PC*1

DM N°4

A rendre le lundi 4 novembre 2024

Les deux exercices sont indépendants.

1 Exercice 1

Dans tout l'exercice l'espace E est l'espace des fonctions continues sur le segment $[0;1]$: $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.
A toute fonction f de E, on associe la fonction $u(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0;1]\ u(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

ainsi que la fonction $v(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0;1]\ v(f)(x) = \int_0^1 \max(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

1.1 Noyau et image de u

1. Montrer que pour tout $f \in E$, on a :
$$\forall x \in [0;1]\ u(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t - x \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
En déduire que u est un endomorphisme de E.
2. Soit $f \in E$.
Montrer que $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et donner la dérivée seconde de $u(f)$.
3. Déterminer le noyau de u.
4. Calculer $u(f)(0)$ ainsi que $[u(f)]'(1)$.
En déduire l'image de u.
5. E est-il de dimension finie ?

1.2 Quelques exemples

Déterminer $u(f)$ dans les cas suivants :

1. $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{cases}$
2. $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$
3. $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \end{cases}$
Que remarque-t-on ?

1.3 Eléments propres de u

1. 0 est-il valeur propre de u ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.
   Montrer que λ n'est pas valeur propre de u.
   On pourra poser $\lambda = -\dfrac{1}{\omega^2}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que λ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est de la forme λ_n où $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de réels strictement positifs.
   Quels sont les sous-espaces propres de u ?
4. Quelle est la nature de la série de terme général λ_n ?

1.4 Eléments propres de v

v est un endomorphisme de E. On ne demande pas la démonstration.

1. 0 est-il valeur propre de v ?
2. Soit $\lambda > 0$.
   On pose $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer :
   λ valeur propre de $v \iff \omega$ solution de $(E_1) : (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}$
   Quel est alors le sous-espace propre associé ?
3. Montrer que (E_1) possède une et une seule solution strictement positive.
4. v possède donc une seule valeur propre positive. On la note μ.
   Montrer que μ est compris entre 0 et 1.
5. Soit $\lambda < 0$.
   On pose $\lambda = \dfrac{-1}{\omega^2}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer :
   λ valeur propre de $v \iff \omega$ solution de $(E_2) : \omega \sin\omega + \cos\omega = 0$
   Quel est alors le sous-espace propre associé ?
6. On s'intéresse dans cette question aux solutions de l'équation (E_2).
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer que sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, (E_2) a exactement une solution. On la note ω_k.
   Montrer que $\omega_k \in \left]\dfrac{\pi}{2} + k\pi; (k+1)\pi\right[$.
   On note $\lambda_k = \dfrac{-1}{\omega_k^2}$ la valeur propre correspondante de v.
   (b) Que peut-on dire de la monotonie de la suite $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$? de sa convergence ?
   (c) Donner un équivalent simple de ω_k.
   (d) Quelle est la nature de la série de terme général λ_k ?
   (e) Donner un développement asymptotique de ω_k de la forme :
   $\omega_k = k\pi + a + \dfrac{b}{k} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ où a et b sont des constantes à déterminer.

   En déduire un développement asymptotique de λ_k.

2 Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **non nuls**.
On dit que le **produit infini** $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge si la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}\ P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$

admet une **limite finie non nulle**.
Dans tous les autres cas, on dit que le produit infini $\prod_{n\geq 0} a_n$ diverge.

En cas de convergence, le réel $\lim_{k\to+\infty} P_k$ est appelé le produit de $\prod_{n\geq 0} a_n$ et se note $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Etudier le produit infini $\prod_{n\geq 0} a_n$ consiste à déterminer si le produit est convergent ou divergent.

2.1 Premiers exemples et condition nécessaire

1. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.
2. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ converge et calculer $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.
3. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ converge et calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.
4. On se propose de montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(-1)^k}{k}\right)$.

   (a) Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ P_{2n} = 1$

   (b) Conclure.
5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls.
   On suppose que le produit infini $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge.

   Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   En considérant le produit infini $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$, montrer que la réciproque est fausse.

2.2 Utilisation de la positivité

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **strictement positifs**.
   Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge.
   Montrer en cas de convergence :
   $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n)\right)$

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **positifs**.
   Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
8. Donner, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature du produit infini $\prod_{n\geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$.

2.3 Quelques résultats dans le cas général

9. (a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

   La convergence de la série $\sum u_n$ n'entraîne donc pas celle du produit $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$.

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
    $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $u_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$

    (a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

    (b) Calculer $(1+u_{2n-1})(1+u_{2n})$.

    (c) $1+u_1 = 0$ mais :
    $\forall n \geq 2\ 1+u_n \neq 0$ (on ne demande pas de justifier ce point)
    Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}(1+u_n)$ converge et donner la valeur de $\prod_{n=2}^{+\infty}(1+u_n)$.
    La convergence du produit $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ n'entraîne donc pas celle de la série $\sum u_n$.

11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que :
    - $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > -1$
    - La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument.

    Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge.