

DM 2

A rendre le jeudi 17 octobre 2024

Mines 2005 PC - Epreuve 1

durée : 3 heures

calculatrices interdites

L'énoncé a été modifié pour tenir compte du nouveau programme et de l'état d'avancement du cours

Avertissement : dans ce problème, apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement l'intégrabilité des fonctions considérées même lorsque ce n'est pas explicitement demandé.

I. Préliminaires.

1. Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \ln(1+t) \leq t \quad (1)$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, t \ln(t) \geq -\frac{1}{e} \quad (2)$$

2. Soit ψ une bijection de classe C^1 de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J .

On admet¹ :

ψ^{-1} de classe $C^1 \iff \forall x \in I \psi'(x) \neq 0$

Dans ce cas, rappeler l'expression de la dérivée de ψ^{-1} .

II. Construction d'une application particulière.

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur \mathbb{R} , pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{\rho} \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \rho\right)x^2\right) \quad (A)$$

On note H_0 , le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0

3. Soit F_f définie par

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^x f(u)e^{-u^2/2} du$$

En particulier,

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

Montrer que F_f est une bijection de \mathbb{R} sur $]0, \sqrt{2\pi}[$, de classe C^1 ainsi que sa bijection réciproque.

4. Montrer qu'il existe une unique fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que, pour tout réel x , on ait

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

¹ou on rappelle

5. Montrer que φ est monotone et que φ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , de classe C^1 ainsi que sa bijection réciproque.

6. Pour tout réel x , calculer

$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2$$

et

$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2$$

7. Soit h une fonction continue par morceaux de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur \mathbb{R} .

Montrer l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2} du$$

8. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on ait :

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \geq \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}$$

9. Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geq B$, on ait :

$$|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}$$

10. Déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}$$

11. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2} du$$

III. Une inégalité intéressante.

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \ln(f(u))e^{-u^2/2} du$$

$$\Phi(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2} du$$

12. Justifier la convergence de ces deux intégrales.

13. Montrer l'identité :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2} du$$

14. Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)))e^{-u^2/2} du$$

15. Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?

16. Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

FIN DU PROBLEME

Le problème du transport de Monge consiste à optimiser le coût global du transport d'une répartition de masse vers une autre. Dans le cas uni-dimensionnel que nous venons de traiter, on se donne un tas de sable infiniment fin dont le poids entre les abscisses $u - du$ et $u + du$ est donné par $2 \exp(-u^2/2)du$. On veut le déplacer vers un tas de sable de densité linéique $f(u)\exp(-u^2/2)$. Cela est représenté par une application s de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui pour tout réel u donne l'abscisse, $s(u)$, du grain situé en u après le transport. On montre que l'application φ déterminée en question 4 minimise le coût du transport défini par $\int_{-\infty}^{+\infty} |u - s(u)|e^{-u^2/2} du$, parmi toutes les fonctions s possibles. L'objectif de ce problème est de majorer ce coût minimal par une quantité qui ne dépend que de f et qui ne nécessite pas le calcul de φ . Le nombre $E(f)$ est appelé l'entropie de Boltzmann.