On en déduit que E possède un élément maximal ie : il existe W sev de V tel que $\mathcal{J}_W \subset \mathcal{M}$ et tel qu'aucun sev W' de V ne vérifie $\mathcal{J}_{W'} \subset \mathcal{M}$ et $\dim(W') > \dim(W)$.

(b) Soit $f \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M}$ est un idéal à droite donc $\Delta_f \subset \mathcal{M}$.

D'après 1.2.c, $\mathcal{J}_{\mathrm{Im}\,(f)} \subset \mathcal{M}$.
Mais $\mathcal{J}_W \subset \mathcal{M}$ donc d'après la question 6 des préliminaires, $\mathcal{J}_{\mathrm{Im}\,(f)} + \mathcal{J}_W \subset \mathcal{M}$.
Or on vient de voir : $\mathcal{J}_{\mathrm{Im}\,(f)} + \mathcal{J}_W = \mathcal{J}_{\mathrm{Im}\,(f)+W}$ donc $\mathcal{J}_{\mathrm{Im}\,(f)+W} \subset \mathcal{M}$.
Vue la maximalité de W, $\dim(\mathrm{Im}\,(f) + W) \leq \dim(W)$.
Mais $W \subset \mathrm{Im}\,(f) + W$ donc $\dim(W) \leq \dim(\mathrm{Im}\,(f) + W)$.
On en déduit $\dim(\mathrm{Im}\,(f) + W) = \dim(W)$.
Avec l'inclusion $W \subset \mathrm{Im}\,(f) + W$, on a $W = \mathrm{Im}\,(f) + W$.
Mais $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(f) + W$ donc $\mathrm{Im}\,(f) \subset W$ ie $f \in \mathcal{J}_W$.

(c) On vient de montrer $\mathcal{M} \subset \mathcal{J}_W$.
Comme par construction, $\mathcal{J}_W \subset \mathcal{M}$, on a bien $\mathcal{M} = \mathcal{J}_W$.

(d) Il est clair qu'il existe $g \in \mathcal{L}(V)$ tel que $\mathrm{Im}\,(g) = W$ (considérer une projection sur W parallèlement à un supplémentaire de W) donc :
$\exists g \in \mathcal{L}(V)$ tq $\mathcal{M} = \mathcal{J}_{\mathrm{Im}\,(g)} = \Delta_g$

3. **Idéaux à gauche de $\mathcal{L}(V)$**

(a) Soit $E = \{\dim(W)$ pour W sev de V tel que $\mathcal{K}_W \subset \mathcal{M}\}$.
- $E \neq \emptyset$
En effet $\mathcal{K}_V = \{f \in \mathcal{L}(V)$ tq $V \subset \mathrm{Ker}\,(f)\} = \{0_{\mathcal{L}(V)}\} \subset \mathcal{M}$ car $\mathcal{M}$ est un sev de $\mathcal{L}(V)$.
Donc $\dim(V) \in E$.

Or toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément donc E possède un élément minimal ie : il existe W sev de V tel que $\mathcal{K}_W \subset \mathcal{M}$ et tel qu'aucun sev W' de V ne vérifie $\mathcal{K}_{W'} \subset \mathcal{M}$ et $\dim(W') < \dim(W)$.

(b) Soit $f \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M}$ est un idéal à gauche donc $\Gamma_f \subset \mathcal{M}$.
D'après 1.2.c, $\mathcal{K}_{\mathrm{Ker}\,(f)} \subset \mathcal{M}$.
Mais $\mathcal{K}_W \subset \mathcal{M}$ donc d'après la question 6 des préliminaires, $\mathcal{K}_{\mathrm{Ker}\,(f)} + \mathcal{K}_W \subset \mathcal{M}$.
Or on vient de voir : $\mathcal{K}_{\mathrm{Ker}\,(f)} + \mathcal{K}_W = \mathcal{K}_{\mathrm{Ker}\,(f)\cap W}$ donc $\mathcal{K}_{\mathrm{Ker}\,(f)\cap W} \subset \mathcal{M}$.
Vue la minimalité de W, $\dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap W) \geq \dim(W)$.
Mais $\mathrm{Ker}\,(f) \cap W \subset W$ donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap W) \leq \dim(W)$.
On en déduit $\dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap W) = \dim(W)$.
Avec l'inclusion $\mathrm{Ker}\,(f) \cap W \subset W$, on a $\mathrm{Ker}\,(f) \cap W = W$.
Mais $\mathrm{Ker}\,(f) \cap W \subset \mathrm{Ker}\,(f)$ donc $W \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.

(c) On vient de montrer $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}_W$.
Comme par construction, $\mathcal{K}_W \subset \mathcal{M}$, on a bien $\mathcal{M} = \mathcal{K}_W$.

(d) Il est clair qu'il existe $g \in \mathcal{L}(V)$ tel que $\mathrm{Ker}\,(g) = W$ (considérer une projection sur un supplémentaire de W parallèlement à W) donc :
$\exists g \in \mathcal{L}(V)$ tq $\mathcal{M} = \mathcal{K}_{\ker(g)} = \Gamma_g$

4. (a) Soit $f \in \mathcal{J}_U \cap \mathcal{K}_W$.
$f \in \mathcal{J}_U$ donc $\mathrm{Im}\,(f) \subset U$ ie : $\forall x \in E\ f(x) \in U$
L'application $f_{|S}^{|U}$ est donc bien définie. Elle est clairement linéaire.

On peut donc définir $L \begin{cases} \mathcal{J}_U \cap \mathcal{K}_W \to \mathcal{L}(S, U) \\ f \mapsto f_{|S}^{|U} \end{cases}$.

L est elle-même une application linéaire.
Montrons que c'est un isomorphisme.

Soit $f \in \text{Ker}(L)$.
$\forall x \in S \; f(x) = f_{|S}^{|U}(x) = L(f)(x) = 0$
Donc $S \subset \text{Ker}(f)$.
Mais $f \in \mathcal{K}_W$ donc $W \subset \text{Ker}(f)$.
D'après la question 6 des préliminaires, $S + W \subset \text{Ker}(f)$.
Mais $S + W = E$ donc $E \subset \text{Ker}(f)$ et f est nulle.
$\text{Ker}(L) = \{0\}$ donc L est injective.

Montrons que L est surjective.
Soit p la projection sur S parallèlement à W.
Soit $g \in \mathcal{L}(S, V)$.
Soit $f \begin{cases} V \to V \\ x \mapsto g(p(x)) \end{cases}$
$\forall x \in E \; p(x) \in S$ donc f est bien définie
f est linéaire comme composée d'applications linéaires
De plus :
$\forall x \in W \; f(x) = g(p(x)) = g(0) = 0 : f \in \mathcal{K}_W$
$\forall x \in E \; f(x) = g(p(x)) \in U$ car g est une application de S dans U.
Donc $f \in \mathcal{J}_U \cap \mathcal{K}_W$
$\forall x \in S \; f(x) = g(p(x)) = g(x)$ (les vecteurs de S sont invariants par p)
Donc $f_{|S}^{|U} = g$ et $L(f) = g$
L est donc un isomorphisme de $\mathcal{J}_U \cap \mathcal{K}_W$ sur $\mathcal{L}(S, U)$ et :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{J}_U \cap \mathcal{K}_W) &= \dim(\mathcal{L}(S,U)) = \dim(S) \times \dim(U) \\ &= (\dim(V) - \dim(W)) \times \dim(U) \end{aligned}$$

(b) Soit $\mathcal{M}$ un idéal bilatère de $\mathcal{L}(V)$.
$\mathcal{M}$ est un idéal à gauche donc il existe W sev de V tel que $\mathcal{M} = \mathcal{K}_W$.
$\mathcal{M}$ est un idéal à droite donc il existe U sev de V tel que $\mathcal{M} = \mathcal{J}_U$.
On a $\mathcal{M} = \mathcal{J}_U = \mathcal{K}_W$ donc $\mathcal{J}_U \cap \mathcal{K}_W = \mathcal{J}_U = \mathcal{K}_W = \mathcal{M}$.
On a donc $\dim(\mathcal{J}_U \cap \mathcal{K}_W) = \dim(\mathcal{J}_U)$.
On en déduit : $(\dim(V) - \dim(W)) \times \dim(U) = \dim(V)\dim(U)$
ce qui donne après simplification $\dim(W) \times \dim(U) = 0$.
Donc $\dim(U) = 0$ ou $\dim(W) = 0$.
Donc $U = \{0\}$ ou $W = \{0\}$.
SI $U = \{0\}$ alors $\mathcal{M} = \mathcal{J}_{\{0\}} = \{0\}$ cf 2.a.
Si $W = \{0\}$ alors $\mathcal{M} = \mathcal{K}_{\{0\}} = \{f \in \mathcal{L}(V) \text{ tq } \{0\} \subset \text{Ker}(f)\} = \mathcal{L}(V)$.

Réciproquement, il ne reste plus qu'à prouver que $\{0\}$ et $\mathcal{L}(V)$ sont des idéaux bilatères.
Les vérifications de la définition sont triviales. On peut aussi dire que :
$\{0\} = \mathcal{J}_{\{0\}} = \mathcal{K}_V$
et que $\{0\} = \mathcal{K}_{\{0\}} = \mathcal{J}_V$
et utiliser la partie 1.

4 Etude des idéaux de $\mathcal{L}(V)$: deuxième méthode

1. (a) Soit $f \in \mathcal{M}$ inversible.
$\forall g \in \mathcal{L}(V)\ g = (f \in \mathcal{M}) \circ (f^{-1} \circ g \in \mathcal{L}(V)) \in \mathcal{M}$.
Donc $\mathcal{L}(V) \subset \mathcal{M}$.
Mais $\mathcal{M}$ est un sev de $\mathcal{L}(V)$ donc $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(V)$.
On en déduit $\mathcal{M} = \mathcal{L}(V)$.
Si un idéal bilatère de $\mathcal{L}(V)$ contient une matrice inversible, c'est $\mathcal{L}(V)$ (qui est bien un idéal bilatère de $\mathcal{L}(V)$: vérifications faciles).

Remarque
On a en fait prouvé que si un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$ contient un inversible c'est $\mathcal{L}(V)$ en entier.
On prouverait de même que si un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$ contient un inversible c'est $\mathcal{L}(V)$ en entier.

(b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V adaptée à la décomposition $V = D \oplus S$.
$f \neq 0$ donc il existe $x \in V$ tel que $\epsilon_1 = f(x) \neq 0$.
On complète[1] la famille libre (ϵ_1) en une base $\mathcal{C} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de V.
$\exists ! b \in \mathcal{L}(V)$ tq $\begin{cases} b(e_1) = x \\ \forall i \in [\![2; n]\!]\ b(e_i) = 0 \end{cases}$
$\exists ! a \in \mathcal{L}(V)$ tq $\begin{cases} a(\epsilon_1) = e_1 \\ \forall i \in [\![2; n]\!]\ a(\epsilon_i) = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (a \circ f \circ b)(e_1) &= (a \circ f)(b(e_1)) = (a \circ f)(x) = a(f(x)) = a(\epsilon_1) \\ &= e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![2; n]\!]\ (a \circ f \circ b)(e_i) &= (a \circ f)(b(e_i)) = (a \circ f)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a \circ f \circ b$ est la projection sur $\mathbb{K}e_1 = D$ parallèlement à $\text{Vect}(e_2, \dots, e_n) = S$.

(c) Soit $\mathcal{M}$ un idéal bilatère de $\mathcal{L}(V)$ non réduit à $\{0\}$.
Soit $f \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V.
D'après la question précédente :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \exists (a_i, b_i) \in \mathcal{L}(V)^2$ tq $a_i \circ f \circ b_i = p_i$ la projection sur $\mathbb{K}e_i$ parallèlement à $\text{Vect}\left((e_j)_{j \neq i}\right)$.
$\mathcal{M}$ étant un idéal à droite, $f \circ b_i \in \mathcal{M}$
$\mathcal{M}$ étant un idéal à gauche, $a_i \circ f \circ b_i \in \mathcal{M}$
$\mathcal{M}$ étant un sev de $\mathcal{L}(V)$, $Id_V = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \in \mathcal{M}$
D'après a, $\mathcal{M} = \mathcal{L}(V)$.
On a donc prouvé que si $\mathcal{M}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(V)$ alors $\mathcal{M} = \{0\}$ ou $\mathcal{L}(V)$.
Réciproquement, on vérifie facilement (avec les définitions) que $\{0\}$ et $\mathcal{L}(V)$ sont des idéaux bilatères de $\mathcal{L}(V)$.
On a bien redémontré le résultat de 2.3.b.

1. En toute rigueur, il faudrait supposer $n \geq 2$, mais il suffit d'adapter le raisonnement si $n = 1$

2. (a) Si $W = \{0\}$ alors $W' = V$.
On prend $a = 0_{\mathcal{L}(V)}$.
$f \circ a = 0_{\mathcal{L}(V)}$ est bien un projecteur d'image W et de noyau W'.
Dans la suite on suppose $W \neq \{0\}$.
Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de W.
$W \subset \mathrm{Im}(f)$ donc :
$\forall i \in [\![1; d]\!]\ \exists \epsilon_i \in V$ tq $f(\epsilon_i) = e_i$
Si $W' = \{0\}$, ce qui revient à supposer $W = V$ alors $d = n$ et $(e_1, \ldots, e_d) = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V.
$\exists! a \in \mathcal{L}(V)$ tq $\forall i \in [\![1; n]\!]\ a(e_i) = \epsilon_i$
On a alors :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ (f \circ a)(e_i) = f(a(e_i)) = f(\epsilon_i) = e_i$
On en déduit $f \circ a = Id_V$ qui est bien un projecteur d'image W et de noyau W'.
On suppose désormais $W \neq V$ ie $d < n$.
Soit $(e_{d+1}, \ldots, e_n)$ une base de W' (W' étant un supplémentaire de W sa dimension est bien $n - d$).
$(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V.
$\exists! a \in \mathcal{L}(V)$ tq $\begin{cases} \forall i \in [\![1; d]\!]\ a(e_i) = \epsilon_i \\ \forall i \in [\![d+1; n]\!]\ a(e_i) = 0 \end{cases}$
$\forall i \in [\![1; d]\!]\ (f \circ a)(e_i) = e_i$
$\forall i \in [\![d+1]\!]\ (f \circ a)(e_i) = 0$
Donc $f \circ a$ est la projection sur W parallèlement à W'.

(b) Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W_1 \times (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \times W_2 \times S$ tq $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
W_1, $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$ et W_2 sont inclus dans $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ donc $x_1 + x_2 + x_3 \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.
$\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ et S sont supplémentaires donc $x_4 = 0$ et $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
x_2 et x_3 appartiennent à $\mathrm{Im}\,(g)$ donc $x_1 = -(x_2 + x_3) \in \mathrm{Im}\,(g)$.
Mais $x_1 \in W_1 \subset \mathrm{Im}\,(f)$ donc $x_1 \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$.
Donc x_1 appartient à W_1 et $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$ qui sont supplémentaires dans $\mathrm{Im}\,(f)$ donc $x_1 = 0$.
Il reste $x_2 + x_3 = 0$ avec $x_2 \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$ et $x_3 \in W_2$ et $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$ et W_2 sont supplémentaires dans $\mathrm{Im}\,(g)$ donc $x_2 = x_3 = 0$.
La somme $W_1 + (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) + W_2 + S$ est bien directe.
De plus :

$$\begin{aligned}
\dim(W_1 \oplus (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \oplus W_2 \oplus S) &= \dim(W_1) + \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) + \dim(W_2) + \dim(S) \\
&= \dim(\mathrm{Im}\,(f)) - \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \\
&\quad + \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \\
&\quad + \dim(\mathrm{Im}\,(g)) - \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) + \dim(S) \\
&= \dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(g)) - \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \\
&\quad + \dim(S) \\
&= \dim(\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)) + \dim(S) \\
&= \dim(V)
\end{aligned}$$

On a bien montré $V = W_1 \oplus (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \oplus W_2 \oplus S$

Justifions $W_1 + \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.

$W_1 \subset \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ donc $W_1 + \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.
$W_1 \cap \mathrm{Im}\,(g) = (W_1 \cap \mathrm{Im}\,(f))\mathrm{Im}\,(g)$ car $W_1 \subset \mathrm{Im}\,(f)$ donc :
$W_1 \cap \mathrm{Im}\,(g) = W_1 \cap (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) = \{0\}$ car W_1 est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$ dans $\mathrm{Im}\,(f)$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + \mathrm{Im}\,(g)) &= \dim(W_1) + \dim(\mathrm{Im}\,(g)) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) - \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) + \dim(\mathrm{Im}\,(g))\\ &= \dim(\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g))\end{aligned}$$

D'où : $W_1 + \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.

$V = W_1 \oplus (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \oplus W_2 \oplus S$ donc $(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \oplus W_2 \oplus S = \mathrm{Im}\,(g) \oplus S$ est un supplémentaire de W_1.
Donc il existe $a \in \mathcal{L}(V)$ tq $f \circ a$ soit un projecteur d'image W_1 et de noyau $\mathrm{Im}\,(g) \oplus S$.
De $V = W_1 \oplus (\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \oplus W_2 \oplus S$, on déduit que $W_1 \oplus S$ et $(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \oplus W_2 = \mathrm{Im}\,(g)$ sont supplémentaires.
Donc il existe $b \in \mathcal{L}(V)$ tq $g \circ b$ soit un projecteur d'image $\mathrm{Im}\,(g)$ et de noyau $W_1 \oplus S$.

Soit $x \in W_1$.
$x \in W_1 \oplus S = \mathrm{Ker}\,(g \circ b)$ donc $(g \circ b)(x) = 0$
$x \in W_1 = \mathrm{Im}\,(f \circ a) = \mathrm{Ker}\,(f \circ a - Id_V)$ (car $f \circ a$ est un projecteur) donc $x = (f \circ a)(x)$.
On en déduit : $x = (f \circ a + g \circ b)(x) \in \mathrm{Im}\,(f \circ a + g \circ b)$.
Donc $W_1 \subset \mathrm{Im}\,(f \circ a + g \circ b)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}\,(g)$.
$x \in \mathrm{Im}\,(g) \oplus S = \mathrm{Ker}\,(f \circ a)$ donc $(f \circ a)(x) = 0$
$x \in \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(g \circ b) = \mathrm{Ker}\,(g \circ b)$ (car $g \circ b$ est un projecteur) donc $x = (g \circ b)(x)$.
On en déduit : $x = (f \circ a + g \circ b)(x) \in \mathrm{Im}\,(f \circ a + g \circ b)$.
Donc $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f \circ a + g \circ b)$.
D'après la question 6 des préliminaires, $W_1 + \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f \circ a + g \circ b)$.
Mais $W_1 + \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ donc $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f \circ a + g \circ b)$.
Mais d'après les préliminaires :
$\mathrm{Im}\,(f \circ a + g \circ b) \subset \mathrm{Im}\,(f \circ a) + \mathrm{Im}\,(g \circ b)$ avec $\mathrm{Im}\,(f \circ a) \subset \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(g \circ b) \subset \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ donc $\mathrm{Im}\,(f \circ a + g \circ b) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.
Finalement $\mathrm{Im}\,(f \circ a + g \circ b) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.

(c) Si $p = 1$ alors $f = f_1$ convient.
On suppose $p \geq 2$.
D'après ce qui précède, il existe a et $b \in \mathcal{L}(V)$ tq $\mathrm{Im}\,(f_1 \circ a + f_2 \circ b) = \mathrm{Im}\,(f_1) + \mathrm{Im}\,(f_2)$.
$\mathcal{M}$ est un idéal à droite donc $f_1 \circ a \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M}$ est un idéal à droite donc $f_2 \circ b \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M}$ est un sev de $\mathcal{L}(V)$ donc $g_1 = f_1 \circ a + f_2 \circ b \in \mathcal{M}$.
Si $p = 2$, g_1 convient.
On suppose $p \geq 3$.
En raisonnant comme ci-dessus, on montre :
$\exists g_2 \in \mathcal{M}$ tq $\mathrm{Im}\,(g_2) = \mathrm{Im}\,(g_1) + \mathrm{Im}\,(f_3) = \mathrm{Im}\,(f_1) + \mathrm{Im}\,(f_2) + \mathrm{Im}\,(f_3)$.
Si $p = 3$, g_2 convient.
Sinon, on itère le procédé et on arrive au résultat en $p - 1 < +\infty$ opérations.

$f \in \mathcal{M}$ idéal à droite donc $\Delta_f \subset \mathcal{M}$.
Réciproquement, soit $g \in \mathcal{M}$.
$(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $\mathcal{M}$ donc :
$\exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $g = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$
En raisonnant comme d'habitude :
$\mathrm{Im}\,(g) \subset \sum_{i=1}^{p} (\mathrm{Im}\,(\lambda_i f_i) \subset \mathrm{Im}\,(f_i)) \subset \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Im}\,(f_i) = \mathrm{Im}\,(f)$ ie $g \in \mathcal{J}_{\mathrm{Im}\,(f)}$
Mais d'après 1.2.c, $\mathcal{J}_{\mathrm{Im}\,(f)} = \Delta_f$ donc $g \in \Delta_f$.
D'où $\mathcal{M} \subset \Delta_f$ puis $\mathcal{M} = \Delta_f$.

3. (a) On va prendre des bases de sev de V qu'on va compléter en base de V.
En toute rigueur, il faudrait à chaque fois isoler le cas où il est inutile de compléter.
Je ne le ferai pas.

On note q la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et d celle de W.
On part de $(e_1, \ldots, e_q)$ base $\mathrm{Ker}\,(f)$ qu'on complète en $(e_1, \ldots, e_d)$ base de W.
On considère alors $(e_{d+1}, \ldots, e_n)$ une base de W' (W' étant un supplémentaire de W sa dimension est bien $n - d$).
$(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V.
On montre ensuite que la famille $(f(e_{q+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre.
Soit $(\lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-q}$ tq $\sum_{i=q+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$

$$\sum_{i=q+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=q+1}^{n} \lambda_i e_i\right) \text{ donc } \sum_{i=q+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_q)$$

$(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre donc $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_n = 0$
On peut donc compléter la famille $(f(e_{q+1}), \ldots, f(e_n))$ en une base $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_q, f(e_{q+1}), \ldots, f(e_n))$ de V.

$$\exists! a \in \mathcal{L}(V) \text{ tq } \begin{cases} \forall i \in [\![1; q]\!] \ a(\epsilon_i) = 0 \\ \forall i \in [\![q+1; d]\!] \ a(f(e_i)) = 0 \\ \forall i \in [\![d+1; n]\!] \ a(f(e_i)) = e_i \end{cases}$$

On a alors :
$\forall i \in [\![1; q]\!] \ (a \circ f)(e_i) = a(f(e_i)) = a(0) = 0$
$\forall i \in [\![q+1; d]\!] \ a(f(e_i)) = 0$
$\forall i \in [\![d+1; n]\!] \ a(f(e_i)) = e_i$
Donc $a \circ f$ est la projection sur $\mathrm{Vect}(e_{d+1}, \ldots, e_n) = W'$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_d) = W$.

(b) Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W_1 \times (\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) \times W_2 \times S$ tq $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
W_1, $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$ et W_2 sont inclus dans $\mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$ donc $x_1 + x_2 + x_3 \in \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$.
$\mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$ et S sont supplémentaires donc $x_4 = 0$ et $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
x_2 et x_3 appartiennent à $\mathrm{Ker}\,(g)$ donc $x_1 = -(x_2 + x_3) \in \mathrm{Ker}\,(g)$.
Mais $x_1 \in W_1 \subset \mathrm{Ker}\,(f)$ donc $x_1 \in \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$.
Donc x_1 appartient à W_1 et $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$ qui sont supplémentaires dans $\mathrm{Ker}\,(f)$ donc $x_1 = 0$.
Il reste $x_2 + x_3 = 0$ avec $x_2 \in \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$ et $x_3 \in W_2$ et $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$ et W_2 sont supplémentaires dans $\mathrm{Ker}\,(g)$ donc $x_2 = x_3 = 0$.

La somme $W_1 + (\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) + W_2 + S$ est bien directe.
De plus :

$$\begin{aligned}
\dim\,(W_1 \oplus (\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) \oplus W_2 \oplus S) &= \dim\,(W_1) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) + \dim\,(W_2) + \dim\,(\\
&= \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) \\
&\quad + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) \\
&\quad + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g)) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) + \dim\,(S) \\
&= \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g)) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) \\
&\quad + \dim\,(S) \\
&= \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)) + \dim\,(S) \\
&= \dim\,(V)
\end{aligned}$$

On a bien montré $V = W_1 \oplus (\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) \oplus W_2 \oplus S$

On en déduit que W_2 est un supplémentaire de $W_1 \oplus (\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) \oplus S = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus S$ qui contient $\mathrm{Ker}\,(f)$.
Donc il existe $a \in \mathcal{L}(V)$ tq $a \circ f$ soit un projecteur d'image W_2 et de noyau $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus S$.
$V = W_1 \oplus (\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) \oplus W_2 \oplus S$ donc $W_1 \oplus S$ est un supplémentaire de $(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) \oplus W_2 = \mathrm{Ker}\,(g)$.
Donc il existe $b \in \mathcal{L}(V)$ tq $b \circ g$ soit un projecteur d'image $W_1 \oplus S$ et de noyau $\mathrm{Ker}\,(g)$.

D'après les préliminaires $\mathrm{Ker}\,(a \circ f) \cap \mathrm{Ker}\,(b \circ g) \subset \mathrm{Ker}\,(a \circ f + b \circ g)$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}\,(a \circ f + b \circ g)$.
$(a \circ f)(x) = -(b \circ g)(x) \in \mathrm{Im}\,(a \circ f) \cap \mathrm{Im}\,(b \circ g) = W_2 \cap (W_1 \oplus S) = \{0\}$ Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(a \circ f) \cap \mathrm{Ker}\,(b \circ g)$.
D'où $\mathrm{Ker}\,(a \circ f + b \circ g) = \mathrm{Ker}\,(a \circ f) \cap \mathrm{Ker}\,(b \circ g)$.
Mais $\mathrm{Ker}\,(a \circ f) \cap \mathrm{Ker}\,(b \circ g) = (\mathrm{Ker}\,(f) \oplus S) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$
On a clairement $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) \subset (\mathrm{Ker}\,(f) \oplus S) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$.
Réciproquement, soit $x \in (\mathrm{Ker}\,(f) \oplus S) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$.
$\exists (x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\,(f) \times S$ tq $x = x_1 + x_2$.
$x \in \mathrm{Ker}\,(g)$ donc $x_2 = x - x_1 \in \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$ et S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$ donc : $x_2 = 0$ et $x = x_1 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
Donc $(\mathrm{Ker}\,(f) \oplus S) \cap \mathrm{Ker}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$ et finalement :
$\mathrm{Ker}\,(a \circ f + b \circ g) = \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$.

(c) Si $p = 1$ alors $f = f_1$ convient.
On suppose $p \geq 2$.
D'après ce qui précède, il existe a et $b \in \mathcal{L}(V)$ tq $\mathrm{Ker}\,(a \circ f_1 + b \circ f_2) = \mathrm{Ker}\,(f_1) \cap \mathrm{Ker}\,(f_2)$.
$\mathcal{M}$ est un idéal à gauche donc $a \circ f_1 \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M}$ est un idéal à gauche donc $b \circ f_2 \in \mathcal{M}$.
$\mathcal{M}$ est un sev de $\mathcal{L}(V)$ donc $g_1 = a \circ f_1 + b \circ f_2 \in \mathcal{M}$.
Si $p = 2$, g_1 convient.
On suppose $p \geq 3$.
En raisonnant comme ci-dessus, on montre :
$\exists g_2 \in \mathcal{M}$ tq $\mathrm{Ker}\,(g_2) = \mathrm{Ker}\,(g_1) \cap \mathrm{Ker}\,(f_3) = \mathrm{Ker}\,(f_1) \cap \mathrm{Ker}\,(f_2) \cap \mathrm{Ker}\,(f_3)$.
Si $p = 3$, g_2 convient.
Sinon, on itère le procédé et on arrive au résultat en $p - 1 < +\infty$ opérations.

$f \in \mathcal{M}$ idéal à gauche donc $\Gamma_f \subset \mathcal{M}$.
Réciproquement, soit $g \in \mathcal{M}$.
$(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $\mathcal{M}$ donc :
$\exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$
$\mathrm{Ker}\,(g)$ contient $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(\lambda_i f_i)$
Mais $\mathrm{Ker}\,(\lambda_i f_i)$ contient $\mathrm{Ker}\,(f_i)$ donc $\mathrm{Ker}\,(g)$ contient $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(f_i) = \mathrm{Ker}\,(f)$ ie $g \in \mathcal{K}_{\mathrm{Ker}\,(f)}$
Mais d'après 1.2.c, $\mathcal{K}_{\mathrm{Ker}\,(f)} = \Gamma_f$ donc $g \in \Gamma_f$.
D'où $\mathcal{M} \subset \Gamma_f$ puis $\mathcal{M} = \Gamma_f$.